MAT

PRÉ-VESTIBULAR

MATEMÁTICA

2

Sumário

Frente 1

Frente 2

Frente 3

Salov Evgeny/Shutterstock.com

FRENTE 1

CAPÍTULO

5

Funções logarítmicas

Logaritmos são ferramentas matemáticas muito úteis para a simplificação de contas e com diversas aplicações práticas. Um de seus principais usos é na microbiologia, para caracterização do crescimento de bactérias.

Sob condições ótimas de crescimento, muitas espécies bacterianas apresentam um tempo de geração médio em determinada fase de seu crescimento. Com a aplicação de modelos matemáticos que se utilizam de logaritmos e exponenciais, podemos calcular as taxas de crescimento dessas culturas. Isso nos permite determinar o crescimento real de uma cultura de bactérias, além de determinar a eficiência de antibióticos em testes.

Conceito de logaritmo

No capítulo 4 do livro 1, estudamos as equações e inequações exponenciais quando era possível reduzir facilmente as potências à mesma base. Observe:

$$2^x = 256 \therefore 2^x = 2^8, \text{ logo } x = 8$$

E quando não for possível reduzir à mesma base?

Por exemplo:

$2^x = 5$, sabemos que $2 < x < 3$, pois $2^2 < 5 < 2^3$

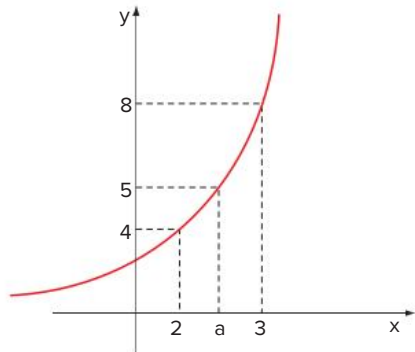



Fig. 1 Gráfico da função $y = 2^x$.

Então, *x* é um número real *a*, que na base 2 dá 5, ou seja, $2^a = 5$.

Vamos chamar esse número **a** de **logaritmo**.

Percebemos que tecnicamente o logaritmo é um ex poente.

Definição de logaritmo

Sejam a e b $\in \mathbb{R}_+^*$ com $a \neq 1$, chamamos logaritmo de **b** na base **a** o expoente que se deve dar à base **a**, de modo que o resultado obtido seja igual a **b**. Simbolicamente:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

a: base do logaritmo
b: logaritmando ou antilogaritmo
x: logaritmo

Exemplo 1

- $\log_3 27 = 3$, pois $3^3 = 27$
- $\log_2 16 = 4$, pois $2^4 = 16$
- $\log_{10} \frac{1}{100} = -2$, pois $10^{-2} = \frac{1}{100}$
- $\log_{0,5} 64 = \ \ 6$, pois $(0,5)^{-6} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 64$

Esses exemplos são quase que feitos mentalmente, basta ter o conceito de que logaritmo é um expoente. Mas se o exercício tiver uma "aparência estranha", basta aplicar a definição. Observe o exemplo 2 a seguir.

Exemplo 2

$\log_{\sqrt{2}} 2\sqrt[3]{32} = x$. Assim, pela definição temos $(\sqrt{2})^x = 2\sqrt[3]{32}$, o problema torna se uma equação exponencial:

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x = 2 \cdot \sqrt[3]{2^5} \Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 2 \cdot 2^{\frac{5}{3}} \therefore 2^{\frac{x}{2}} = 2^{1+\frac{5}{3}} \Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 2^{\frac{8}{3}} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{8}{3}$$

Portanto, o logaritmo vale $\frac{16}{3}$.

! Atenção

O logaritmando também é chamado de antilogaritmo. Observe: $\log_3 9 = 2 \Rightarrow 9$ é o antilogaritmo. Podemos também escrever que $\text{antilog}_3 2 = 3^2 = 9$.

Resultados importantes da definição

Considerando b e a $\in \mathbb{R}_+^*$ com $a \neq 1$, observe:

1) $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$

2) $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$

3) $a^{\log_a b} = b$, para justificar essa propriedade, observe: $\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$, mas $x = \log_a b$, substituindo, temos $a^{\log_a b} = b$.

Observe os exemplos:

Exemplo 3

- $27^{\log_3 2} = (3^3)^{\log_3 2} = (3^{\log_3 2})^3 = 2^3 = 8$
- $25^{1+\log_5 2} = 25 \cdot 25^{\log_5 2} = 25 \cdot 5^{2 \cdot \log_5 2} =$
  $= 25 \cdot (5^{\log_5 2})^2 = (25) \cdot (2^2) = 25 \cdot 4 = 100$
- $\text{antilog}_2{}^{(\log_2 3)} = 2^{\log_2 3} = 3$

Propriedade dos logaritmos

Observe agora as principais propriedades dos logaritmos, que facilitaram muito os cálculos laboriosos dos astrônomos.

P_1: Logaritmo do produto

Se $a > 0$ e $a \neq 1$; $b > 0$; $c > 0$:

$$\log_a (b \quad c) = \log_a b + \log_a c$$

Demonstração:

$$\log_a (bc) = x, \ \log_a b = y \text{ e } \log_a c = z$$
$$a^x = bc, \ a^y = b \text{ e } c = a^z \text{ então:}$$
$$a^x = a^y a^z \therefore a^x = a^{y+z} \Rightarrow x = y + z$$

P_2: Logaritmo do quociente

Se $a > 0$ e $a \neq 1$; $b > 0$; $c > 0$:

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Demonstração:

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = x, \ \log_a b = y \text{ e } \log_a c = z$$
$$a^x = \frac{b}{c}, \ a^y = b \text{ e } a^z = c; \text{ então:}$$
$$a^x = \frac{a^y}{a^z} \therefore a^x = a^{y-z} \Rightarrow x = y - z$$

Observação: $\log_a \left(\frac{1}{b}\right) = \log_a 1 - \log_a b = -\log_a b$

Por definição: $\text{colog}_a b = \ \ \log_a b$

$\text{colog}_a b$ lê-se: cologaritmo de *b* na base *a*

P_3: Logaritmo da potência

Se $a > 0$ e $a \neq 1$; $b > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$: $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$

Demonstração:

$$\log_a b^\alpha = x \text{ e } \log_a b = y \text{ então: } b^\alpha = a^x \text{ e } b = a^y$$

Substituindo, temos:

$$(a^y)^\alpha = a^x \therefore a^{y\alpha} = a^x \Rightarrow x = \alpha y$$

! Atenção

Não se esqueça! $2^{\log_2 3} = 3$

Faça uma revisão das propriedades de potenciação:

$$(a^x)^y = (a^y)^x = a^{x\ \ y} \text{ e } a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

Cuidado! $\log_5(\ \ 3)^2 \neq 2 \cdot \log_5(\ \ 3)$

Assim: $\log_5 x^2 = 2\log_5|x|$

$$\log_c(a + b) \neq \log_c a + \log_c b$$
$$\log_c(a - b) \neq \log_c a - \log_c b$$

Devemos primeiramente calcular $a + b$ e $a \quad b$ para depois aplicar o logaritmo.

Quando omitimos a base do logaritmo, admitimos que é base dez, $\log x = \log_{10} x$.

Observe os exemplos de simplificações de expressões logarítmicas:

Exemplo 4

- $\log \dfrac{a^2 b}{c} = \log(a^2 b) - \log c = \log a^2 + \log b - \log c =$

$= 2 \cdot \log a + \log b - \log c$

- $= \log \dfrac{\sqrt{ab}}{c^2} = \log \sqrt{ab} - \log c^2 =$

$= \log \sqrt{a} + \log b - 2 \cdot \log c =$

$= \log(a)^{\frac{1}{2}} + \log b - 2 \cdot \log c =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \log a + \log b - 2 \cdot \log c =$

- $\log \sqrt{\dfrac{\sqrt{ab}}{c}} = \log \left(\dfrac{\sqrt{ab}}{c}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \log \dfrac{\sqrt{ab}}{c} =$

$= \dfrac{1}{2}\left[\log \sqrt{ab} \quad \log c\right] =$

$= \dfrac{1}{2}\left[\log \sqrt{a} + \log b - \log c\right] =$

$= \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2} \log a + \log b \quad \log c\right] =$

$= \dfrac{1}{4} \log a + \dfrac{1}{2} \log b \quad \dfrac{1}{2} \log c$

P_4: Mudança de base

- Se tivermos um logaritmo da base *a* e quisermos man dá-lo para a base *c*, em que $a > 0$ e $a \neq 1$; $b > 0$; $c > 0$ e

$c \neq 1$: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

Demonstração:

Fazendo $\log_a b = x$, $\log_c b = y$ e $\log_c a = z$, temos pela definição: $b = a^x$, $b = c^y$ e $a = c^z$; então:

$$a^x = c^y \therefore (c^z)^x = c^y \therefore c^{xz} = c^y \Rightarrow xz = y \therefore x = \frac{y}{z}$$

P_5: Trocando base e logaritmando

Se $0 < a$; $b \neq 1$: $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

Demonstração:

Na propriedade 4, troque *c* por *b*, observe:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} \therefore \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

P_6: Potência da base

Se $a > 0$ e $a \neq 1$, $b \in \mathbb{R}^*$ e $b > 0$: $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha} \log_a b$

Demonstração:

$$\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\log_b a^\alpha} = \frac{1}{\alpha \cdot \log_b a} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\log_b a} = \frac{1}{\alpha} \log_a b$$

P_5 $\quad$ P_3 $\quad$ P_5

Observe os exemplos de aplicação das propriedades:

Exemplo 5

- $\log_{\frac{1}{125}} 5 = \log_{(5)^{\ \ 3}} 5 = -\dfrac{1}{3} \cdot \log_5 5 = -\dfrac{1}{3}$

- $\log_5 3 = \dfrac{\log_2 3}{\log_2 5}$ (mudança de base 5 para base 2)

- $\log_{\sqrt{27}} \sqrt{3} = \log_{\sqrt{3^3}} (3)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \log_{3^{\frac{3}{2}}} 3 =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} \log_3 3 = \dfrac{1}{3}$

P_7: Logaritmos e progressões

Considere a progressão geométrica (PG) (x, y, z) cujos termos são positivos Os logaritmos desses termos na base a formam uma progressão aritmética (PA). Simbolicamente, temos:

$$\text{PG } (x, y, z) \leftrightarrow \text{PA } (\log_a x, \log_a y, \log_a z)$$

Demonstração:

Como (x, y, z) formam uma PG, temos que:

$$y^2 = x \cdot z \rightarrow \log_a y^2 = \log_a x \cdot z$$
$$\therefore 2\log_a y = \log_a x + \log_a z$$
$$\therefore \log_a y = \frac{\log_a x + \log_a z}{2}$$

Ou seja, $(\log_a x, \log_a y, \log_a z)$ formam uma PA

P_8: Propriedade especial

Chamamos de propriedade especial, pois é pouco conhecida e fornece um resultado interessante.

Considere a, b e c $\in \mathbb{R}_+^*$ com $c \neq 1$, temos que:

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

Demonstração:

Fazendo $\log_c b = x$ e $\log_c a = y$, temos que $b = c^x$ e $a = c^y$.

$$a^{\log_c b} = a^x = (c^y)^x = c^{xy}$$
$$b^{\log_c a} = b^y = (c^x)^y = c^{xy}$$

Portanto, $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$.

Função logarítmica

Definição

Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > 0$ e $a \neq 1$, definimos a função logarítmica como:

$$f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R};\ f(x) = \log_a x$$

! Atenção

As funções *f* e *g* são inversas se $f \circ g = g \circ f = I$, em que I é a função identidade $[I(x) = x]$.

As funções *f* e f^{-1} são simétricas em relação às bissetrizes dos quadrantes ímpares

Se $(0, 1) \in a^x$ então $(1, 0) \in \log_a{}^x$, pois a^x e $\log_a{}^x$ são funções inversas entre si.

O domínio de uma função são todos os valores de *x* que satisfazem a condição de existência da função.

Propriedades

P_1: As funções exponenciais e as logarítmicas são inversas entre si.

Se $f(x) = \log_a x$ e $g(x) = a^x$, então:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \log_a g(x) = \log_a a^x = x$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = a^{f(x)} = a^{\log_a x} = x$$

Observe que ambas as composições fornecem a função identidade, logo, $g^{1}(x) = f(x)$.

P_2: O gráfico de $\log_a x$ e a^x são simétricos em relação a $y = x$ (bissetrizes dos quadrantes ímpares).

Sabemos do capítulo 4 que a função exponencial foi dividida em duas partes: $a > 1$ a função é crescente; e $0 < a < 1$ a função é decrescente. Pelos gráficos das exponenciais e a propriedade 2, podemos obter os gráficos logarítmicos. Observe:

a) $a > 1$

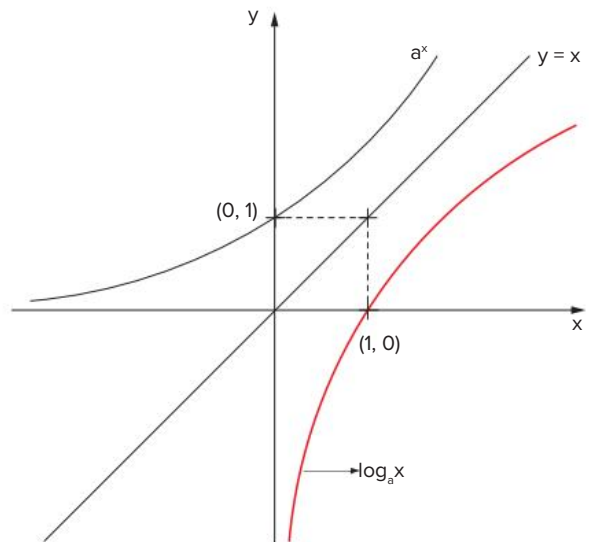



Fig. 2 Com base maior que 1, a função logarítmica é crescente.

b) $0 < a < 1$

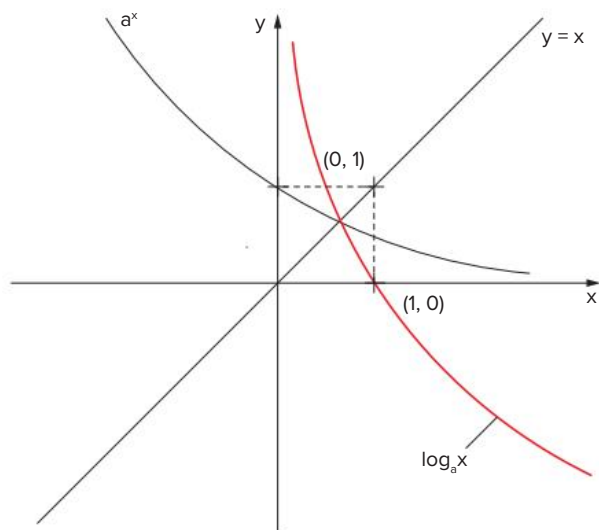



Fig. 3 Com base entre 0 e 1, a função logarítmica é decrescente.

P_3: As funções logarítmicas $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ e $f(x) = \log_a x$; $a > 0$ e $a \neq 1$ são funções injetoras.

Essa propriedade explica tecnicamente que:

$$f(x_1) = (x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

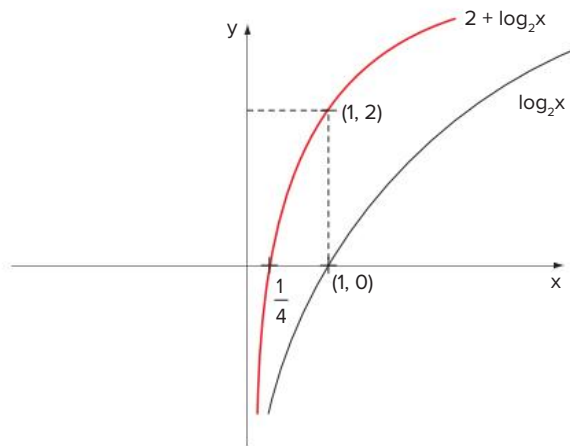
Na prática, temos que $\log_a(x_1) = \log_a(x_2) \rightarrow x_1 = x_2 > 0$, ou seja, quando os logaritmos tem a mesma base, podemos igualar os logaritmandos.

Observe os exemplos a seguir de como construir os gráficos da função logarítmica.

Exercícios resolvidos

1 Construa o gráfico da função: $f(x) = 2 + \log_2 x$

Resolução:

Nessa função, vamos construir primeiramente $\log_2 x$ e depois "subir" o gráfico inteiro em duas unidades.

Para encontrar a raiz da função, ou seja, o valor de *x* quando $y = 0$, basta resolver a equação:

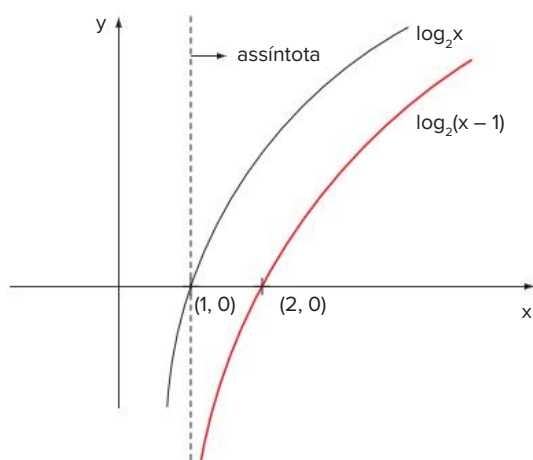
$$2 + \log_2 x = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = -2 \Leftrightarrow x = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

2 Construa o gráfico da função: $f(x) = \log_2(x \quad 1)$

Resolução:

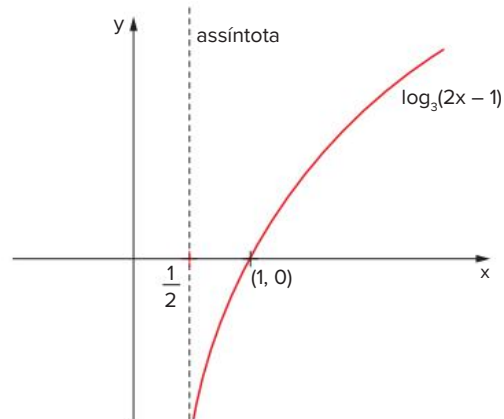
O domínio da função é $x \quad 1 > 0 \Rightarrow x > 1;\ \forall x \in \mathbb{R}$.
A raiz da função é $\log_2(x \quad 1) = 0$:

$$x \quad 1 = 2^0 \Leftrightarrow x \quad 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

O gráfico da função vai ser deslocado no sentido positivo do eixo *x*

3 Construa o gráfico da função: $f(x) = \log_3(2x \quad 1)$

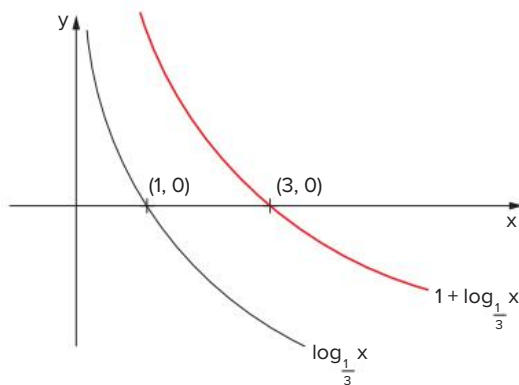
Resolução:

O domínio da função é $2x \quad 1 > 0 \therefore x > \frac{1}{2};\ \forall x \in \mathbb{R}$.
A raiz da função é $\log_3(2x \quad 1) = 0$:

$$2x \quad 1 = 3^0 \Leftrightarrow 2x \quad 1 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

4 Construa o gráfico da função: $f(x) = 1 + \log_{\frac{1}{3}} x$.

Resolução:

O gráfico da função $\log_{\frac{1}{3}} x$ vai "subir" 1 unidade.

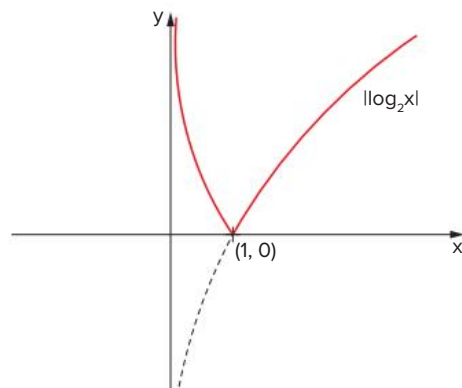
Lembre-se de que a função é decrescente.

A raiz da função é:

$$\log_{\frac{1}{3}} x + 1 = 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} x = \quad 1 \qquad x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$$

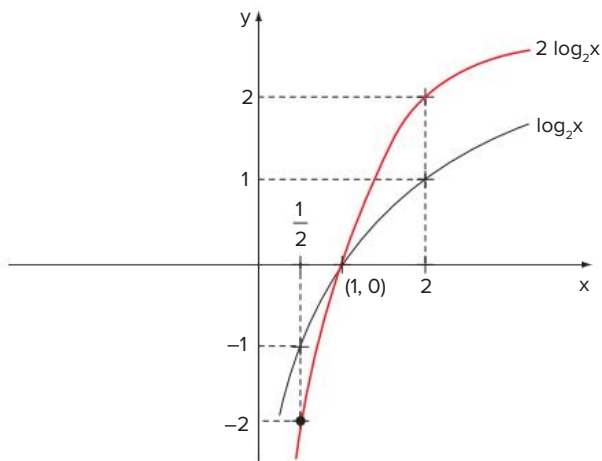
5 Construa o gráfico da função: $f(x) = |\log_2 x|$.

Resolução:

Construímos o gráfico da função interna do módulo, e depois rebatemos a parte negativa simetricamente em relação ao eixo *x*.

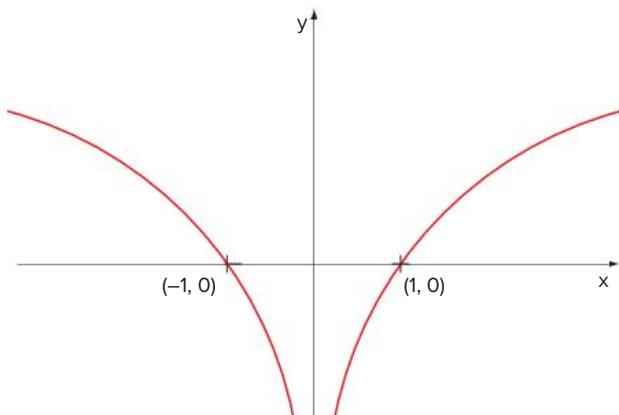
FRENTE 1

6 Construa o gráfico da função: $f(x) = 2 \cdot \log_2 x$.

Resolução:

Para compreender esse gráfico, vamos compará-lo com o gráfico básico $\log_2 x$. Observe:

Você deve comparar o valor do *y* para o mesmo *x* nos dois gráficos para ter ideia de suas posições. No gráfico anterior, comparamos o *y* para x = 2 e depois para $x = \frac{1}{2}$.

7 Construção do gráfico da função: $f(x) = \log_2 x^2$.

Resolução:

Cuidado! Sabemos que $\log_2 x^2 = 2 \log_2 x$, então o gráfico será igual ao anterior?
Não será, observe os domínios das duas funções:
Função $2 \log_2 x$: logaritmando deve ser positivo, $x > 0$.
Função $\log_2 x^2$: $x^2 > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^*$.
Na primeira função, não podemos calcular seu valor para x = –2, já na segunda é possível, pois $\log_2 (-2)^2 = \log_2 4 = 2$. Além de toda essa análise, $\log_2 x^2$ é uma função par, pois $\log_2 (-x)^2 = \log_2 x^2$. O gráfico da função ficará igual a:

! Atenção

$f(x) = \log_a x$, as condições de existência da função logarítmica são:

$$\begin{cases} x > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

- Quando resolver uma equação logarítmica, verifique se a solução satisfaz as condições de existência.
- Uma função é par se, e somente se, para qualquer *x* do domínio temos $f(x) = f(-x)$. O gráfico da função é simétrico em relação ao eixo *y*.

Cuidado! $\log_b a^\alpha \neq (\log_b a)^\alpha$

Para simplificar a notação, escrevemos $(\log_3 5)^2$ como $\log_3^2 5$

8 Obtenha o domínio da função: $f(x) = \log_3 (2x - 1)$.

Resolução:

$$\exists \log_3 (2x - 1) \Leftrightarrow 2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

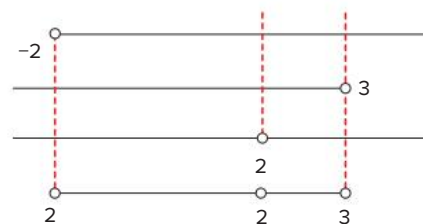
$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x > \frac{1}{2} \right\}$$

9 Obtenha o domínio da função: $f(x) = \log_{(3\ \ x)} (x + 2)$

Resolução:

$$\exists \log_{(3-x)} (x+2) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 > 0 \\ 3 \quad x > 0 \\ 3 - x \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{logo: } \begin{cases} x > -2 \\ x < 3 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

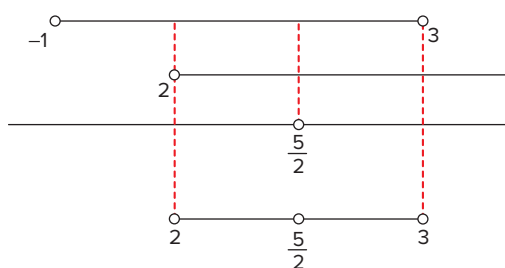
Fazendo a interseção desses conjuntos, temos:

$$D = \{x \in \mathbb{R} / \quad 2 < x < 3 \text{ e } x \neq 2\}$$

10 Obtenha o domínio da função: $f(x) = \log_{(2x\ \ 4)} (3 + 2x - x^2)$.

Resolução:

$$\exists \log_{(2x\ \ 4)} (3 + 2x - x^2) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3 + 2x - x^2 > 0 \\ 2x - 4 > 0 \\ 2x \quad \not{4} \quad 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x < 3 \\ x > 2 \\ x \neq \frac{5}{2} \end{cases}$$

Fazendo a interseção desses conjuntos, temos:

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, 2 < x < 3 \text{ e } x \neq \frac{5}{2}\right\}$$

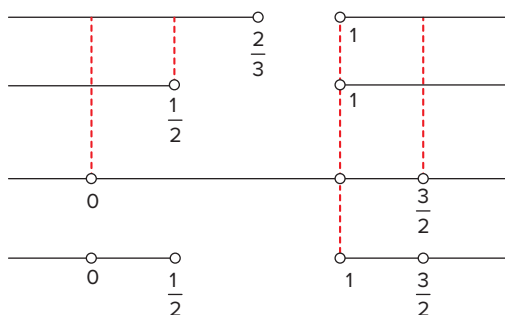
11 Obtenha o domínio da função:

$$f(x) = \log_{(2x^2 - 3x + 1)}(3x^2 - 5x + 2)$$

Resolução:

$$\exists \log_{(2x^2 - 3x + 1)}(3x^2 - 5x + 2) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 5x + 2 > 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 > 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \text{ ou } x < \frac{2}{3} \\ x > 1 \text{ ou } x < \frac{1}{2} \\ x \neq 0 \text{ e } x \neq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Fazendo a interseção desses conjuntos, temos:

$$D = \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, \frac{1}{2}\right[\cup \left]1, \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$$

Generalização do gráfico da função $f(x) = \log_c(ax + b)$

Observe os exemplos de construção dos seguintes gráficos:

Exemplo 6

- $f(x) = \log_2(3x - 5)$

a) Condição de existência: $3x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}$

> **! Atenção**
>
> Eventualmente se utiliza C.E. como abreviação de condição de existência.

b) Equação da assíntota: $3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$

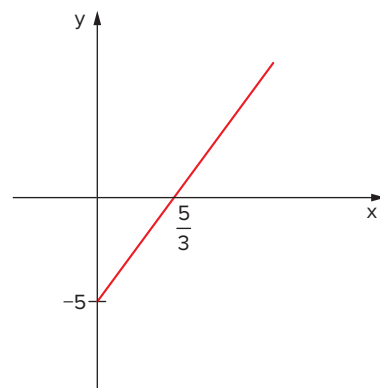
c) Raiz da função:

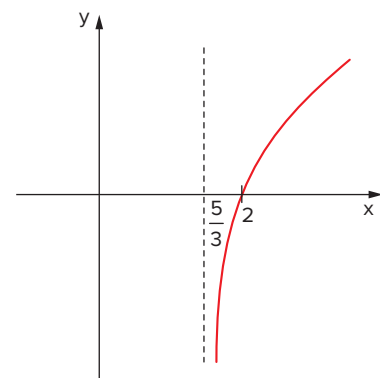
$$\log_2(3x - 5) = 0 \Leftrightarrow 3x - 5 = 2^0 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$$

A função "corta" o eixo *x* no ponto (2, 0).

d) Eixo *y*:

Pontos do eixo *y* possuem abscissa zero, como o domínio da função é $x > \frac{5}{3}$, não há cruzamento com o eixo *y*.

e) Gráfico do logaritmando:

A função y = 3x – 5 é crescente. Como a função logarítmica possui base 2, a função principal também é crescente.

f) Esboço do gráfico:

Exemplo 7

- $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(-2x + 3)$

a) Condição de existência: $-2x + 3 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$

b) Equação da assíntota: $-2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

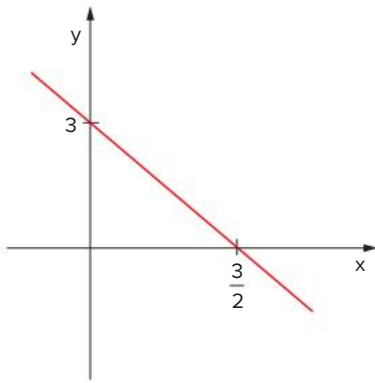
c) Raiz da função:

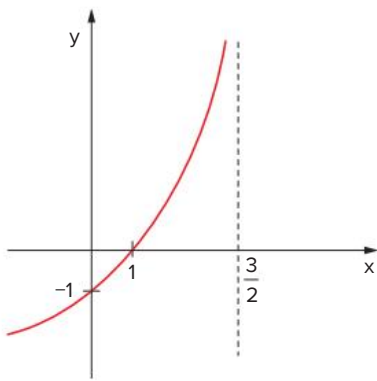
$$\log_{\frac{1}{3}}(-2x + 3) = 0 \Leftrightarrow -2x + 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^0 \Leftrightarrow -2x = -2 \Leftrightarrow x = 1$$

A função "corta" o eixo *x* no ponto (1, 0).

d) Eixo *y*:

Para x = 0, temos o ponto de cruzamento do gráfico no eixo das ordenadas (0, 3)

e) Gráfico do logaritmando:

A função y = 2x + 3 é decrescente e a função logarítmica tem base $\frac{1}{3}$, assim, a função principal é crescente

f) Esboço do gráfico:

Conclusões e observações

Podemos citar as partes principais da construção do gráfico $\log_c (ax + b)$:

I. Condição de existência: $ax + b > 0 \Leftrightarrow x > \frac{b}{a}$; $a \neq 0$

II. Equação da assíntota: $ax + b = 0 \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$

III. Raiz da equação:

$$\log_c(ax + b) = 0 \Leftrightarrow ax + b = c^0 \Leftrightarrow x = \frac{1 - b}{a}$$

IV. Eixo *y*: caso x = 0 e pertença ao domínio da função, o gráfico $\log_c (ax + b)$ "corta" o eixo *y* no ponto $(0, \log_c b)$.

V. Função do logaritmando: seja $f(x) = \log_c(ax + b)$ e $g(x) = ax + b$, temos, então, $f(x) = \log_c g(x)$. Para obter uma ideia do gráfico de f(x), analise:

1) g(x) crescente ($a > 0$ e $c > 1$) $\rightarrow$ f(x) é crescente

2) g(x) decrescente ($a < 0$ e $c > 1$) $\rightarrow$ f(x) é decrescente

3) g(x) crescente ($a > 0$ e $0 < c < 1$) $\rightarrow$ f(x) é decrescente

4) g(x) decrescente ($a < 0$ e $0 < c < 1$) $\rightarrow$ f(x) é crescente

Para melhor entendimento, observe a demonstração do item 4:

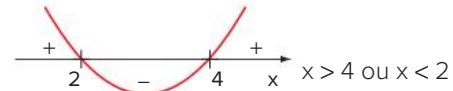
$\therefore \log_c(g(x))$ é crescente.

Generalização do gráfico da função $f(x) = \log_d(ax^2 + bx + c)$

Observe os exemplos de construção desses gráficos, seguindo as ideias obtidas na teoria do gráfico $f(x) = \log_c (ax + b)$

Exemplo 8

- $f(x) = \log_2(x^2 \quad 6x + 8)$

a) Condição de existência: $x^2 \quad 6x + 8 > 0$

b) Equações das assíntotas: $x^2 \quad 6x + 8 = 0 \rightarrow x = 2$ ou $x = 4$

c) Raízes da equação:

$\log_2(x^2 - 6x + 8) = 0 \therefore (x^2 - 6x + 8) = 2^0 \therefore x^2 - 6x + 7 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

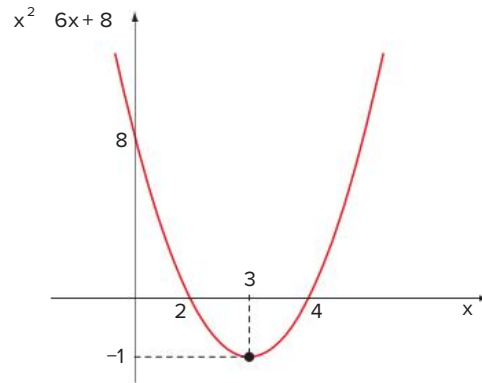
$$x_1 = 3 + \sqrt{2}$$

$$x_2 = 3 - \sqrt{2}$$

d) Eixo *y*:

Para $x = 0$, temos $y = \log_2(0^2 - 6 \cdot 0 + 8) = \log_2 8 = 3 \rightarrow (0, 3)$.

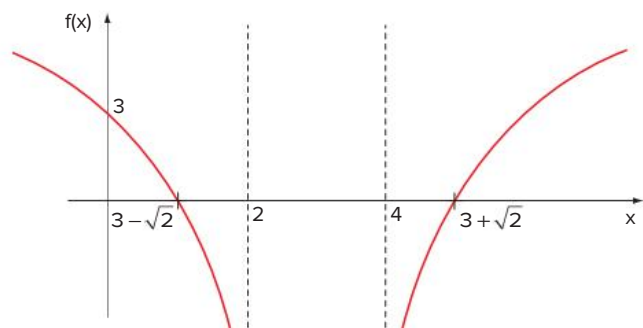
e) Função do logaritmando:

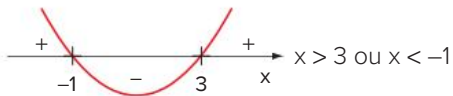
Analisando os intervalos em que $x^2 - 6x + 8$ é crescente ou decrescente e observando a base do logaritmo, no caso 2 > 1, podemos esboçar a função f(x).

$x = 3 \rightarrow y = -1$

$x > 3 \rightarrow$ crescente

$x < 3 \rightarrow$ decrescente

f) Esboço do gráfico:

Esse item é a junção dos demais itens, mas com um cuidado especial para o item e, pois ele indica se f(x) é crescente ou decrescente.

Exemplo 9

a) Condição de existência: $x^2 \quad 2x \quad 3 > 0$

b) Equações das assíntotas:

$$x^2 \quad 2x \quad 3 = 0 \rightarrow x = \quad 1 \text{ ou } x = 3$$

c) Raízes da equação:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x_1 = 1 + \sqrt{5} \text{ ou } x_2 = 1 \quad \sqrt{5}$$

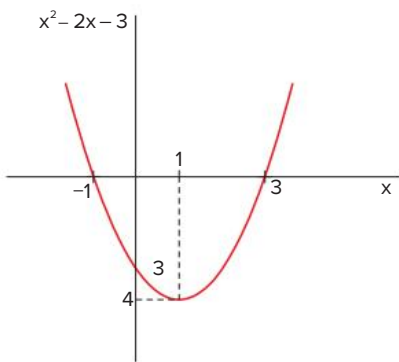
d) Eixo *y*:

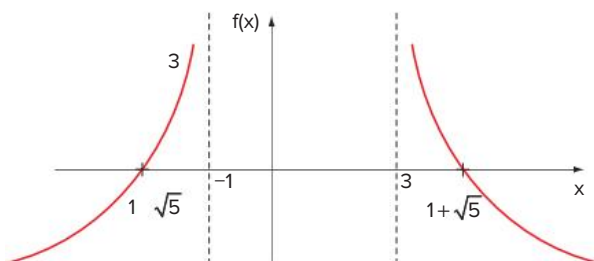
Para x = 0, temos:

$$y = \log_{\frac{1}{3}}(0^2 \quad 2 \;\; 0 \quad 3)$$

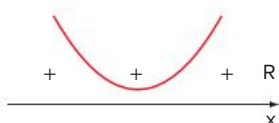
$$\log_{\frac{1}{3}}(-3) \;\rightarrow\; \text{não existe}$$

A função não corta o eixo *y*

e) Função do logaritmando:

$$x = 1 \rightarrow y = -4$$
$$x > 1 \rightarrow \text{crescente}$$
$$x < 1 \rightarrow \text{decrescente}$$

f) Esboço do gráfico:

Exemplo 10

• $f(x) = \log_2(x^2 + x + 5)$

a) Condição de existência: $x^2 + x + 5 > 0$

b) Equações das assíntotas:

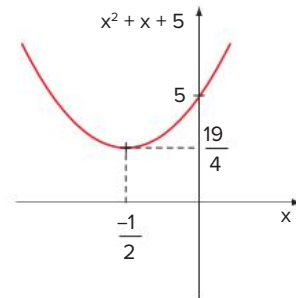
$$x^2 + x + 5 = 0 \rightarrow \nexists x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{não possui assíntotas}$$

c) Raízes da equação:

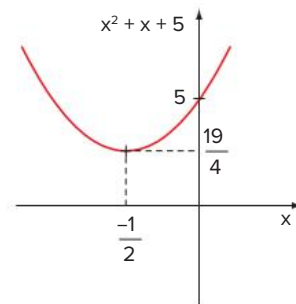
$$\log_2(x^2 + x + 5) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + x + 5 = 2^0 \Leftrightarrow x^2 + x + 4 = 0 \rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$$

d) Eixo *y*:

Para x = 0, temos: $y = \log_2(0^2 + 0 + 5) = \log_2 5$.
Assim, o cruzamento do gráfico no eixo y ocorre no ponto $(0, \log_2 5)$

e) Função do logaritmando:

Para $x = -\frac{1}{2}$, temos $x^2 + x + 5 = \frac{19}{4}$; na função logarítmica, temos $\log_2 \frac{19}{4}$, o ponto de mínimo da função é $\left(\quad \frac{1}{2}, \log_2 \frac{19}{4}\right)$

$$x > \quad \frac{1}{2} \rightarrow \quad \text{crescente e } x < -\frac{1}{2} \rightarrow \text{decrescente}$$

f) Esboço do gráfico:

Conclusões e observações

Podemos citar as partes principais da construção do gráfico $\log_d(ax^2 + bx + c)$:

I. A condição de existência: $ax^2 + bx + c > 0$

II. Equação da assíntota:

$$ax^2 + bx + c = 0 \begin{cases} \Delta > 0: \text{ 2 assíntotas} \\ \Delta = 0: \text{ 1 assíntota} \\ \Delta < 0: \text{ nenhuma assíntota} \end{cases}$$

III. Raiz da equação:

$$\log_d(ax^2 + bx + c) = 0 \Rightarrow$$
$$ax^2 + bx + c = = d^0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + (c - 1) = 0$$

IV. Eixo *y*: para x = 0, temos o ponto $(0, \log_d c)$.

V. Função do logaritmando: como o logaritmando é uma função do 2º grau, devemos analisar em torno da abscissa do vértice $\left(x_v = \frac{-b}{2a}\right)$ se a parábola está crescendo ou decrescendo para podermos esboçar o gráfico.

Equações logarítmicas

Quando iniciamos o capítulo, deparamo-nos com a seguinte equação de bases diferentes: $2^x = 5$. Com o conceito de logaritmo, podemos dar o valor de *x*, ou seja, $x = \log_2 5$. Veja outro exemplo:

$$5^{3x-1} = 4 \therefore \frac{5^{3x}}{5} = 4 \therefore 5^{3x} = 20$$
$$\Rightarrow (5^3)^x = 20 \therefore (125)^x = 20 \Rightarrow x = \log_{125} 20$$

As equações logarítmicas podem ser classificadas em vários tipos. Algumas delas serão exemplificadas a seguir mediante a resolução de exercícios.

Exercícios resolvidos

12 Qual o valor de *x* nas expressões:

a) $5^{\sqrt{x}} = 2$

Resolução:

$$\sqrt{x} = \log_5 2 \Leftrightarrow x = (\log_5 2)^2 \Leftrightarrow S = \left\{(\log_5 2)^2\right\}$$

b) $5^{x\ \ 1} = 3^{4\ \ 2x}$

Resolução:

$$\frac{5^x}{5} = \frac{3^4}{3^{2x}} \Leftrightarrow \frac{5^x}{5} = \frac{81}{(3^2)^x} \Leftrightarrow 5^x \cdot (9)^x = 5 \cdot 81 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (45)^x = 405 \Leftrightarrow x = \log_{45} 405 \Leftrightarrow S = \{\log_{45} 405\}$$

c) $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$

Resolução:

Fazendo $2x = y$, a equação reduz-se a uma função do 2º grau: $(2^x)^2 - 5 \cdot (2^x) + 6 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 5y + 6 = 0$ raízes 2 e 3. Assim, se $y = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$ e se $y = 3 \therefore 2x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$.

$$S = \{1, \log_2 3\}$$

d) $\log_x(2x + 3) = 2$

Resolução:

Nesse tipo de equação, basta aplicarmos a definição de logaritmo: $x^2 = 2x + 3 \therefore x^2\ \ 2x\ \ 3 = 0$.
Raízes: 3 e 1, mas cuidado!
Vamos verificar as condições de existência da função: $\log_x(2x + 3)$.

$$\exists \log_x(2x+3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Condição de existência: $x > 0$ e $x \neq 1$, logo 1 não convém.

$$S = \{3\}$$

e) $\log_4(3x + 2) = \log_4(2x + 5)$

Resolução:

Como a base dos logaritmos é a mesma, podemos fazer: $3x + 2 = 2x + 5 \Leftrightarrow x = 3$, que satisfaz a condição de existência.

No caso de equações logarítmicas, não é necessário encontrar a condição de existência propriamente dita, basta substituir a raiz 3 e perceber que não infringe as condições, como é o caso do exemplo! Assim: $S = \{3\}$.

f) $\log_4^2 x\ \ \ 2 \cdot \log_4 x\ \ \ 3 = 0$

Resolução:

Observe que fazendo a substituição $\log_4 x = y$, temos $y^2 - 2y - 3 = 0$ raízes: –1 e 3.
Assim: se $y = -1 \Rightarrow \log_4 x = -1 \therefore x = \frac{1}{4}$; se $y = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_4 x = 3 \therefore x = 4^3 = 64$.

$$S = \left\{\frac{1}{4}, 64\right\}$$

g) $\frac{1}{5\ \ \ \log x} + \frac{1}{1 + \log x} = 1$

Resolução:

Se fizermos $\log x = a$ $(x > 0)$, teremos a equação fracionária $\frac{1}{5\ \ a} + \frac{1}{1+a} = 1$ cuja condição de existência é $a \neq 5$ e $a \neq -1$.

$$\frac{1 + a + 5 - a}{(5\ \ a)\cdot(1\ \ a)} = \frac{(5 - a)\cdot(1 + a)}{(5\ \ a)\cdot(1\ \ a)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6 = 5 + 5a\ \ \ a\ \ \ a^2 \Leftrightarrow a^2\ \ \ 4a + 1 = 0$$
$$a = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2 + \sqrt{3}) \text{ ou } (2\ \ \ \sqrt{3})$$

Voltando à variável *x*, temos:

$$\text{Se } a = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow \log x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow x = 10^{2+\sqrt{3}}$$
$$\text{Se } a = 2 \Rightarrow \sqrt{3}\ \ \ \log x\ \ \ 2\ \ \ \sqrt{3}\ \ \ x\ \ \ 10^{2-\sqrt{3}}$$

Assim: $S = \left\{10^{2 \pm \sqrt{3}}\right\}$,

13 Determine a solução da equação logarítmica:

$$x \cdot (\log_5 3^x + \log_5 21) + \log_5\left(\frac{3}{7}\right) = 0$$

Resolução:

A aparência da questão pode assustar, mas vamos aplicar as propriedades para simplificá-la.

$$x \cdot [x \cdot \log_5 3 + \log_5 \cdot 3 \cdot 7] + x \cdot \log_5\left(\frac{3}{7}\right) = 0$$
$$(\log_5 3)x^2 + (\log_5 3 + \log_5 7)x + x(\log_5 3 - \log_5 7) = 0$$
$$(\log_5 3)x^2 + 2 \cdot (\log_5 3)x = 0.$$

Dividindo a equação por $\log_5 3$, temos: $x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x(x + 2) = 0$ raízes 0 e 2

$$S = \{\ \ 2, 0\}$$

Inequações logarítmicas

A técnica para resolver inequações é a mesma das equações. A única diferença é que temos de analisar a base, em virtude do problema de a função ser crescente ou decrescente, e também obter a condição de existência para a solução final.

Base > 1 - função estritamente crescente

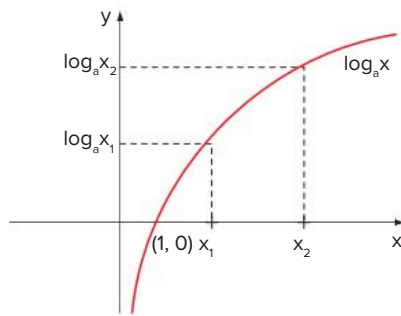



Fig. 4 Base > 1, função crescente.

Conclusão

Pelo gráfico, temos: $\log_a x_2 > \log_a x_1 \Leftrightarrow x_2 > x_1$

0 < Base < 1 - função estritamente decrescente

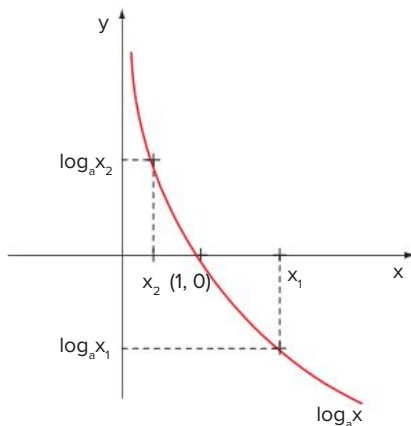



Fig 5 0 < Base < 1, função decrescente

Conclusão

Pelo gráfico, temos: $\log_a x_2 > \log_a x_1 \Leftrightarrow x_2 < x_1$.

Exercício resolvido

14 Encontre os valores possíveis de *x* para as expressões:

a) $3^x > 5$.

b) $3^{2-3x} < \frac{1}{4}$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 6$

d) $9^x \quad 5 \cdot 3^x + 6 > 0$

e) $\log_3(3x+1) < 2$

f) $\log_{0,2}(x^2+1) < \log_{0,2}(2x \quad 5)$

g) $\log_3(3x+4) \quad \log_3(2x \quad 1) > 1$

h) $\log_x(2x \quad 1) \leq 2$

Resoluções:

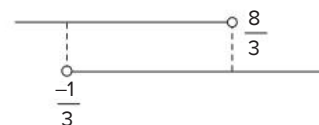
a) Lembre-se! Se $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, então $f(x) = g(x) > 0$
Não é possível reduzir à mesma base, vamos então recorrer aos logaritmos Escolhendo a base 3 (maior do que 1), não há inversão da desigualdade, portanto:
$3^x > 5 \Rightarrow \log_3 3^x > \log_3 5 \Leftrightarrow x \quad \log_3 3 > \log_3 5 \Leftrightarrow$
$x > \log_3 5 \Leftrightarrow S =]\log_3 5, +\infty[$

b) $\log_3 3^{2-3x} < \log^{\frac{1}{4}}_{3} \Leftrightarrow (2 \quad 3x) < \log_3 2^{-2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2 \quad 3x < \quad 2\log_3 2 \Leftrightarrow \quad 3x < \quad 2 \quad 2\log_3 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x > \frac{2}{3}(1+\log_3 2) \Rightarrow S = \left]\frac{2}{3}(1+\log_3 2), +\infty\right[$

c) Vamos escolher a base $\frac{1}{3}$ e, ao aplicá la, a desigualdade se inverterá:
$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \log_{\frac{1}{3}} 6 \Leftrightarrow x \geq \log_{3^{-1}} 6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \geq -\log_3 6 \Leftrightarrow S =]-\log_3 6, +\infty[$

d) Fazendo $3^x = a$, temos:
$(3^x)^2 - 5 \cdot (3^x) + 6 > 0 \Leftrightarrow a^2 - 5a + 6 > 0$, raízes: 2 e 3

$a > 3$ ou $a < 2$ Substituindo o valor de a, temos:
$3^x > 3$ ou $3^x < 2 \Rightarrow x > 1$ ou $x < \log_3 2$
$S =]1, +\infty[\cup]-\infty, \log_3 2[$

e) Como a base é maior do que 1, aplicamos a definição e mantemos o sentido da desigualdade:
$\log_3(3x+1) < 2 \Rightarrow 3x+1 < 3^2 \Leftrightarrow 3x < 8 \Leftrightarrow x < \frac{8}{3}$
Condição de existência: $3x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$
Fazendo a interseção, temos a solução final:

$S = \left]\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right[$

f) Invertendo a desigualdade para os logaritmandos, temos: $x^2+1 > 2x \quad 5 \Leftrightarrow x^2 \quad 2x+6 > 0$.
Mas $\Delta = (\quad 2)^2 \quad 4 \cdot 1 \cdot 6 = 4 \quad 24 < 0$, temos:

Não esquecendo as condições de existência:
$$\begin{cases} x^2 + 1 > 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ 2x \quad 5 > 0 \quad x > \frac{5}{2} \end{cases}$$

R

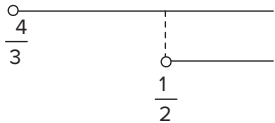
$\frac{5}{2}$

$S = \left]\frac{5}{2}, +\infty\right[$

FRENTE 1

g) Antes de aplicarmos alguma propriedade na inequação, vamos obter as condições de existência.

$$\begin{cases} 3x + 4 > 0 \\ 2x \quad 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{4}{3} \\ x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Fazendo a interseção, temos:

C.E. $x > \dfrac{1}{2}$

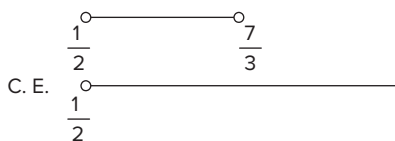
$$\log_3\left(\frac{3x+4}{2x-1}\right) > 1 \Rightarrow \frac{3x+4}{2x \quad 1} > 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+4}{2x \quad 1} - 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{3x+4-6x+3}{2x \quad 1} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3x+7}{2x \quad 1} > 0$$

Resolvendo a inequação quociente pelo varal, temos:

$$\frac{1}{2} < x < \frac{7}{3}$$

Fazendo a interseção com a C.E., temos:

$$S = \left]\frac{1}{2}, \frac{7}{3}\right[$$

h) Temos uma situação nova neste exemplo, pois não sabemos a natureza da base. Vamos obter as condições de existência:

$$\begin{cases} 2x \quad 1 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{C.E. } x > \frac{1}{2} \text{ e } x \neq 1$$

Temos duas análises a fazer:

1ª hipótese: $\dfrac{1}{2} < x < 1$ (função decrescente)

$$\log_x(2x-1) \le 2 \Rightarrow 2x - 1 \ge x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Não satisfaz a hipótese, portanto, para a primeira condição: $S_1 = \varnothing$.

2ª hipótese: $x > 1$ (função crescente)

$$\log_x(2x \quad 1) \le 2 \Rightarrow 2x \quad 1 \le x^2 \Leftrightarrow x^2 \quad 2x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \quad 1)^2 \ge 0 \ \forall x \in R$$

Fazendo a interseção com a hipótese, temos:

$$S_2 =]1, +\infty[$$
$$S_{final} = S_1 \cup S_2 =]1, +\infty[$$

Logaritmos decimais

Conceito

Vamos analisar a seguinte propriedade dos números reais positivos: qualquer que seja $x \in \mathbb{R}_+^*$, x está entre duas potências de 10 com expoentes inteiros e consecutivos. Observe os exemplos:

Exemplo 11

- $x = 3 \Rightarrow 10^0 < 3 < 10^1$
- $x = 57{,}2 \Rightarrow 10^1 < 57{,}2 < 10^2$
- $x = 0{,}12 \Rightarrow 10^{\ \ 1} < 0{,}12 < 10^0$
- $x = 893 \Rightarrow 10^2 < 893 < 10^3$

Característica e mantissa dos logaritmos decimais

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists C \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$10^C \le x < 10^{C+1} \Rightarrow \log 10^C \le \log x < \log 10^{C+1}$$

$C \le \log_x < C + 1$, com esse resultado, podemos afirmar que: $\log x = C + m$; $C \in Z$ e $0 \le m < 1$.

C: característica m: mantissa

Cálculo da característica (parte inteira de um número)

Existem duas regras para o cálculo da característica de um logaritmo decimal, observe:

Regra 1

Se $x > 1$, a característica de $\log x$ é igual ao número de algarismos de sua parte inteira, menos 1

Demonstração:

$x > 1$, e x possui n algarismos na sua parte inteira, então temos:

$$10^{n \ \ 1} \le x < 10^n \therefore \log 10^{n \ \ 1} \le \log x < \log 10^n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (n-1) \le \log x < n$$

Logo, a característica de $\log x$ é $n - 1$. (c.q.d.).

Exemplo 12

1. $\log 5{,}1 \Rightarrow C = 0$
2. $\log 115 \Rightarrow C = 2$
3. $\log 3\,492{,}6 \Rightarrow C = 3$

Regra 2

Se $0 < x < 1$, a característica de $\log x$ é o oposto da quantidade de zeros que precedem o primeiro algarismo significativo.

Demonstração:

$0 < x < 1$ e x possui n algarismos zeros precedendo o primeiro significativo, então: $10^{-n} \le x < 10^{\;n+1} \Leftrightarrow$

$$\log 10^{\;n} \le \log x < \log 10^{\;n+1} \Leftrightarrow -n \le \log x < -n+1$$

Logo, a característica de $\log x$ é $\;n$. (c.q.d.)

Exemplo 13

a) $\log 0{,}3 \Rightarrow C = \;1$

b) $\log 0{,}002 \Rightarrow C = -3$

c) $\log 0{,}0301 \Rightarrow C = \;2$

Propriedade da mantissa

A mantissa é um número irracional que será tabelado. É sempre compreendido entre 0 e 1, podendo ser igual a 0 mas não igual a 1. A palavra mantissa significa contrapeso. A sua propriedade fundamental é: a mantissa de $\log x$ não se altera se multiplicarmos x por 10^{α}; $\alpha \in \mathbb{Z}$

Isso, na prática, significa que se movimentarmos a vírgula (à esquerda ou à direita) do número x, a mantissa não se altera.

Demonstração:

Seja $x > 0$ e $\log x = C + m$. Fazendo $\log x \cdot 10^{\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{Z}$), temos:

$$\log x \;\; 10^{\alpha} = \log x + \log 10^{\alpha} = \log x + \alpha =$$
$$= (C + m) + \alpha = (C + \alpha) + m$$

Observe que $(C + \alpha)$ é a nova característica do número $\log x \;\; 10^{\alpha}$ e m continua sendo a mantissa (c q d)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

Tab. 1 Mantissa.

Exercícios resolvidos

15 Calcule

a) log32,4

Resolução:

A característica é 1 e a mantissa de 32,4 é a mesma de que 324. Pela tabela, temos 0,5105.
Assim, $\log 32{,}4 = 1 + 0{,}5105 = 1{,}5105$.

b) log0,0031

Resolução:

A característica é 3 e a mantissa de 0,0031 é a mesma de que 310. Pela tabela, temos 0,4914.
Assim, $\log 0{,}0031 = 3 + 0{,}4914$, que usualmente é chamada de forma mista ou preparada e serve para indicar explicitamente a característica e a mantissa. Se fizermos a conta $-3 + 0{,}4914$, temos $-2{,}5086$.

16 Calcule o valor aproximado de $\sqrt[5]{7}$

Resolução:

Fazendo $x = \sqrt[5]{7} \Rightarrow \log x = \log(7)^{1/5}$
$\log x = 0{,}16902$ é um número cuja característica é zero e a mantissa é 0,1690.
Se $C = 0 \rightarrow$ parte inteira 1 algarismo.
Se $m = 0{,}1690$, pela tabela é o nº 147.
Portanto $\sqrt[5]{7} \cong 1{,}47$.

17 Calcule o valor aproximado de $\sqrt[3]{(1{,}2)^6 \cdot (1{,}73)^4}$.

Resolução:

$$x = \sqrt[3]{(1{,}2)^6 \cdot (1{,}73)^4} \Rightarrow \log x = \frac{1}{3}[\log(1{,}2)^6 + \log(1{,}73)^4] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log x = \frac{1}{3}[6\log(1{,}2) + 4\log(1{,}73)]$$

Separadamente, temos:

$$\log 1{,}2 = 0 + 0{,}0792 = 0{,}0792$$
$$\log 1{,}73 = 0 + 0{,}2380 = 0{,}2380$$

Assim:

$$\log x = \frac{1}{3}[6(0{,}0792) + 4(0{,}2380)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log x = 0{,}4757 \begin{cases} C = 0 \\ m = 0{,}4757 \end{cases}$$

Para essa mantissa na tabela, temos aproximadamente o nº 299 Logo $x = 2{,}99$.

18 Quantos algarismos tem o número 3^{50}?

Resolução:

Fazendo $x = 3^{50} \Rightarrow \log x = \log 3^{50} \Rightarrow \log x = 50 \cdot \log 3 = 50 \cdot (0{,}4771) = 23{,}855 = 23 + 0{,}855$, temos que a característica vale 23, logo o número 3^{50} possui 24 algarismos.

Interpolação linear

Para o cálculo de um logaritmo que não consta na tabela fornecida, podemos utilizar um método chamado interpolação linear Esse processo consiste em supor que entre dois logaritmos conhecidos o gráfico de $y = \log x$ é uma reta Obviamente isso não é verdade, mas o erro obtido será bem menor que aproximarmos de imediato o resultado. Observe o gráfico $y = \log x$

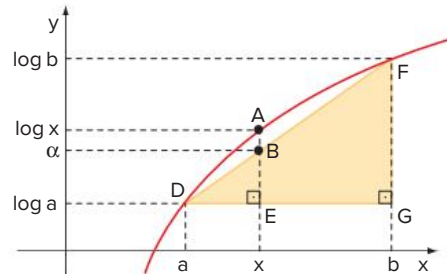



Fig. 6 Interpolação linear.

Na figura 6, podemos observar melhor a aproximação: A é o ponto exato e B, a aproximação. Pela semelhança dos triângulos retângulos BDE e FDG, temos:

$$\frac{\alpha - \log a}{\log b \quad \log a} = \frac{x - a}{b \quad a} \Rightarrow \alpha = \log a + (x - a) \cdot \frac{\log b - \log a}{b \quad a}$$

O número α é a aproximação de $\log x$, assim:

$$\log x \approx \log a + (x - a) \cdot \frac{\log b \quad \log a}{b - a}$$

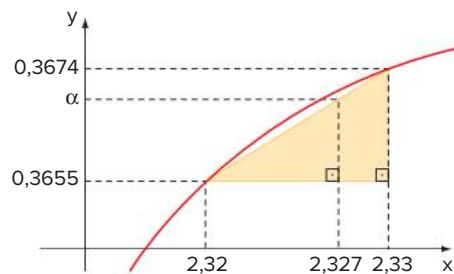
Observe o exercício resolvido a seguir.

Exercício resolvido

19 Calcule o valor aproximado de log 2,327.

Resolução:

Pela tabela 1, podemos calcular o log 2,32 e log 2,33, assim:

$$\log 2{,}32 = 0 + 0{,}3655 = 0{,}3655$$
$$\log 2{,}33 = 0 + 0{,}3674 = 0{,}3674$$

$$\frac{\alpha - 0{,}3655}{0{,}3674 - 0{,}3655} = \frac{2{,}327 - 2{,}32}{2{,}33 - 2{,}32} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 0{,}3655 + (0{,}3674 \quad 0{,}3655) \Rightarrow \frac{(0{,}007)}{0{,}01}$$

$\Rightarrow \alpha = 0{,}3668$, que é o valor aproximado de log 2,327.

Revisando

1 Calcule os seguintes logaritmos utilizando a definição.

a) $\log_9 3\sqrt{3}$

b) $9^{1 + \log_3 2}$

c) $\log_8(\log_2 16)$

d) $\log_4(\log_2(\log_3 81))$

2 Dado $\log_6 2 = a$, calcule $\log_{24} 72$ em função de a.

3 Dados $\log_{100} 3 = \alpha$ e $\log_{100} 3 = \beta$, calcule $\log_5 6$ em função de α e β.

4 Esboçar o gráfico da função $f: A \to \mathbb{R}$ e $f(x) = \log_2(5x + 2)$, determinando o domínio A.

5 Esboçar o gráfico da função $f: A \to \mathbb{R}$ e $f(x) = \log_2(-5x + 2)$, determinando o domínio A.

6 Resolva a equação:

$$\log(x - 1) + \log(x + 1) = 3 \log 2 + \log(x - 2)$$

7 Resolva as equações logarítmicas a seguir.

a) $\cdot \log(x \neq \quad 2) \quad \frac{1}{2} \log(3x \quad 6) \quad \log 2$

b) $\frac{1}{2} \cdot (\log x + \log 2) + \log\left(\sqrt{2x} + 1\right) = \log 6$

8 Resolva as inequações a seguir.

a) $\log x + \log(x + 1) < \log(5 - 6x) - \log 2$

b) $4 \quad 1 \geq \log x \quad 3\sqrt{\log x}$

FRENTE 1

Exercícios propostos

1 **UFRGS** Dada a expressão $S = \log 0{,}001 + \log 100$, o valor de S é:

A 3
B 2
C 1
D 0
E 1

2 **Fuvest** Sabendo-se que $5^n = 2$, podemos concluir que $\log_2 100$ é igual a:

A $\frac{2}{n}$
B $2n$
C $2 + n^2$
D $2 + 2$
E $\frac{(2 + 2n)}{n}$

3 **PUC-Campinas** Se $\left(2\sqrt{2}\right)^x = 64$, o valor do logaritmo a seguir é: $\log_{\frac{1}{8}} x$

A -1
B $\frac{-5}{6}$
C $\frac{-2}{3}$
D $\frac{5}{6}$
E $\frac{2}{3}$

4 **FEI** O valor numérico da expressão $1 - \frac{(\log 0{,}0001)^2}{4 + \log 10.000}$, onde log representa o logaritmo na base 10, é:

A 2
B 1
C 0
D -1
E 2

5 **PUC-Campinas** Sabe-se que $16^X = 9$ e $\log_3 2 = y$. Nessas condições, é verdade que:

A $x = 2y$
B $y = 2x$
C $xy = \frac{1}{2}$
D $x - y = 2$
E $x + y = 4$

6 **Unicamp** Calcule o valor da expressão a seguir, onde *n* é um número inteiro, $n \geq 2$. Ao fazer o cálculo, você verá que esse valor é um número que não depende de *n*.

$$\log_n\left(\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}\right)$$

7 **Mackenzie** Se $\log_y 5 = 2x$, $0 < y \neq 1$, então $\frac{\left(y^{3x} + y^{-3x}\right)}{\left(y^x + y^{-x}\right)}$ é igual a:

A $\frac{121}{25}$
B $\frac{21}{125}$
C $\frac{1}{25}$
D $\frac{21}{5}$
E $\frac{121}{5}$

8 **Uece 2019** Para cada número natural *n*, defina $x_n = \log(2^n)$ onde log(z) representa logaritmo de *z* na base 10. Assim, pode-se afirmar corretamente que $x_1 + x_2 + x_3 + . + x_8$ é igual a

A $6x_8$.
B $8x_4$.
C $8x_6$.
D $9x_4$.

9 **UFRGS 2020** Se $\log 2 = x$, $\log 3 = y$ então log 288 é

A $2x + 5y$.
B $5x + 2y$.
C $10xy$.
D $x^2 + y^2$.
E $x^2 - y^2$.

10 **EEAR 2019** Sejam *m*, *n* e *b* números reais positivos, com $b \neq 1$ Se $\log_b m = x$ e se $\log_b n = y$ então $\log_b(m \cdot n) + \log_b\left(\frac{n}{m}\right)$ é igual a

A x
B $2y$
C $x + y$
D $2x - y$

11 **UFRGS 2018** Se $\log_3 x + \log_9 x = 1$, então o valor de *x* é

A $\sqrt[3]{2}$.
B $\sqrt{2}$.
C $\sqrt[3]{3}$
D $\sqrt{3}$.
E $\sqrt[3]{9}$.

12 **Cesgranrio** Se $\log_{10} 123 = 2{,}09$, o valor de $\log_{10} 1{,}23$ é:

A 0,0209
B 0,09
C 0,209
D 1,09
E 1,209

13 **FEI** Considere $a > 1$ e a expressão adiante: $x = \log_{a^2} a + \log_a a^2$. Então o valor de *x* é:

A 2
B $\frac{3}{2}$
C $\frac{5}{2}$
D $\frac{2}{5}$
E 1

14 **UFRGS 2017** Se $\log_5 x = 2$ e $\log_{10} y = 4$, $\log_{20} \frac{y}{x}$ é

A 2.
B 4.
C 6.
D 8.
E 10.

15 **Fuvest** Se $\log_{10} 8 = a$, então $\log_{10} 5$ vale:

A a^3
B $5a - 1$
C $\frac{2a}{3}$
D $1 + \frac{a}{3}$
E $1 \;\frac{a}{3}$

16 **FMP 2019** Considere a função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_7(x)$

Quanto vale a razão $\frac{f(4)}{f(16)}$?

A $\log_7\left(\frac{1}{4}\right)$
B $\sqrt{7}$
C $\frac{1}{4}$
D $\sqrt[4]{7}$
E $\frac{1}{2}$

17 **UEL** Se $\log_3 7 = a$ e $\log_5 3 = b$, então $\log_5 7$ é igual a:

A $a + b$
B $a \quad b$
C $\frac{a}{b}$
D $a \cdot b$
E a^b

18 **ESPM 2019** Se $x \neq y$ são reais não negativos e $\log(x^2 + y^2) = 2 \cdot \log(x + y)$ o valor de $x^y + y^x$ é igual a:

A 2
B 1
C 4
D 0
E 3

19 **Fatec** Se $\log 2 = 0{,}3$, então o valor do quociente $\frac{\log_5 32}{\log_4 5}$ é igual a:

A $\frac{30}{7}$
B $\frac{7}{30}$
C $\frac{49}{90}$
D $\frac{90}{49}$
E $\frac{9}{49}$

20 **Unaerp** Se $\log_2 b - \log_2 a = 5$, o quociente $\frac{b}{a}$, vale:

A 10
B 32
C 25
D 64
E 128

21 **UFSC** Se os números reais positivos *a* e *b* são tais que $\begin{cases} a \;{=}b \quad 48 \\ \log_2 a - \log_2 b = 2 \end{cases}$, calcule o valor de $a + b$.

22 **UFMG** Seja $y = 4^{\log_2 7} + \log_2(8^7)$. Nesse caso, o valor de *y* é:

A 35
B 56
C 49
D 70
E 90

23 **UFC** Sendo *a* e *b* números reais positivos tais que: $\log_{\sqrt{3}} a = 224$ e $\log_{\sqrt{3}} b = 218$. Calcule o valor de $\frac{a}{b}$

24 **Vunesp** Sejam *x* e *y* números reais positivos.

Se $\log(xy) = 14$ e $\log\left(\frac{x^2}{y}\right) = 10$, em que os logaritmos são considerados numa mesma base, calcule, ainda nessa base:

a) $\log x$ e $\log y$

b) $\log\left(\sqrt{xy}\right)$

25 **ITA 2020** Sejam x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 e x_6 números reais tais que $2^{x_1} = 4$, $3^{x_2} = 5$, $4^{x_3} = 6$, $5^{x_4} = 7$, $6^{x_5} = 8$, $7^{x_6} = 9$. Então, o produto $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6$ igual a

A 6.
B 8.
C 10.
D 12.
E 14.

26 **UFV** Sabendo-se que $\log_x 5 + \log_y 4 = 1$ e $\log_x y = 2$, o valor de $x + y$ é:

A 120
B 119
C 100
D 110
E 115

27 **FEI** Se $A = \log_2 x$ e $B = \log_2 \frac{x}{2}$ então $A - B$ é igual a:

A 1
B 2
C -1
D -2
E 0

28 **Mackenzie** O valor de $\log_x (\log_3 2 \cdot \log_4 3)$, sendo $x = \sqrt{2}$, é:

A 2
B $\frac{1}{2}$
C $\frac{-1}{2}$
D -2
E $\frac{3}{2}$

29 **Mackenzie** Se *a* e *b* são os ângulos agudos de um triângulo retângulo, então $\log_2(\text{tg}\, a) + \log_2(\text{tg}\, b)$ vale:

A 0
B 1
C $\text{tg}\, a$
D $\text{sen}\, a$
E $\cos a$

30 **Mackenzie** Considere a função $f(x) = x^{\frac{2}{\log x}}$, onde $0 < x \neq 1$, então $\log\left[f\left(\sqrt{3}\right)\right]$ é igual a:

A 3
B 2
C 100
D $\sqrt{3}$
E $10\sqrt{3}$

31 **Mackenzie** Se $\log_i 6 = m$ e $\log_i 3 = p$, $0 < i \neq 1$, então o logaritmo de $\frac{i}{2}$ na base *i* é igual a:

A $6m \quad 3p$
B $m \quad p \quad 3$
C $p \quad m + 1$
D $m \quad p + 1$
E $p \quad m + 6$

32 **FGV-SP 2018** O valor do número real *b* para o qual a igualdade $\frac{11}{\log_2 x} + \frac{1}{2\log_{25} x} = \frac{3}{\log_8 x} \quad \frac{1}{\log_b x}$ é verdadeira para todo $x > 0$ e $x \neq 1$ é

A 20.
B 50.
C 100
D 250.
E 400.

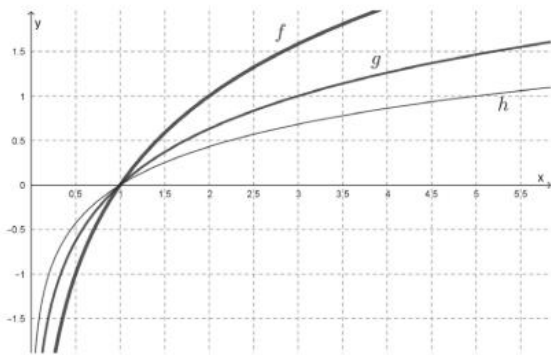
33 **UFRGS 2019** O valor de $E = \log\left(\frac{1}{2}\right) + \log\left(\frac{2}{3}\right) + \ldots + \log\left(\frac{999}{1000}\right)$ é

A -3.
B -2.
C -1.
D 0.
E 1.

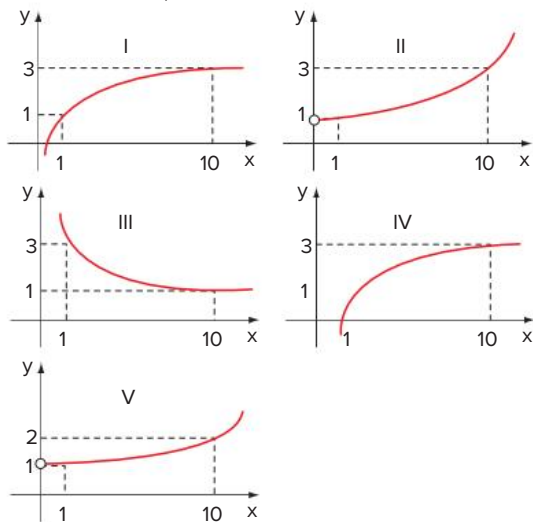
34 **Unirio** Na solução do sistema a seguir, o valor de *x* é:

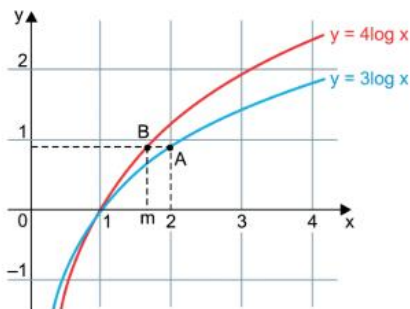
$$\begin{cases} \log(x+1) - \log y = 3 \cdot \log 2 \\ x \;{=}4y \quad 7 \end{cases}$$

A 15
B 13
C 8
D 5
E 2

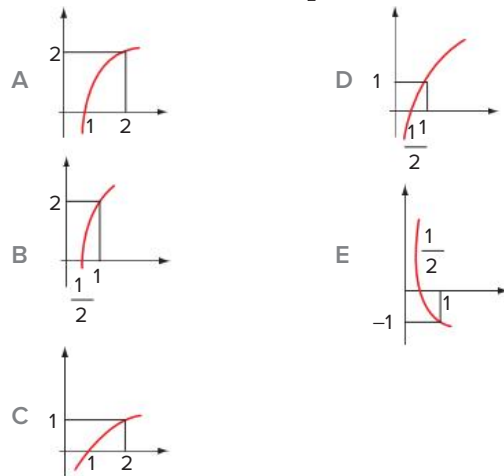
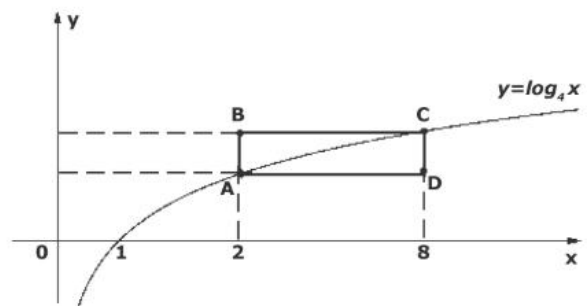
35 **UFJF 2019** No plano cartesiano abaixo estão representados os gráficos das funções *f*, *g* e *h*, todas definidas no conjunto dos números reais positivos por $f(x) = \log_a x$, $g(x) = \log_b x$ e $h(x) = \log_c x$.

O valor de $\log_{10}(abc)$.

A 1
B 3
C $\log_{10} 3$
D $1 + \log_{10} 3$
E $\log_{10} 2 \cdot \log_{10} 3 \cdot \log_{10} 5$

36 **UFRGS** A expressão gráfica da função $y = \log(10x^2)$, $x > 0$, é dada por:

A I B II C III D IV E V

37 **Famerp 2019** A figura indica os gráficos das funções *f* e *g*, definidas de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ cujas leis são, respectivamente, $f(x) = 4\log x$ e $g(x) = 3\log x$.

O valor de m, indicado na figura, é igual a

A log 12
B $2^{0,75}$
C log 7
D $2^{0,25}$
E $2^{1,25}$

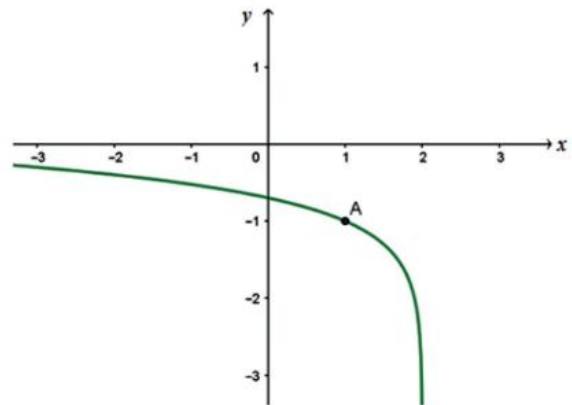
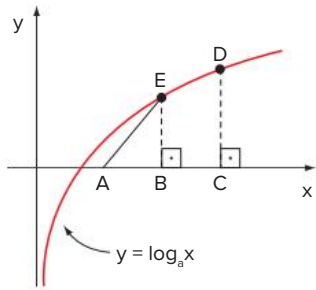
38 **Fuvest** Qual das figuras a seguir é um esboço do gráfico da função $f(x) = \log_2 2x$?

A
D
B
E
C
39 **EsPCEx 2018** A curva do gráfico abaixo representa a função $y = \log_4 x$.

Desenho Ilustrativo Fora de Escala

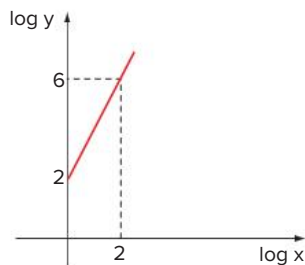
A área do retângulo ABCD é

A 12.
B 6.
C 3.
D $6\log_4 \frac{3}{2}$.
E $\log_4 6$.

40 **UPF 2018** Na figura, está representada parte do gráfico da função *f* definida por $f(x) = \log(ax + 2)$ 1 com $a \neq 0$ e o ponto $A(1, -1)$ pertencente ao gráfico da função *f*.

O valor de *a* é:

A 1
B 2
C 1
D 2
E 8

41 Os pontos D e E pertencem ao gráfico da função $y = \log_a x$, com $a > 1$ (figura a seguir). Suponha que B(x, 0), C(x + 1, 0) e A(x – 1, 0). Então, o valor de *x* para o qual a área do trapézio BCDE é o triplo da área do ΔABE é:

A $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
B $1+\frac{\sqrt{5}}{2}$
C $\frac{1}{2}+\sqrt{5}$
D $1+\sqrt{5}$
E $\frac{1}{2}\quad\sqrt{5}$

42 **UFRJ** Sejam *x* e *y* duas quantidades. O gráfico a seguir expressa a variação de log *y* em função de log *x*, onde log é o logaritmo na base decimal.

Determine uma relação entre *x* e *y* que não envolva a função logaritmo.

43 **EsPCEx 2018** Resolvendo a equação $\log_3(x^2 \quad 2x \quad 3) + \log_{\frac{1}{3}}(x-1) = \log_3(x+1)$ obtém-se:

A S = { 1}
B S = {4, 5}
C S = {6}
D S = ∅
E S = {4}

44 **PUC-Campinas** O mais amplo domínio real da função dada por $f(x) = \log_{x \quad 2}(8 - 2^x)$ é o intervalo:

A]2, 3[
B]3, + ∞[
C]2, + ∞[
D]– ∞, 3[
E] ∞, 2[

45 **FGV-SP** O mais amplo domínio real da função dada por $f(x) = \sqrt{\log_3(2x-1)}$ é:

A $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{2}\right\}$
B $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$
C $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 1\right\}$
D $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2}\right\}$
E $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

46 **UEG 2019** Sendo $f(x) = \log_{x-1} x^2 + 1$ então

A $x < \quad 1$ e $x \neq 2$
B $x < 1$
C $-1 \leq x < 1$
D $x > 1$
E $x > 1$ e $x \neq 2$

47 **UFPR 2018** Faça o que se pede.

a) Calcule $\log_{16}\left(\frac{1}{8}\right)$. Forneça sua resposta com duas casas decimais.
b) Resolva a inequação $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3) \geq 1$. Expresse sua resposta na forma de intervalo.

48 **Fuvest** O número real *x* que satisfaz a equação $\log_2(12 - 2^x) = 2x$ é:

A $\log_2 5$
B $\log_2 \sqrt{3}$
C 2
D $\log_2 \sqrt{5}$
E $\log_2 3$

49 **UEL** Os números reais que satisfazem à equação $\log_2(x^2 - 7x) = 3$ pertencem ao intervalo:

A]0, + ∞[
B [0, 7]
C]7, 8]
D [1, 8]
E [–1, 0]

50 **Fatec** Supondo-se que $\log_{10} 2 = 0{,}30$, a solução da equação $10^{2x-3} = 25$, universo $U = \mathbb{R}$, é igual a:

A 2
B 2,1
C 2,2
D 2,35
E 2,47

51 **UEL** Se $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x + \log_{16} x = -6{,}25$, então *x* é igual a:

A 8
B 6
C $\frac{1}{4}$
D $\frac{1}{6}$
E $\frac{1}{8}$

52 **UEL** A equação $2 - \log x = \log(3x - 5)$:

A admite uma única solução real.
B admite duas soluções reais positivas.
C não admite soluções reais positivas.
D admite duas soluções reais de sinais contrários
E não admite soluções reais.

53 **Uece 2018** Se *x* é o logaritmo de 16 na base 2, então, o logaritmo (na base 2) de $x^2 \quad 5x + 5$ igual a

A 2.
B 1.
C –1.
D 0.

54 **UFV** Resolva a equação: $\frac{100^{\log x} \quad 1}{10^{\log x}} = \frac{3}{2}$

55 **Fuvest** O número $x > 1$ tal que $\log_x 2 = \log_4 x$ é:

A $\frac{\sqrt{2}}{4}$
B $2^{\sqrt{2}}$
C $\sqrt{2}$
D $2\sqrt{2}$
E $4^{\sqrt{2}}$

56 **Fuvest** O conjunto das raízes da equação $\log_{10}(x^2) = (\log_{10}x)^2$ é:

A $\{1\}$
B $\{1, 100\}$
C $\{10, 100\}$
D $\{1, 10\}$
E $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0\}$

57 O sistema $\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} < 2^x < 2 \\ 0 < \log(x+2) < 1 \end{cases}$ se verifica, para todo x pertencente a:

A $\left]\frac{1}{2}, 0\right[$
B $\left]\frac{-1}{2}, 1\right[$
C $]-1, 1[$
D $]-2, 0[$
E $]-2, 2[$

58 Seja $f(x) = \log_3(3x + 4) - \log_3(2x - 1)$. Os valores de x, para os quais f está definida e satisfaz $f(x) > 1$, são:

A $x < \frac{7}{3}$
B $x > \frac{1}{2}$
C $\frac{1}{2} < x < \frac{7}{3}$
D $x > -\frac{4}{3}$
E $\frac{4}{3} < x < \frac{1}{2}$

59 Se $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > 2$ e $\log_2(x - 2) - \log_4 x = 1$, determine o valor de x.

60 O conjunto dos números reais x que satisfazem a inequação $\log_2(2x + 5) - \log_2(3x \quad 1) > 1$ é o intervalo:

A $\left]-\infty; -\frac{5}{2}\right[$
B $\left]\frac{7}{4}; +\infty\right[$
C $\left]-\frac{5}{2}; 0\right[$
D $\left]\frac{1}{3}; \frac{7}{4}\right[$
E $\left]0; \frac{1}{3}\right[$

61 **PUC Rio** Resolva as inequações logarítmicas a seguir:

a) $5^x > 3^x + 3^{x+1}$
b) $2 \cdot 9^x + 3^{x+2} + 4 > 0$
c) $\log_2(2x^2 - 5) \leq \log_2 3$
d) $2 < \log_2(3x + 1) < 4$
e) $\frac{1}{\log_2 x} \quad \frac{1}{\log_2 x \quad 1} < 1$

62 O conjunto de todos os x para os quais $x \cdot \log_{\frac{1}{2}}(x \quad 1) < 0$ é:

A $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$
B $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$
C $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
D $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 2\right\}$
E $\varnothing$

63 A solução da inequação $\log x \quad \text{colog}(x + 1) > \log 12$ é:

A $x > 3$
B $x > 0$
C $x > \quad 1$
D $x > 3$ ou $x > \quad 4$
E $\varnothing$

64 **PUC-SP** Dados $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$, um número real x é solução da inequação $16^{10x^2} < 12$ se, somente se:

A $x > -3$ e $x \neq 0{,}3$
B $x < -0{,}3$ ou $x > 0{,}3$
C $x < -3$ ou $x > 3$
D $-3 < x < 3$
E $-0{,}3 < x < 0{,}3$

Textos complementares

Relacionando logaritmos e sequências

Observe a seguinte tabela:

q^{-n}		q^{-2}	q^{-1}	1	q	q^2		q^n
$-nr$		$-2r$	$-r$	0	r	$2r$		nr

Na primeira linha, temos uma progressão geométrica de razão $q > 0$ e $q \neq 1$.

Na segunda linha, temos uma progressão aritmética de razão r; $r \in \mathbb{Q}^*$.

Por definição, cada termo da progressão aritmética (PA) é o *logaritmo* do termo correspondente da progressão geométrica (PG), assim $0 = \log_x 1$, $r = \log_x q$ e $nr = \log_x q^n$ e a base desse *sistema de logaritmos* é x Calculando x, temos: $nr = n \log_x q \therefore r = \log_x q \therefore x^r = q \therefore x = q^{\frac{1}{r}}$

Exemplo:

$$\begin{cases} \ldots; \frac{1}{25}; \frac{1}{5}; 1; 5; 25; \ldots \\ \ldots; \quad 2; \quad 1; 0; 1; 2; \ldots \end{cases} \text{ base } 5$$

Exercício resolvido

1 Determinar o logaritmo de $3125\sqrt{5}$ no sistema de logaritmo definido pelas progressões:

$$\begin{cases} \ldots,\ 1;\ \sqrt{5};\ 5;\ \ldots \\ \ ,\ 0;\ 2;\ 4; \end{cases}$$

Resolução:

Vamos determinar a base desse sistema de logaritmos:

PA possui razão 2 e a PG razão $\sqrt{5}$.

Os termos da PA são os logaritmos dos termos da PG na base que iremos determinar

$$2 = \log_b \sqrt{5} \Rightarrow b^2 = \sqrt{5} \Rightarrow b = \sqrt[4]{5}$$

Assim:

$$\log_{\sqrt[4]{5}} 3125\sqrt{5} = \log_{5^{\frac{1}{4}}} 5^5 \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 4 \cdot \log_5 5^{\frac{11}{2}} = 4 \cdot \frac{11}{2} \cdot \log 5^5 = 22$$

Um pouco da história dos logaritmos

Os logaritmos foram criados para facilitar cálculos aritméticos laboriosos Mesmo com o advento da calculadora eletrônica, a sua importância não diminuiu.

No século XVI, com o desenvolvimento da astrononima e da navegação, a importância de realizar cálculos aritiméticos aumentou. Para resolver esse problema, dois personagens, de maneiras independentes, criaram teorias resultantes. Jost Bürgi (1552 1632), relojoeiro suíço, e John Napier (1550-1617), um nobre escocês, publicaram suas teorias em 1620 e 1614, respectivamente

O trabalho de mais destaque foi o de Napier, que o batizou de maneira pouco modesta de *Mirifi logarithmorum canomis descriptio* ou Descrição da maravilhosa lei dos logaritmos.

Atualmente, muitos fenômenos da natureza podem ser explicados por meio dos logarítimos Como exemplo disso, leia atentamente o texto a seguir.

Escala de Richter

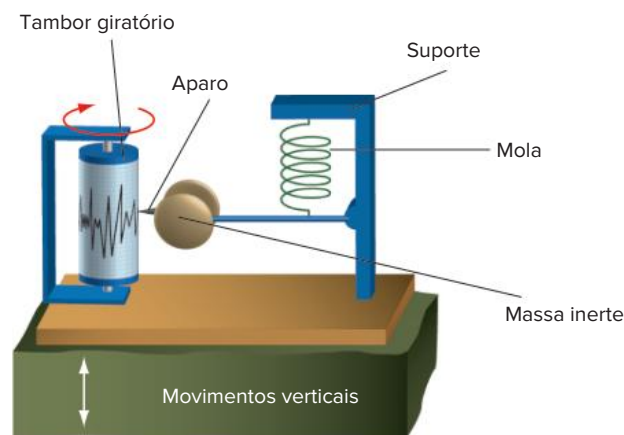
A escala de Richter quantifica a magnitude sísmica de um terremoto.

Essa escala foi desenvolvida em 1935 pelos sismólogos Charles Francis Richter e Beno Gutemberg, ambos pesquisadores do California Institute of Technology (Caltetch), que estudavam os tremores de terra do sul da Califórnia (EUA).

O princípio da escala tem como resultado a fórmula: $M = \log A - \log A_0$, sendo M: a magnitude do terremoto, A: a amplitude máxima medida pelo sismógrafo e A_0: a amplitude de referência.

Observe que matematicamente um sismo de grau 6 tem uma amplitude dez vezes maior que um de grau 5 e libera cerca de 31 vezes mais energia

Para calcular a energia liberada por um terremoto, utilizamos a seguinte fórmula:

$$M = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{10 \cdot E}{E_0}\right)$$, M: magnitude do terremoto, E: energia liberada e E_0: energia de referência

Exemplo básico do funcionamento de um sismógrafo

FRENTE 1

Descrição	Magnitude	Efeitos	Frequência (média)
Micro	< 2,0	Microtremor de terra, não se sente.	8 000 por dia
Muito pequeno	2,0 - 2,9	Geralmente não se sente, mas é detectado e registrado.	1 000 por dia
Pequeno	3,0 - 3,9	Frequentemente sentido, mas raramente causa danos.	49 000 por ano
Ligeiro	4,0 - 4,9	Tremor notório de objetos no interior de habitações, ruídos de choque entre objetos. Danos importantes pouco comuns.	6 200 por ano
Moderado	5,0 - 5,9	Pode causar danos maiores em edifícios mal concebidos em zonas restritas. Provoca danos ligeiros nos edifícios bem construídos	800 por ano
Forte	6,0 - 6,9	Pode ser destruidor em zonas num raio de até 180 km em áreas habitadas.	120 por ano
Grande	7,0 - 7,9	Pode provocar danos graves em zonas mais vastas	18 por ano
Importante	8,0 - 8,9	Pode causar danos sérios em zonas num raio de centenas de quilômetros.	1 por ano
Excepcional	9,0 - 9,9	Devasta zonas num raio de milhares de quilômetros.	1 a cada 20 anos
Extremo	10,0	Nunca registrado.	Desconhecido

Tabela de classificação dos sismos.

O terremoto mais intenso já registrado atingiu 9,5 graus e ocorreu em 22 de maio de 1960 no sul do Chile Nessa tragédia, 3 000 pessoas faleceram e mais de 2 milhões ficaram feridas. O Chile é suscetível a grandes terremotos porque está cortado pela divisão de duas placas tectônicas, a placa Nazca e a placa Sul-americana.

Resumindo

A função logarítmica é dada por f: $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ e $f(x) = \log_a x$ com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Podemos escrever $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$ por definição.

As principais propriedades operatórias dos logarítimos decorrentes da sua definição são:

a) $a^{\log_a^b} = b$

b) $\log b_a + \log c_a = \log_a(bc)$

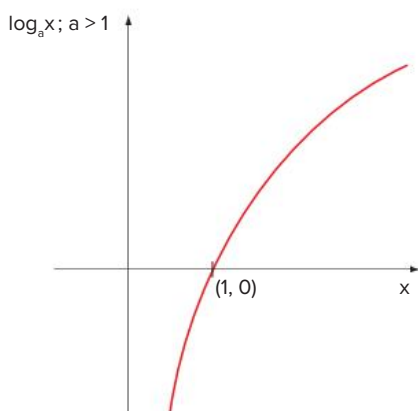
c) $\log b_a \;\; \neq\!\mathrm{ogc}_a \;\; \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$

d) $\log_c b^a = a \log_c b$

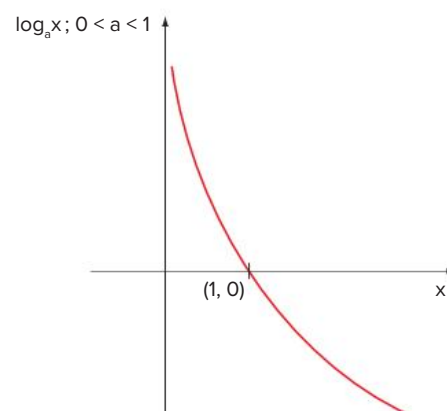
e) $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \cdot \log_a b$

f) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

A função logarítmica $f(x) = \log x$ é injetora e monotômica

Observe os dois casos básicos:

Estritamente crescente

Estritamente decrescente

Quer saber mais?

Site

- Funções logarítmicas – logaritmo natural
  Disponível em: <http://ecalculo if.usp br/funcoes/logaritmica/flogaritmica htm>

Exercícios complementares

1 IME Considerando log2 = a e log3 = b, encontre, em função de *a* e *b*, o logaritmo do número $\sqrt[5]{(11,25)}$ no sistema de base 15.

2 Fuvest Considere as equações:

I. $\log(x + y) = \log x + \log y$
II. $x + y = xy$

a) As equações I e II têm as mesmas soluções? Justifique.
b) Esboce o gráfico da curva formada pela solução de I.

3 Enem PPL 2019 Um jardineiro cultiva plantas ornamentais e as coloca à venda quando estas atingem 30 centímetros de altura. Esse jardineiro estudou o crescimento de suas plantas, em função do tempo, e deduziu uma fórmula que calcula a altura em função do tempo, a partir do momento em que a planta brota do solo até o momento em que ela atinge sua altura máxima de 40 centímetros. A fórmula é $h = 5 \cdot \log_2(t + 1)$ em que *t* é o tempo contado em dias e *h*, a altura da planta em centímetros.

A partir do momento em que uma dessas plantas é colocada à venda, em quanto tempo, em dias, ela alcançará sua altura máxima?

A 63
B 96
C 128
D 192
E 255

4 Enem 2019 Charles Richter e Beno Gutenberg desenvolveram a escala Richter, que mede a magnitude de um terremoto. Essa escala pode variar de 0 a 10, com possibilidades de valores maiores. O quadro mostra a escala de magnitude local (M_s) de um terremoto que é utilizada para descrevê-lo.

Descrição	Magnitude local (M_s) (μm · Hz)
Pequeno	$0 \leq M_s \leq 3,9$
Ligeiro	$4,0 \leq M_s \leq 4,9$
Moderado	$5,0 \leq M_s \leq 5,9$
Grande	$6,0 \leq M_s \leq 9,9$
Extremo	$M_s \geq 10,0$

Para se calcular a magnitude local, usa-se a fórmula $M_s = 3,30 + \log(A \cdot f)$, em que A representa a amplitude máxima da onda registrada por um sismógrafo em micrômetro (μm) e *f* representa a frequência da onda, em hertz (Hz). Ocorreu um terremoto com amplitude máxima de 2 000 μm e frequência de 0,2 Hz

Disponível em: http://cejarj.cecierj.edu.br. Acesso em: 1 fev. 2015 (adaptado).

Utilize 0,3 como aproximação para log 2

De acordo com os dados fornecidos, o terremoto ocorrido pode ser descrito como

A Pequeno.
B Ligeiro.
C Moderado.
D Grande.
E Extremo

5 Mackenzie Se $x^2 + 8x + 8 \log_2 k$ é um trinômio quadrado perfeito, então k! vale:

A 6
B 24
C 120
D 720
E 2

6 Mackenzie Se $x^2 + 4x + 2 \log_7 k^2$ é um trinômio quadrado perfeito, então o logaritmo de *k* na base 7k vale:

A $\frac{1}{2}$
B 2
C –2
D $\frac{1}{2}$
E $\frac{1}{7}$

7 ITA 2018 Encontre o conjunto solução $S \subset \mathbb{R}$ da inequação exponencial: $3^{x-2} + \sum_{k=1}^{4} 3^{x+k} \leq \frac{1081}{18}$.

8 UEPG PSS 1 2018 Considerando as funções definidas por $f(x) = 2^{x+1}$ e $g(x) = \log_2(x^2 \quad 1)$, assinale o que for correto.

01 $f(g(x)) = 2(x^2 - 1)$.
02 Se g(x) = 2, então *x* é um número irracional.
04 Se f(x) = 512, então *x* é ímpar.
08 O domínio da função g(x) é o intervalo [–1, 1].

Soma:

FRENTE 1

9 **Unesp 2019** Um banco estabelece os preços dos seguros de vida de seus clientes com base no índice de risco do evento assegurado. A tabela mostra o cálculo do índice de risco de cinco eventos diferentes.

Evento (E)	Risco de morte (1 em n mortes)	logn	Índice de risco de E (10 – log n)
Atingido por relâmpago	1 em 2000000	6,3	3,7
Afogamento	1 em 30000	4,5	5,5
Homicídio	1 em 15000	4,2	5,8
Acidente de motocicleta	1 em 8000	3,9	6,1
Doenças provocadas pelo cigarro	1 em 800	2,9	7,1

Sabe-se que, nesse banco, o índice de risco de morte pela prática do evento *BASE jumping* é igual a 8.
O risco de morte para praticantes desse esporte, segundo a avaliação do banco, é de

A 2,5%.
B 2%.
C 1%.
D 1,5%.
E 0,5%.

10 **Unifesp 2019** Em um jogo disputado em várias rodadas consecutivas, um jogador ganhou metade do dinheiro que tinha a cada rodada ímpar e perdeu metade do dinheiro que tinha a cada rodada par.

a) Sabendo que o jogador saiu do jogo ao término da 4ª rodada com R$ 202,50, calcule com quanto dinheiro ele entrou na 1ª rodada do jogo.

b) Suponha que o jogador tenha entrado na 1ª rodada do jogo com R$ 1000,00, terminando, portanto, essa rodada com R$ 1500,00, e que tenha saído do jogo ao término da 20ª rodada. Utilizando log 2 = 0,301, log 3 = 0,477 e os dados da tabela, calcule com quanto dinheiro, aproximadamente, ele saiu do jogo.

x	Valor aproximado de 10^x
1,5	32
1,55	35
1,6	40
1,65	45
1,7	50
1,75	56
1,8	63
1,85	71

11 **Enem 2019** A *Hydrangea macrophylla* é uma planta com flor azul ou cor-de-rosa, dependendo do pH do solo no qual está plantada. Em solo ácido (ou seja, com pH < 7) a flor é azul, enquanto que em solo alcalino (ou seja, com pH > 7) a flor é rosa Considere que a *Hydrangea* cor-de-rosa mais valorizada comercialmen te numa determinada região seja aquela produzida em solo com pH inferior a 8. Sabe-se que pH = $\log_{10}x$, em que *x* é a concentração de íon hidrogênio (H^+).
Para produzir a *Hydrangea* cor-de-rosa de maior va lor comercial, deve-se preparar o solo de modo que *x* assuma

A qualquer valor acima de 10^{-8}.
B qualquer valor positivo inferior a 10^{7}.
C valores maiores que 7 e menores que 8.
D valores maiores que 70 e menores que 80.
E valores maiores que 10^{8} e menores que 10^{7}.

12 Se $\log_{ab}^{a} = n$ e a e $b \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $ab \neq 1$, calcule $\log_{ab}\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$ em função de *n*.

13 Calcule $\log_2 360$ se $\log_3 20 = a$ e $\log_3 15 = b$.

14 Para cada n > 0, demonstre que: $-\log_n\left[\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}\right] = 3$.

15 Para cada x > 1, demonstre que:

$$\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}\right) = 2\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

16 **PUC Rio** Sabendo-se que $\log_{10}3 \cong 0{,}47712$, podemos afirmar que o número de algarismos de 9^{25} é:

A 21
B 22
C 23
D 24
E 25

17 O número de algarismos da potência 50^{50} é:
Dado: log2 = 0,301

A 2 500
B 85
C 100
D 250
E 50

18 Pressionando a tecla [log] de uma calculadora, aparece no visor o logaritmo decimal do número que estava antes no visor. Digita-se inicialmente o número 88888888 (oito oitos). Quantas vezes a tecla [log] precisa ser pressionada para que apareça mensagem de erro?

A 2
B 4
C 6
D 8
E 10

19 **Mackenzie** A partir dos valores de A e B adiante, podemos concluir que:

$A = 3^{\log_7 5}$ e $B = 5^{\log_7 3}$

A $A = \dfrac{B}{3}$

B $A = B$

C $B = \dfrac{A}{3}$

D $\dfrac{A}{3} = \dfrac{B}{5}$

E $\dfrac{A}{5} = \dfrac{B}{3}$

20 **Mackenzie** Se *f* de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}$ é uma função definida por $f(x) = \log_2 x$, então a igualdade $f^{\ 1}(x + 1) - f^{-1}(x) = 2$ se verifica para *x* igual a:

A $\dfrac{1}{2}$

B $\dfrac{1}{4}$

C $\sqrt{2}$

D 1

E 2

21 **Mackenzie** Se $f(x + 2) = 12 \cdot 2^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então a solução real da equação $f(x) - \log_2 |x| = 0$ pertence ao:

A $[-3, -2]$

B $[-2, -1]$

C $[-1, 0]$

D $[0, 1]$

E $[1, 2]$

22 Simplifique a expressão $0,2\left(2 \cdot a^{\log_2 b} + 3b^{\log_{\sqrt{2}} \sqrt{a}}\right)$.

23 **ITA** Seja S o conjunto de todas as soluções reais da equação $\log_{\frac{1}{4}}(x+1) = \log_4(x-1)$, então:

A S é um conjunto unitário e $S \subset \,]2, +\infty[$.

B S é um conjunto unitário e $S \subset \,]1, 2[$.

C S possui dois elementos distintos $S \subset \,]-2, 2[$.

D S possui dois elementos distintos $S \subset \,]1, +\infty[$.

E S é o conjunto vazio.

24 Seja a função *f* dada por:

$$f(x) = \left(\log_3 5\right) \cdot \left(\log_5 8^{x-1}\right) + \log_3 4^{1+2x-x^2} - \log_3 2^{x(3x+1)}$$

Determine todos os valores de *x* que tornam *f* não negativa.

25 Determinando-se a condição sobre *t* para que a equação $4^x - (\ell n\, t + 3) \cdot 2^x - \ell n\, t = 0$ admita duas raízes reais e distintas, obtemos:

A $e^{-3} \leq t \leq 1$

B $t \geq 0$

C $e^{-1} < t < 1$

D $3 < t < e^2$

E n.d.a.

26 **UEPG 2018** Um retângulo tem base **a** e altura **b**. Considerando que **a** é a solução para a equação $\log_3(4x \quad 5) = \log_3 7$ e que **b** é a solução da equação $5 \cdot 2^{x+2} \quad 3 \cdot 2^{x-2} = 308$, assinale o que for correto.

01 A diagonal desse retângulo mede 5.

02 A área desse retângulo é um número múltiplo de seis.

04 O perímetro desse retângulo é um número primo.

08 A diagonal desse retângulo é um número par.

16 O perímetro desse retângulo é um número ímpar.

Soma:

27 **UFRGS 2018** Leia o texto abaixo, sobre terremotos.

Magnitude é uma medida quantitativa do tamanho do terremoto Ela está relacionada com a energia sísmica liberada no foco e também com a amplitude das ondas registradas pelos sismógrafos. Para cobrir todos os tamanhos de terremotos, desde os microtremores de magnitudes negativas até os grandes terremotos com magnitudes superiores a 8,0, foi idealizada uma escala logarítmica, sem limites. No entanto, a própria natureza impõe um limite superior a esta escala, já que ela está condicionada ao próprio limite de resistência das rochas da crosta terrestre. Magnitude e energia podem ser relacionadas pela fórmula descrita por Gutenberg e Richter em 1935: $\log(E) = 11,8 + 1,5 \cdot M$ onde: E = energia liberada em Erg e M = magnitude do terremoto.

Disponível em: <http://www.iag.usp.br/siae98/terremoto/terremotos.htm>. Acesso em: 20 set 2017

Sabendo que o terremoto que atingiu o México em setembro de 2017 teve magnitude 8,2, assinale a al ternativa que representa a melhor aproximação para a energia liberada por esse terremoto, em Erg.

A 13,3

B 20

C 24

D 10^{24}

E 10^{28}

28 **ITA** Calcule senx sabendo que $(\ln \operatorname{sen} x)^2 - \ln \operatorname{sen} x - 6 = 0$.

29 **ITA** A inequação: $4x\log_5(x+3) \geq (x^2+3)\log_{\frac{1}{5}}(x+3)$ é satisfeita para todo $x \in S$. Então:

A $S = \,]-3, -2] \cup [-1, +\infty[$

B $S = \,]-\infty, -3[\cup [-1, +\infty[$

C $S = \,] \quad 3, \quad 1]$

D $S = \,]-2, +\infty]$

E $S = \,]-\infty, -3[\cup]-3, +\infty[$

30 Qual o valor de $y \in \mathbb{R}$ que satisfaz a igualdade $\log_y 49 = \log_{y^2} 7 + \log_{2y} 7$?

A $\dfrac{1}{2}$

B $\dfrac{1}{3}$

C 3

D $\dfrac{1}{8}$

E 7

FRENTE 1

31 **Ufes** Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação: $4^x + 6^x = 9^x$.

32 **ITA** Resolva a inequação: $\log_x[(1 - x) \cdot x] < \log_x[(1 + x) \cdot x^2]$.

33 Resolva a inequação $\log_x[\log_2(4x \quad 6)] \leq 1$

34 Os valores de *x* que satisfazem a equação $\log_x(ax + b) = 2$ são 2 e 3.
Nessas condições, os respectivos valores de *a* e *b* são:

A 4 e 4
B 1 e 3
C 3 e 1
D 5 e 6
E –5 e 6

35 **UEL** A solução real da equação $-1 = \log_5\left[\dfrac{2x}{(x+1)}\right]$ é:

A $\dfrac{1}{9}$
B $\dfrac{1}{5}$
C –1
D –5
E –9

36 **FGV-SP 2018** As bases de um contrato de trabalho estabelecem que Rafael, funcionário recém-contratado de uma empresa, irá receber salário anual de R$ 100.000,00, com reajustes anuais de 4% sobre o salário total recebido no ano anterior
Adote: log 104 = 2,017 nos cálculos dos dois itens a seguir

a) No 11º ano de trabalho de Rafael nessa empresa, seu salário anual será igual a 10^x reais Calcule *x*
b) A tabela a seguir indica aproximações de 10^x para alguns valores de *x* Usando essa tabela, calcule o montante total de dinheiro recebido por Rafael em 11 anos de trabalho nessa empresa, considerando que o salário anual do 1º ano é de R$ 100.000,00

x	0,02	0,08	0,15	0,17	1,02	1,08	1,15	1,17	1,20
10^x	1,05	1,20	1,41	1,48	10,47	12,02	14,13	14,79	15,85

eamesBot/Shutterstock.com

FRENTE 1

CAPÍTULO

6

Função modular

O conceito de valor absoluto de um número real é utilizado para medir a distância entre dois números reais quaisquer. Se a e b são dois números reais, a distância entre eles é o valor absoluto da sua diferença. Geometricamente, se A e B são as coordenadas de dois pontos de uma reta, o comprimento do segmento $\overline{AB}$ é a distância entre eles. Além da determinação da distância entre pontos, o conceito de valor absoluto é aplicado quando estamos interessados na magnitude de um número real, independentemente do seu sinal.

Conceitos básicos

Definição de módulo

O módulo ou valor absoluto de um número real *x* é indicado por $|x|$ e possui os seguintes valores:

$$\begin{cases} |x| = x \text{ se } x \geq 0 \\ \text{ou} \\ |x| = \quad x \text{ se } x \quad 0 \end{cases}$$

Ou seja:

- o módulo de um número real não negativo é o próprio número.
- o módulo de um número real negativo é o oposto do número.

Observe: $|-3| = 3$; $|0| = 0$; $|7| = 7$ e $\left|\sqrt{2} \quad 2\right| \qquad \sqrt{2} \quad 2.$

Conceito geométrico

Além da definição clássica e formal do módulo de um número real, o conceito geométrico nos auxiliará na compreensão de algumas inequações modulares.

O módulo de um número real representa a distância do ponto (número) até a origem da reta real. Observe os exemplos:

- $|3| = 3$
- $|-5| = 5$

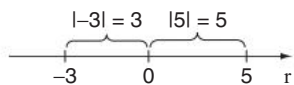



Fig. 1 Conceito geométrico de módulo.

> **! Atenção**
>
> Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de uma reta e um número real, ou seja, cada ponto da reta representa um único número, e cada número representa um único ponto.

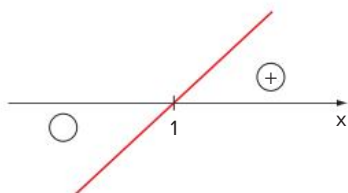
Aplicação do conceito de módulo

A definição de módulo de um número real *x* refere-se a $|x|$, o que causa confusões na resolução de exercícios. Para que não ocorra isso, analisaremos os seguintes exercícios.

Exercícios resolvidos

1 Calcule $|x \quad 1|$

Resolução:

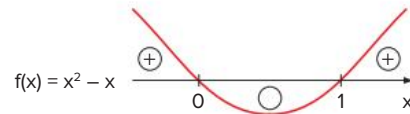
Faça a análise de sinal da função interna ao módulo.
$f(x) = x \quad 1$

Observe que: $f(x) \geq 0$ para $x \geq 1$ e $f(x) < 0$ para $x < 1$.

Assim:

$$|x \quad 1| = x \quad 1 \text{ para } x \geq 1 \text{ e}$$
$$|x \quad 1| = \quad (x \quad 1) = \quad x + 1 \text{ para } x < 1$$

2 Calcule $|x^2 - x|$.

Resolução:

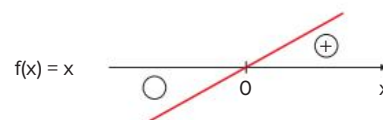
Faça a análise do sinal da função interna ao módulo

Observe que:
$f(x) \geq 0$ para $x \geq 1$ ou $x \leq 0$ e $f(x) < 0$ para $0 < x < 1$

Assim:

$$|x^2 \quad x| = x^2 \quad x \text{ para } x \geq 1 \text{ ou } x \leq 0 \text{ e}$$
$$|x^2 \quad x| = -(x^2 \quad x) = -x^2 + x \text{ para } 0 < x < 1$$

3 Calcule $x \cdot |x|$.

Resolução:

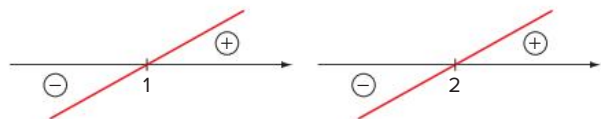
Faça a análise do sinal da função que está dentro do módulo:

Observe que:
$f(x) \geq 0$ para $x \geq 0$ e $f(x) < 0$ para $x < 0$

Assim:

$$x \cdot |x| = x \cdot x = x^2 \text{ para } x \geq 0 \text{ e}$$
$$x \cdot |x| = x \cdot (-x) = -x^2 \text{ para } x < 0$$

4 Calcule $|x - 1| + |x - 2|$.

Resolução:

Análise das funções $f(x) = x \quad 1$ e $g(x) = x \quad 2$

Observe o quadro de sinais

$\lvert x - 1\rvert$	$-x + 1$	$x - 1$	$x - 1$
$\lvert x \quad 2\rvert$	$x + 2$	$x + 2$	$x \quad 2$
$\lvert x \quad 1\rvert + \lvert x \quad 2\rvert$	$2x + 3$	1	$2x \quad 3$

1 2

$$\text{Assim: } |x \quad 1| \quad |x \quad 2| \begin{cases} 2x \quad 3; & x \geq 2 \\ 1; & 1 \leq x < 2 \\ -2x - 3; & x < 1 \end{cases}$$

Propriedades do módulo

P_1 $|x| \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$

P_2 $|x| \geq x; \forall x \in \mathbb{R}$

P_3 $\sqrt{x^2} = |x|$

P_4 $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

P_5 $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}; y \neq 0$

P_6 $|x| + |y| \geq |x + y|$

Demonstrações:

P_1 Pela definição de módulo, a propriedade é óbvia. O módulo sempre é um número positivo ou nulo.

P_2 Observe os exemplos, não é uma demonstração:

$$|-3| = 3 \rightarrow |-3| \geq -3 \text{ ou } |3| = 3 \rightarrow |3| \geq 3$$

P_3 $|x| = x$ ou $-x$, logo $|x|^2 = x^2 = (-x)^2 \therefore |x|^2 = x^2$ logo $|x| = \sqrt{x^2}$

P_4 $|x \cdot y| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2 \cdot y^2} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2} = |x| \cdot |y|$

P_5 $\left|\frac{x}{y}\right| = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \frac{|x|}{|y|}; y \neq 0$

P_6 Demonstração por redução ao absurdo (negação da tese):

$|x| + |y| < |x + y| \Leftrightarrow (|x| + |y|)^2 < (|x + y|)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x|^2 + 2|x| \cdot |y| + |y|^2 < (x + y)^2 \Leftrightarrow$

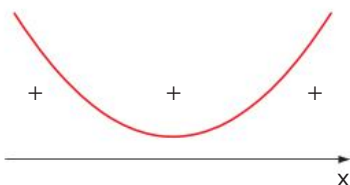
$\Leftrightarrow x^2 + 2|x \cdot y| + y^2 < x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow 2|xy| < 2xy \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |xy| < xy$, absurdo, pela P_2, logo $|x| + |y| \geq |x + y|$

Construção de gráficos

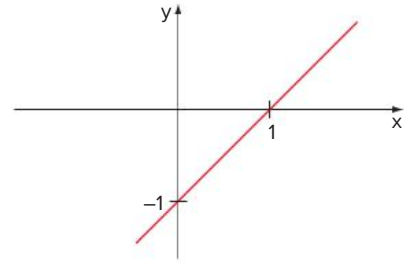
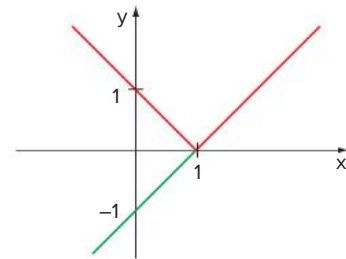
A construção de qualquer gráfico pode ser feita pela definição de módulo, dividindo o gráfico em vários intervalos ou por meio de transformações geométricas, como podem ser observados nos exercícios resolvidos.

! Atenção

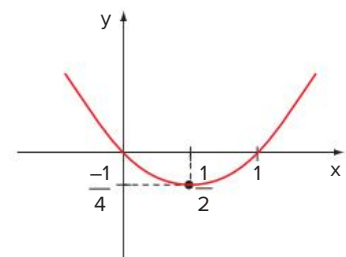
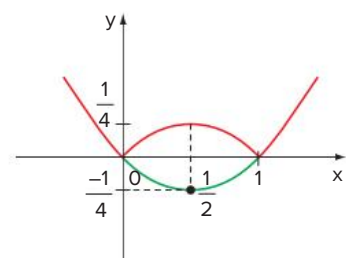
- Para discutir o $|f(x)|$, devemos fazer uma análise de sinal da função f(x).
- Lembre-se!
  Considere a função com $a \neq 0$, $y = ax^2 + bx + c$, se $a > 0$ e $\Delta < 0$, $y > 0; \forall x \in \mathbb{R}$.

Exercícios resolvidos

5 Calcule f(x) = |x 1|.

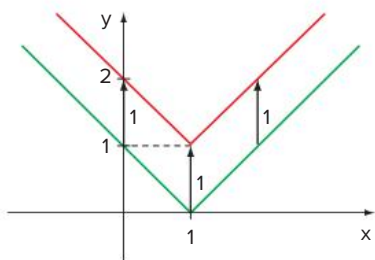
Resolução:

Construa a função que está dentro do módulo. Trata-se da função do 1º grau $x - 1$.

Pela propriedade P_1, não podemos ter valores negativos para $|x - 1|$, então todo o gráfico com base em $x < 1$ tem que ser multiplicado por -1. Isso equivale a rebater essa parte do gráfico simetricamente em relação ao eixo *x*.
Observe:

6 Calcule f(x) = $|x^2$ x|.

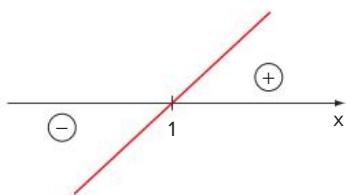
Resolução:

Utilizando o mesmo raciocínio do exercício resolvido 1, temos:

Rebatendo a parte negativa:

7 Calcule $f(x) = |x - 1| + 1$.

Resolução:

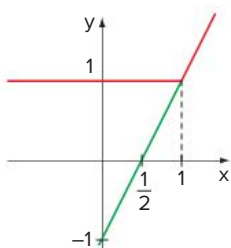
Repare que este exercício está relacionado com o exercício 1 Foi adicionada uma constante no gráfico de $|x \quad 1|$, ou seja, todos os valores de *y* sofreram o acréscimo de 1 Observe a translação do gráfico:

8 Calcule $f(x) = |x \quad 1| + x$.

Resolução:

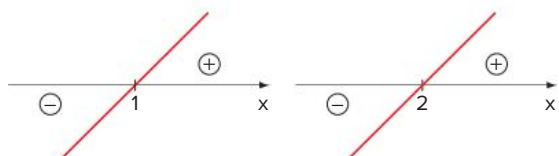
A parte do gráfico $|x - 1|$ pode ser feita geometricamente, mas a translação no eixo *y* não é possível, pois estamos adicionando uma variável *x*. O gráfico deve ser feito pela definição de módulo.

Análise de sinal da função $x \quad 1$: $y \geq 0$ para $x \geq 1$ e $y < 0$ para $x < 1$

A análise total de f(x): $f(x) = \begin{cases} x - 1 + x;\ x \geq 1 \\ -(x - 1) + x;\ x < 1 \end{cases}$ logo,

$$f(x) = \begin{cases} 2x \quad 1;\ x \quad 1 \\ 1;\ x < 1 \end{cases}$$

Portanto, temos:

9 Calcule $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$.

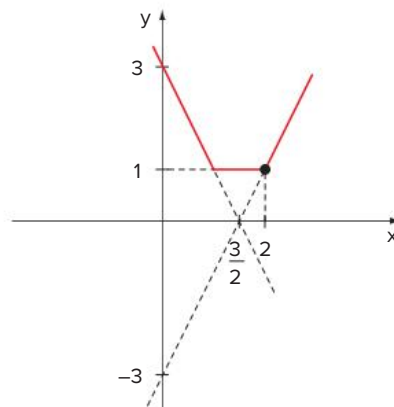
Resolução:

O gráfico tem de ser feito pela definição de módulo e, possuindo mais de uma função para a análise, como é o caso, devemos utilizar um quadro de sinais:

Quadro de sinais:

$\|x \quad 1\|$	$-x + 1$	$x \quad 1$	$x \quad 1$
$\|x \quad 2\|$	$x + 2$	$x + 2$	$x \quad 2$
$\|x - 1\| + \|x - 2\|$	$-2x + 3$	1	$2x - 3$

1 2

Portanto: $f(x) = \begin{cases} 2x \quad 3;\ x \geq 2 \\ 1;\ 1 \leq x < 2 \\ 2x \quad 3;\ x < 1 \end{cases}$

Observe o gráfico:

Equações modulares

A partir do momento em que o aluno compreender e treinar a construção de gráficos geometricamente e pela definição, resolver equações será um processo natural

Exercícios resolvidos

10 Calcule $|2x - 1| = 4$.

Resolução:

Temos duas opções para uma equação do tipo $|x| = k$: ou $x = k$ ou $x = -k$, pois $|k| = |-k| = k$. Assim:

$$2x \quad 1 = 4 \text{ ou } 2x \quad 1 = \quad 4 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ ou}$$

$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow S = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$$

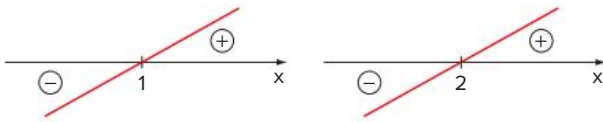
11 Calcule $|x|^2 \quad |x| \quad 6 = 0$.

Resolução:

A equação modular apresentada é redutível ao 2º grau, observe: fazendo $|x| = t$, obtemos: $t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (t - 3) \cdot (t + 2) = 0$, logo $t = 3$ ou $t = -2$. Voltando para a variável original, temos: $|x| = 3$ ou $|x| = -3$ ou $|x| = -2$ (impossível). Logo: $S = \{\pm 3\}$.

12 Calcule $|x \quad 1| + |x \quad 2| = 4$.

Resolução:

Seguindo o mesmo procedimento dos gráficos, cons truiremos um quadro de sinais

$|x \quad 1|$	$-x+1$	$x \quad 1$	$x \quad 1$
$|x \quad 2|$	$-x+2$	$x+2$	$x \quad 2$
$|x-1|+|x-2|$	$-2x+3$	1	$2x-3$

1 2

Obtivemos os valores possíveis de $|x \quad 1| + |x \quad 2|$. Observe

para $x \geq 2$	$2x - 3 = 4$	$\therefore x = \frac{7}{2}$
para $1 \leq x < 2$	$1 = 4$	absurdo
para $x < 1$	$2x + 3 = 4$	$\therefore x = \frac{-1}{2}$

Analisando as respostas, a 1ª e a 3ª satisfazem as suas respectivas condições de contorno, a 2ª é um absurdo.

$$S = \left\{\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$$

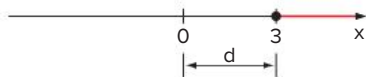
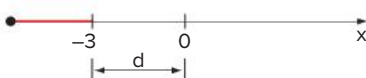
Inequações modulares

Vamos seguir o mesmo procedimento das equações modulares e dos gráficos, mas o conceito geométrico é muito útil. Observe os dois exercícios a seguir.

Exercícios resolvidos

13 Calcule $|x| \geq 3$.

Resolução:

Como foi apresentado no início do capítulo, o módulo de um número real representa a distância do número na reta real até a origem.
$|x|$ representa a distância do número *x* até a origem.
Com a inequação anterior, queremos os valores de *x* cujas distâncias até a origem sejam maiores ou iguais a 3
Os valores mais óbvios são representados a seguir.

Mas não podemos esquecer que distâncias maiores ou iguais a 3 podemos ter no "lado esquerdo", nos números negativos Observe:

Solução final:
$S = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 3 \text{ ou } x \leq -3\}$ ou $S =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$

14 Calcule $|x| \leq 3$.

Resolução:

Na inequação apresentada, queremos os valores de *x* cuja distância até a origem é menor ou igual a 3. Comparando com o exercício resolvido 2, os valores de *x* estão de –3 a 3. Observe:

Solução final:

$S = \{x \in \mathbb{R} / \leq 3 \leq x \quad 3\}$ ou $S = [\ 3, 3]$

Para $k > 0$, temos:

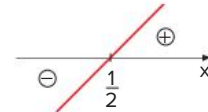
$$|x| \geq k \Leftrightarrow x \geq k \text{ ou } x \leq \quad k$$
$$|x| \leq k \Leftrightarrow \quad k \leq x \leq k$$

Analise agora outros exercícios em que necessitamos utilizar a definição de módulo.

Exercícios resolvidos

15 Calcule $|2x - 1| > x$.

Resolução:

Analisando a função dentro do módulo, temos:

Assim:

Se $x \geq \frac{1}{2}$, temos $2x \quad 1 > x \Rightarrow x > 1$

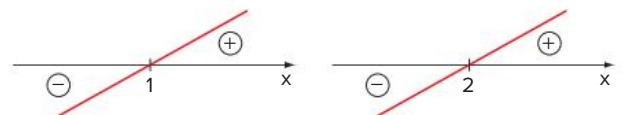
Se $x < \frac{1}{2}$, temos $\quad 2x + 1 > x \Leftrightarrow \quad 3x > \quad 1 \Rightarrow x < \frac{1}{3}$.

As 1ª e 2ª soluções satisfazem as condições de contorno, assim, a solução final é:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} / x > 1 \text{ ou } x < \frac{1}{3}\right\}$ ou $S =]1, \infty \ \cup [\infty \quad] \quad , \frac{1}{3}[$

16 Calcule $|x \quad 1| + |x \quad 2| \geq 3$.

Resolução:

Quadro de sinais:

$|x-1|$	$-x+1$	$x-1$	$x-1$
$|x \quad 2|$	$x+2$	$-x+2$	$x \quad 2$
$|x-1|+|x-2|$	$-2x+3$	1	$2x-3$

1 2

Resolveremos agora três inequações simples em três intervalos diferentes:

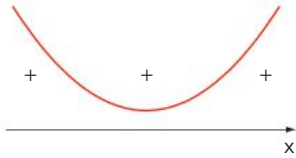
Se $x \geq 2$	$2x \quad 3 \geq 3$	$2x \geq 6$	$\therefore x \geq 3$
Se $1 \leq x < 2$	$1 \geq 3$	absurdo!	
Se $x < 1$	$-2x + 3 \geq 3$	$-2x \geq 0$	$\therefore x \leq 0$

Solução final:

$S = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 3 \text{ ou } x \leq 0\}$ ou $S = [3, +\infty[\cup]-\infty, 0]$

17 Calcule $|x^2 + x + 1| \geq 1$.

Resolução:

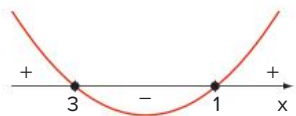
Analisando a função interna do módulo, trata-se de uma função do 2º grau cujo $\Delta < 0$, observe a análise do sinal:

A função sempre é positiva, então o sinal de módulo é desnecessário: $x^2 + x + 1 \geq 1 \therefore x^2 + x \geq 0$.

Solução final:

$S = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \text{ ou } x \leq -1\}$ ou $S = [0, +\infty[\cup]-\infty, -1]$

18 Calcule $x^2 + x + 1 \leq |x^2 + 2x \quad 3|$.

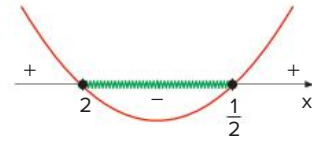
Resolução:

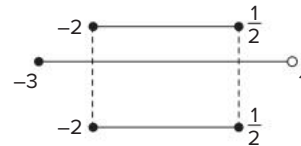
A inequação será dividida em três intervalos. Temos a função $x^2 + 2x \quad 3$ "dentro" do módulo, cujo esboço do gráfico é:

- Para $x \geq 1$, temos:

  $x^2 + x + 1 \leq x^2 + 2x \quad 3 \Leftrightarrow \quad x \leq \quad 4 \Rightarrow x \geq 4$

  Fazendo a interseção com a condição de contorno, temos: $S_1 = [4, +\infty[$.

- Para $3 \leq x < 1$, temos:

  $x^2 + x + 1 \leq \quad x^2 \quad 2x + 3 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x \quad 2 \leq 0$

Temos então: $-2 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Fazendo a interseção com a condição de contorno, temos:

Assim: $S_2 = \left[2, \frac{1}{2} \right]$

- Para $x < -3$, temos:

  $x^2 + x + 1 \leq x^2 + 2x - 3 \Leftrightarrow -x \leq -4 \Leftrightarrow x \geq 4$

  Fazendo a interseção com a condição de contorno, temos: $S_3 = \varnothing$.

  A solução final é dada por: $S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

$$S_{final} = \left[2, \frac{1}{2} \right] \cup [4, +\infty[$$

! Atenção

A equação $|x \quad 1| = \quad 3$ não possui solução, pois de acordo com a propriedade P_1 o módulo é um número real não negativo.

O símbolo $\Leftrightarrow$ significa se, e somente se. Na prática, isso nos permite concluir o seguinte: $A \Leftrightarrow B$. O resultado A implica o B, e o B implica o A

Revisando

1 Calcule o valor de $|x^2 \quad 6x + 8|$

2 Calcule o valor de $|x| + |x \quad 1|$.

3 Construa o esboço do gráfico da função: $f(x) = x^2 - |x|$.

4 Construa o esboço do gráfico da função: $f(x) = |x| \quad |x \quad 1|$.

5 Resolva as seguintes equações modulares.

a) $|5 - |x|| = 3$

b) $|x - 1| = 2x$

c) $|x + 2| = 2|x - 2|$

6 Resolver as equações modulares a seguir.

a) $|x - 3| < 7$

b) $|x + 2| + x \leq 5$

c) $|x - 3| \leq |1 - x|$

Exercícios propostos

1 Determine:

a) $|-3|$

b) $|\pi \quad \sqrt{5}|$

c) $|x^2+1|$

d) $|1 \quad \sqrt{2}|$

2 **PUC** O valor de $|2 \quad +\sqrt{5}| \quad |3 \quad \sqrt{5}|$ é:

A $5 \quad 2\sqrt{5}$

B $5+2\sqrt{5}$

C 5

D $1+2\sqrt{5}$

E 1

3 Se x e $y \in \mathbb{R}$ e $|x+y-17|+|x-y-5|=0$, então $x+2y$ é igual a:

A 21

B 22

C 23

D 24

E 25

4 Para quaisquer reais não nulos a, b e c o conjunto dos valores que o número $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$, pode assumir é igual a:

A {0}

B {–4, –2, 2, 4}

C {–4, 0, 4}

D {–4, –2, 0, 2, 4}

E {–2, 0, 2}

5 Se $x \in [1, 2]$, então $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ é igual a:

A 4 B 2 C 1 D 0 E 2

6 **UEL** Quaisquer que sejam os números reais *x* e *y*:

A se $|x|<|y|$, então $x<y$.

B $|x \cdot y|=|x| \cdot |y|$

C $|x+y|=|x|+|y|$

D $| \quad |x||= \quad x$

E se $x<0$, então $|x|<x$.

7 **Unirio** Sejam *a* e *b* números reais tais que $a^2<b^2$, então, pode-se concluir que:

A $a<b$

B $|a|<|b|$

C $\frac{-a^2}{c^2}<\frac{-b^2}{c^2}$, se $c \neq 0$

D $b<a$.

E $b^2c^2<a^2c^2$, se $c \neq 0$

8 **UFF** Dados $p, q \in \mathbb{R}$ tais que $|p| \le q$, considere as afirmativas:

I. $q \in \mathbb{R}_+$

II. $-q \le p \le q$

III. $p \le |q|$

IV. $|p| \le |q|$

São verdadeiras:

A somente a I e II.

B somente a I e a III.

C somente a II e a III.

D somente a I, a II e a III.

E todas as afirmativas.

9 Assinale o item que contém a implicação verdadeira.

A $x>y \Rightarrow |x|>|y|$

B $x>y \Rightarrow x^2>y^2$

C $x>y \Rightarrow x-y>y-x$

D $x>y \Rightarrow a^x>a^y$, em que $a>0$ e $a \neq 1$.

E $|x+y|=|x|+|y| \Rightarrow$ *x* e *y* possuem sinais opostos.

10 **PUC** *a* e *b* são números reais e $x=\left[(a-b)^2\right]^{\frac{1}{2}}$. Sobre o número *x*, é correto afirmar:

A $x=\begin{cases} a-b, \text{ se } a \ge b \\ b \quad a, \text{ se } a \quad b \end{cases}$

B $x=\begin{cases} a-b, \text{ se } a \le b \\ b \quad a, \text{ se } a<b \end{cases}$

C $x=|a| \quad |b|$

D $x=a-b$

E $x=\sqrt[2]{[|a-b|]}$

11 Para quais valores reais de *x*, $x \neq 0$, $\frac{|x \quad |x||}{x}$ é um número inteiro?

A Somente para $x<0$.

B Somente para $x>0$.

C Somente se *x* for par.

D Para todo *x* real, $x \neq 0$.

E Para nenhum *x* real.

12 **Eear 2017** Seja $f(x)=|x-3|$ uma função. A soma dos valores de *x* para os quais a função assume o valor de 2 é

A 3 B 4 C 6 D 7

13 **UFMT** Julgue, quanto a (V) ou (F), os itens.

- Sendo *a* e *b* números reais, então $\sqrt{(a^2+b^2)}=a+b$.
- Se *x* é um número real, $-1<x\le 1$, então $\frac{|x+1|}{|x+2| \quad 3}=-1$.
- Se *p* é um número real não nulo, então a equação $2px^2 \quad 2(p \quad 1)x \quad 1=0$ tem duas raízes reais diferentes, qualquer que seja o valor de *p*.

14 **UFRJ** Considere uma quantidade $Q>0$ e seja M um valor aproximado de Q, obtido através de uma certa medição.

O erro relativo E desta medição é definido por: $E=\frac{|Q-M|}{Q}$

Considere ainda um instrumento com uma precisão de medida tal que o erro relativo de cada medição é de, no máximo, 0,02. Suponha que uma certa quantidade Q foi medida pelo instrumento e o valor $M=5{,}2$ foi obtido.

Determine o menor valor possível de Q.

15 Resolva a equação $|x \quad 5| = 3$.

16 Resolva a equação $|2x - 1| = x - 1$.

17 **UEFS 2017** Considerando-se a equação $x^2 - 5x + 6 = |x \quad 3|$, tem-se que a soma de suas raízes é

A 0 B 1 C 2 D 3 E 4

18 **Uece** Se $f(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right) - 2$, então as raízes irracionais da equação $|f(x) \quad 6| = 8$ são:

A $2\sqrt{2}$ e $-2\sqrt{2}$
B $3\sqrt{2}$ e $-3\sqrt{2}$
C $4\sqrt{2}$ e $-4\sqrt{2}$
D $5\sqrt{2}$ e $-5\sqrt{2}$

19 **Uece** Seja $W = \{x \in \mathbb{R}; |3x + 1| = |x - 2|\}$, a soma dos elementos de W é:

A $\frac{5}{4}$ B $\frac{3}{4}$ C $\frac{1}{4}$ D $\frac{7}{4}$

20 **Uece 2017** Se as raízes da equação $x^2 \quad 5|x| \quad 6 = 0$ são também raízes de $x^2 \quad ax \quad b \quad 0$, então, os valores dos números reais *a* e *b* são respectivamente

A 1 e 6.
B 5 e 6.
C 0 e 36.
D 5 e 36.

21 **FGV 2017** Para certos valores reais de *k*, o polinômio $P(x) = x^2 - 6x + |2k - 7|$ é divisível por $x - 1$. A soma de todos esses valores é igual

A 8.
B 7.
C 5.
D –1.
E –5.

22 **FGV** O conjunto-solução da equação $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = x \quad$ é:

A $\varnothing$
B $\mathbb{R}$
C $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$
D $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$
E $\{0\}$

23 **UFRJ** Durante o ano de 1997, uma empresa teve seu lucro diário L dado pela função

$$L(x) = 50\,(|x - 100| + |x - 200|),$$

em que x = 1, 2, ..., 365 corresponde a cada dia do ano e L é dado em reais.
Determine em que dias (x) do ano o lucro foi de R$ 10.000,00.

24 **UFRGS 2020** Considere as funções $f(x) = |x + 1|$ e $g(x) = \quad |x| \quad 1$

O intervalo tal que $f(x) > g(x)$ é

A $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
B $\left(\quad \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
C $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.
D $(-1, +\infty)$.
E $(-\infty, +\infty)$.

25 **UFPR 2017** Encontre o conjunto solução em $\mathbb{R}$ das seguintes inequações:

a) $5 - x \leq x + 2$
b) $|3x + 1| < 3$

26 **Unitau** Se *x* é uma solução de $|2x \quad 1| < 5 \quad x$, então:

A $5 < x < 7$
B $2 < x < 7$
C $-5 < x < 7$
D $-4 < x < 7$
E $-4 < x < 2$

27 **PUC** Considere os conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x + 1| < 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| > 3\}$.
O número de elementos do conjunto $A \cap B$ é:

A 2
B 4
C 8
D 9
E 11

28 **FEI** Se $\left|1 \quad \left[\frac{(x \quad 1)}{2}\right]\right| \leq 4;\ x \in \mathbb{R}$, então:

A $x \geq 15$
B $5 \leq x \leq 11$
C $x \leq \quad 10$
D $12 < x \leq 20$
E $7 \leq x < 6$

29 **Unitau** O domínio da função $f(x) = \sqrt{\left[\frac{(1 - |x - 1|)}{2}\right]}$ é:

A $0 \leq x \leq 2$
B $x \geq 2$
C $x \leq 0$
D $x < 0$
E $x > 0$

30 **EsPCEx 2018** O conjunto solução da inequação $||x \quad 4| \leq 1| \quad 2$ é um intervalo do tipo [*a*, *b*]. O valor de *a* + *b* é igual a

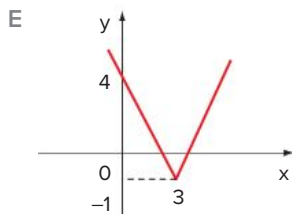
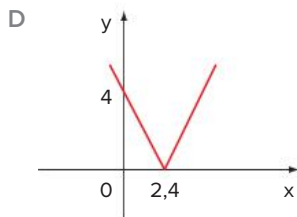
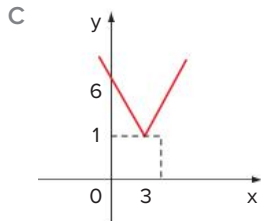
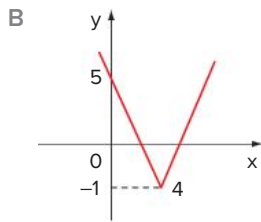
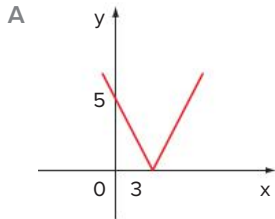
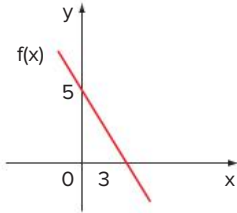
A –8.
B –2.
C 0.
D 2.
E 8.

31 Resolva a inequação: $|x^2 + x + 1| \leq |x^2 + 2x \quad 3|$.

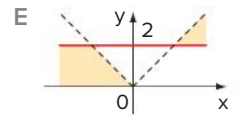
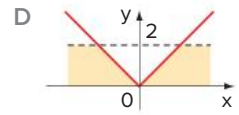
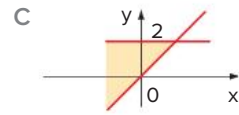
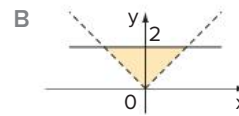
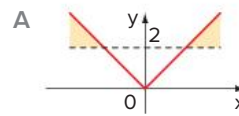
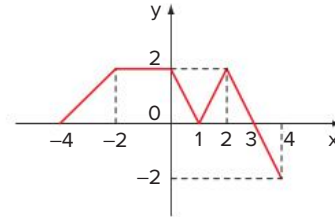
32 **USFJ 2013** Movendo o gráfico da função $y = |x - 5|$ quatro unidades de comprimento (u.c.) para a esquerda e duas u.c. para cima, obtém-se uma nova função.
Assinale a alternativa que contém a função obtida

A $y = |x \quad 11|$
B $y = |x \quad 7|$
C $y = |x + 4| \quad 2$
D $y = |x \quad 1| \quad 2$

33 **Unirio** Sejam as funções: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ y = |x|$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y = x^2 - 2x - 8$.
Faça um esboço gráfico da função $f \circ g$.

34 Cesgranrio No gráfico a seguir, está representada a função do 1º grau f(x). O gráfico que melhor representa $g(x) = |f(x)| - 1$ é:

A
B
C
D
E
35 Unirio Determine os pontos de interseção dos gráficos das funções reais definidas por $f(x) = |x|$ e $g(x) = -x^2 + x + 8$ pelo método algébrico.

36 UFF Considere o sistema: $\begin{cases} y > |x| \\ y \leq 2 \end{cases}$.

A região do plano que melhor representa a solução do sistema é:

A
B
C
D
E
37 UFPE Na figura a seguir, temos o gráfico de uma função f(x) definida no intervalo fechado [–4, 4].

Com respeito à função $g(x) = f(|x|)$, é incorreto afirmar que:

A o ponto (–4, 2) pertence ao gráfico de *g*

B o gráfico de *g* é simétrico com relação ao eixo Oy das ordenadas

C g(x) se anula para *x* igual a 3, 1, 1 e 3.

D $g(-x) = g(x)$ para todo *x* no intervalo [4, 4]

E $g(x) \geq 0$ para todo *x* no intervalo [–4, 4].

38 UFRGS Para $-1 < x < \frac{1}{2}$, o gráfico da função $y = |x + 1| + |2x - 1|$ coincide com o gráfico da função $y = ax + b$. Os valores de *a* e *b* são, respectivamente:

A 1 e 1

B 2 e –1

C 1 e 2

D $\frac{1}{2}$ e –1

E $\frac{1}{2}$ e 1

39 Cesgranrio O conjunto-imagem da função $f(x) = |x^2 - 4x + 8| + 1$ é o intervalo:

A [5, +∞[

B [4, +∞[

C [3, +∞[

D [1, +∞[

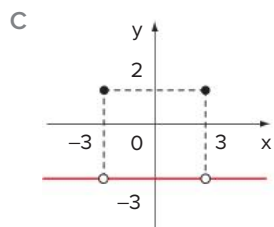
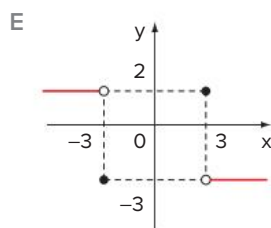
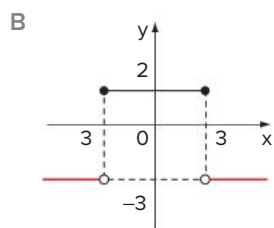
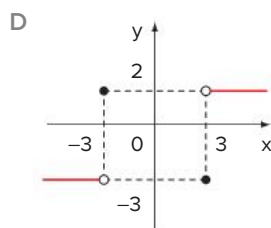
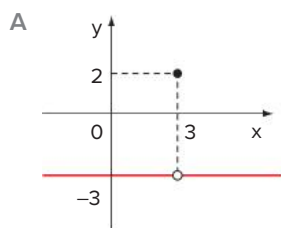
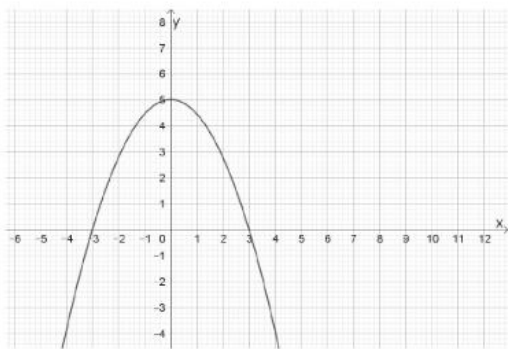
E [0, +∞[

40 **FGV** Relativamente à função *f*, de ℝ em ℝ, dada por $f(x) = |x| + |x - 1|$, é correto afirmar que:

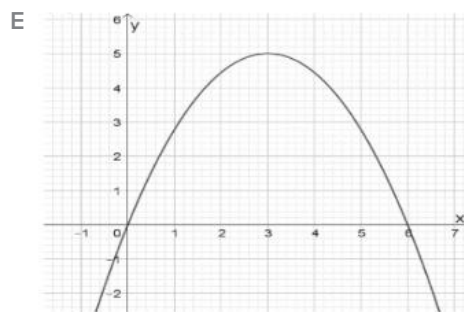
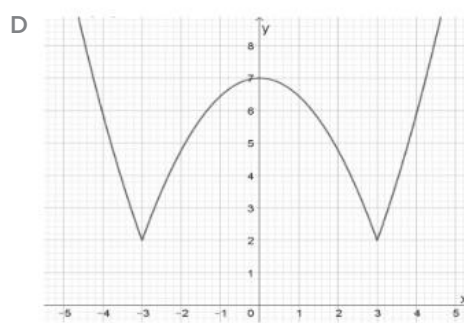
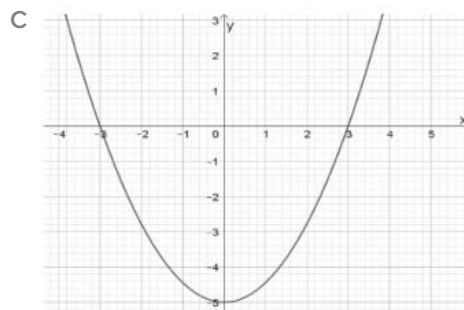
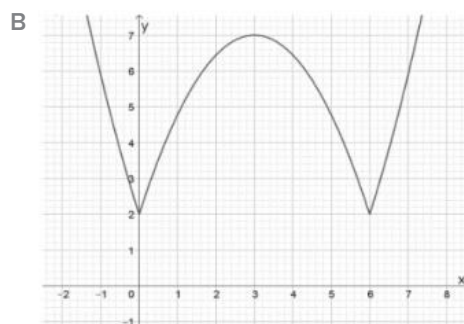
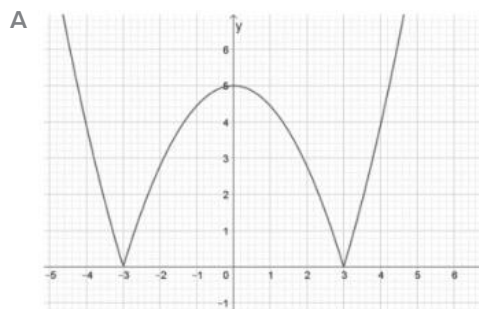
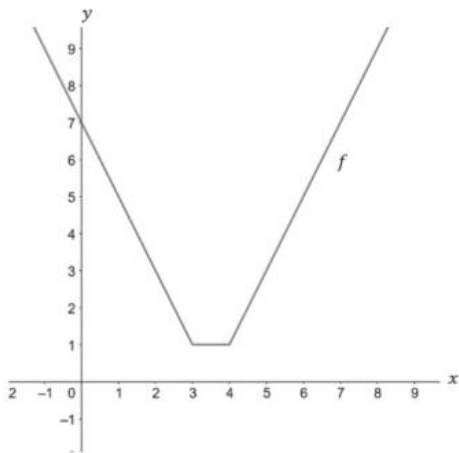
A o gráfico de *f* é a reunião de duas semirretas.
B o conjunto imagem de *f* é o intervalo $[1, +\infty[$.
C é crescente para todo $x \in \mathbb{R}$.
D *f* é decrescente para todo $x \in \mathbb{R}$ e $x \geq 0$.
E o valor mínimo de *f* é 0.

41 **Vunesp** Sejam *a* e *b* dois números reais positivos tais $a < b$ e $a + b = 4$. Se o gráfico da função $y = |x - a| + |x - b|$ coincide com a função $y = 2$ no intervalo $a \leq x \leq b$, calcule os valores de *a* e *b*.

42 **Mackenzie** Dada a função real definida a seguir, então a melhor representação gráfica de $y = f(|x|)$ é:

$$f(x) = \begin{cases} 2, \text{ se } x = 3 \\ \not{3}, \text{ se } x \quad 3 \end{cases}$$

A
D
B
E
C
43 **UFRGS 2019** O gráfico de f(x) está esboçado na imagem a seguir.

O esboço do gráfico de $|f(x - 3)| + 2$ está representado na alternativa

A
B

C
D
E
FRENTE 1

44 **UFMS 2020** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função modular, representada pelo gráfico a seguir:

A função *f* pode ser representada por:

A $|x| + |x + 7|$.

B $|3 - x| + |x - 4|$.

C $+x| \quad |x \quad 7|$.

D $|x + 2| + |x + 5|$.

E $|x + 9| \quad |3x + 2|$.

45 **Mackenzie** Analisando graficamente as funções (I), (II), (III) e (IV) a seguir.

I. $f(x) = x + \dfrac{(2|x|)}{x}$ de $\mathbb{R}^*$ em $\mathbb{R}$.

II. $g(x) = 3x \quad x^3$ de $\left[\ \sqrt{3}, \sqrt{3} \right]$ em $[\ 2, 2]$.

Obs : g (–1) é mínimo

III. $h(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^*_+$

IV. $t(x) = 3$, de $\mathbb{R}$ em $\{3\}$.

O número de soluções reais da equação $h(x) = f(x)$ é:

A 0

B 1

C 2

D 3

E 4

46 **Mackenzie** O gráfico que melhor representa a função $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definida por $y = 2 + |\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x|$ é:

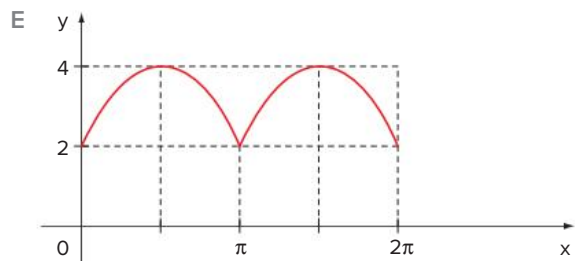
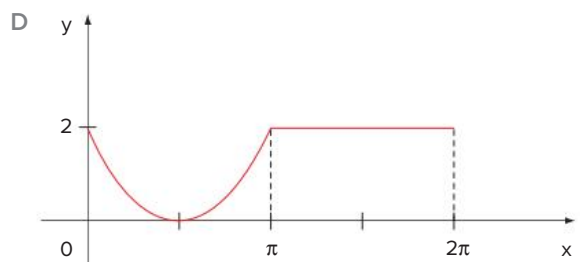
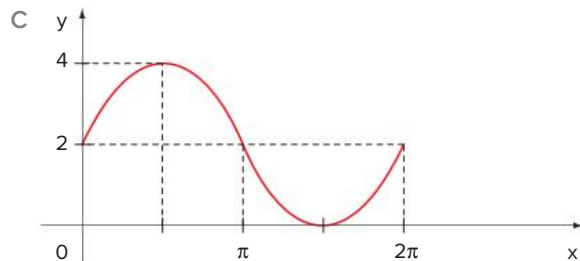
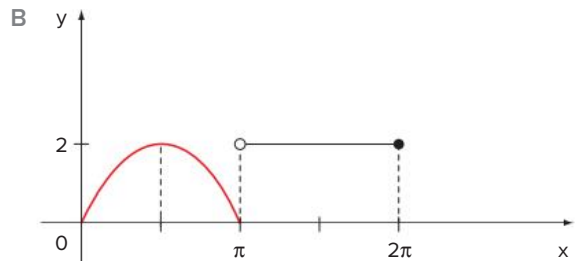
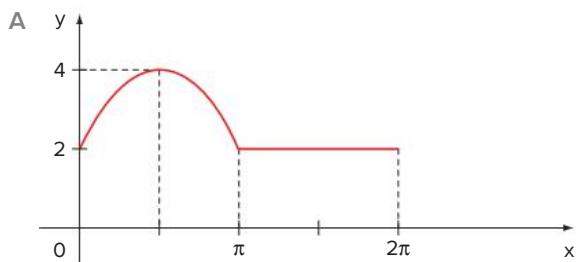
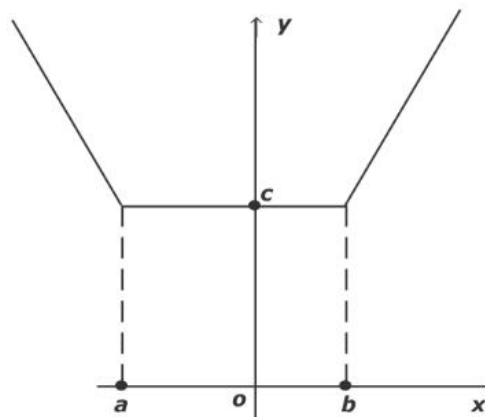
A

B

C

D

E

y
4
2
0
π
2π
x

47 **EsPCEx 2019** Sabendo que o gráfico a seguir representa a função real $f(x) = |x - 2| + |x + 3|$, então o valor de $a + b + c$ é igual a

A 7 B –6 C 4 D 6 E 10.

Texto complementar

A equação do quadrado

Utilizando a definição e os conceitos de módulo, podemos obter a equação de um quadrado no plano cartesiano.

Vamos analisar a expressão $|x| + |y| = 2$.

I. No primeiro quadrante, temos $x > 0$ e $y > 0$, resultando em uma equação $x + y = 2 \Leftrightarrow y = -x + 2$.

II. No segundo quadrante, temos $x < 0$ e $y > 0$, resultando em uma equação $\quad x + y = 2 \Leftrightarrow y = x + 2$.

III. No terceiro quadrante, temos $x < 0$ e $y < 0$, resultando em uma equação $-x - y = 2 \Leftrightarrow y = -x - 2$.

IV. No quarto quadrante, temos $x > 0$ e $y < 0$, resultando em uma equação $x \quad y = 2 \Leftrightarrow y = x \quad 2$

Podemos construir as quatro retas, cada uma no seu quadrante:

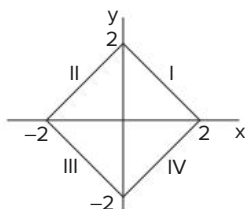



Fig. 1 Gráfico da expressão $|x| + |y| = 2$.

Temos como resultado (observe a figura anterior) um quadrado com centro na origem do sistema e diagonais paralelas aos eixos coordenados

O lado do quadrado mede $2\sqrt{2}$

Generalizando: $|x| + |y| = a$; $a \in \mathbb{R}_+^*$, centro (0; 0) e lado $a\sqrt{2}$.

Gráfico:

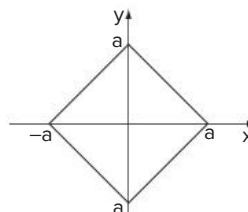



Fig. 2 Gráfico da expressão $|x| + |y| = a$.

Vamos deslocar o centro do quadrado da origem para um ponto qualquer. Observe a equação:

$$|x - 2| + |y - 3| = 2$$

Por meio de uma translação de eixos, temos:

$$X = x - 2 \text{ e } Y = y - 3$$

A origem do novo sistema é no ponto (2, 3) do sistema inicial.

Generalizando: $|x - a| + |y - b| = c$; $c \in \mathbb{R}_+^*$, é a equação de um quadrado com centro (a, b) e lado $c\sqrt{2}$

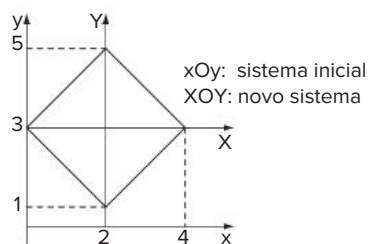



Fig. 3 Gráfico da expressão $|x - 2| + |y - 3| = 2$.

Resumindo

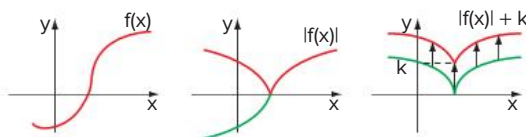
A função modular é definida algebricamente por uma dupla sentença:

$$|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

Reforce os conhecimentos da análise de sinal dos capítulos 2 e 3, principalmente o capítulo 3 sobre funções do 2º grau.

Estudar a função modular não é simplesmente "decorar" a definição, é fazer a análise do sinal da função interna ao módulo. Assim, generalizando:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x); & f(x) \geq 0 \\ -f(x); & f(x) < 0 \end{cases}$$

A construção dos gráficos é uma parte importante do capítulo, e um dos pontos interessantes é a construção geométrica do gráfico $y = |f(x)| + k$. Observe:

Quer saber mais?

Site

- Módulo de um vetor
  Disponível em: <http://pt.scribd.com/doc/89402396/aula-ga-vetor-p2-2s-07>

Exercícios complementares

1 **Fuvest** Quaisquer que sejam os números reais *a*, *b* e *c*, podemos afirmar que a equação $ax^2 + b|x| + c = 0$:

A tem, no máximo, duas raízes reais distintas.
B tem, no máximo, quatro raízes reais distintas.
C tem pelo menos uma raiz real.
D não possui raízes reais.
E tem sempre raízes distintas

2 Resolver as equações e inequações a seguir

a) $|3x + 2| = |x - 1|$

b) $|x^2 + x - 5| = |4x \quad 1|$

c) $|3x \quad 2| = 3x - 2$

d) $|x^2 \quad x \quad 4| > 2$

e) $|x \quad 1| \leq 3x - 7$

f) $|x^2 - 4| < 3x$

g) $|x + 2| + |2x - 3| < 10$

3 Determine a soma das raízes da equação:

$$|2 \quad |1 \quad |x||| = 1$$

4 Resolva a equação $|x| + |x \quad 1| = 1$

5 A soma dos inteiros que satisfazem a desigualdade $|x - 7| > |x + 2| + |x - 2|$ é:

A 14
B 0
C 2
D –15
E –18

6 Considere as funções reais *f* e *g*, tais que:

I. $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$, tem apenas uma raiz real, seu gráfico tem por eixo de simetria a reta $x = 1$ e passa pelo ponto $(2, 1)$.

II. $g(x) = mx + n$ e $g(f(x)) = -x^2 + 2x$

Analise as afirmações demonstrando-as:

a) $g^{-1}(x) = g(x)$
b) A equação $f(|x|) = 0$ tem 4 raízes distintas.
c) O conjunto-solução da inequação $f(x) \quad |g(x)| \geq 0$ é $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$.
d) A função $r(x) = f(g(x))$ é crescente para $x \leq 0$.

7 **Fatec** A igualdade $-|-x| = -(-x)$ é verdadeira para todos os elementos do conjunto:

A $\mathbb{R}$
B $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
C $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$
D $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 10\}$
E $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3\}$

8 **ITA** Sobre a equação na variável real *x*, $|||x - 1| - 3| - 2| = 0$, podemos afirmar que:

A ela não admite solução real.
B a soma de todas as suas soluções é 6.
C ela admite apenas soluções positivas.
D a soma de todas as soluções é 4.
E ela admite apenas duas soluções reais.

9 **UFJF** Sobre os elementos do conjunto-solução da equação $|x^2| - 4|x| \quad 5 = 0$, podemos dizer que:

A são um número natural e um número inteiro
B são números naturais.
C o único elemento é um número natural
D um deles é um número racional, o outro é um número irracional
E não existem, isto é, o conjunto solução é vazio

10 **EsPCEx 2020** A área da região compreendida entre o gráfico da função $f(x) = ||x \quad 4| \quad 2|$, o eixo das abscissas e as retas $x = 0$ e $x = 6$ é igual a (em unidades de área)

A 2.
B 4.
C 6.
D 10.
E 12.

11 **UFU 2018** Considere a função definida por $y = f(x) = k \cdot |x - 3|$ em que *k* é um número natural constante, *x* uma variável assumindo valores reais e $|a|$ representa o módulo do número real *a*. Representando, no sistema de coordenadas cartesianas, o gráfico de $y = f(x)$, tem-se que esse gráfico e os eixos coordenados delimitam um triângulo de área igual a $72\ cm^2$.

Nas condições apresentadas, o valor de *k*, em cm, é um número

A quadrado perfeito.
B ímpar.
C múltiplo de 3.
D divisível por 5.

Allexxandar/Shutterstock.com

FRENTE 1

CAPÍTULO

7

Trigonometria – conceitos básicos

Trigonometria trata das relações entre os lados e os ângulos de triângulos, sendo dividida em ramos como a Trigonometria Plana e a Esférica. Ela começou com as civilizações babilônica e egípcia e desenvolveu-se na Antiguidade graças aos gregos e indianos, e um dos mais famosos exemplos de sua utilização foi a medição do raio da Terra por Eratóstenes. A partir do século VIII d.C., astrônomos islâmicos aperfeiçoaram as descobertas gregas e indianas, notadamente em relação às funções trigonométricas.

A Ttrigonometria moderna começou com o trabalho de matemáticos no Ocidente a partir do século XV, como uma Matemática eminentemente prática, para determinar distâncias que não podiam ser medidas diretamente. Também serviu à navegação, à agrimensura e à astronomia. Ao lidar com a determinação de pontos e distâncias em três dimensões, a Trigonometria Esférica ampliou sua aplicação à Física, à Química e a quase todos os ramos da Engenharia, em especial no estudo de fenômenos periódicos como a vibração do som e o fluxo de corrente alternada.

Medidas de arcos

No capítulo 2 de Geometria vimos duas unidades de medidas de ângulos: o grau (°) e o grado (gr). Vamos, agora, introduzir o conceito de arco.

Observe a figura 1.

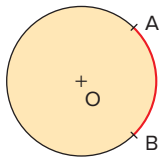



Fig. 1 Arco $\overset{\frown}{AB}$.

Considere dois pontos sobre a circunferência e divida a circunferência em duas partes denominadas arcos. Simbolicamente: $\overset{\frown}{AB}$.

Mas essa nomenclatura cria uma ambiguidade Temos dois arcos $\overset{\frown}{AB}$, um maior e outro menor. A solução é marcar outro ponto para diferenciar os arcos, observe:

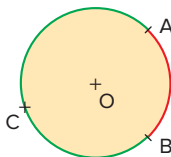
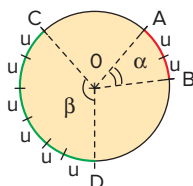



Fig. 2 Notação de arcos.

Na figura 2, observe os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{ACB}$. Agora, compare o tamanho de dois arcos, na figura 3.

Arcos: $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$

$med\ (\overset{\frown}{CD}) = 6u$

$med\ (\overset{\frown}{AB}) = 2u$

Fig. 3 Medida de arcos.

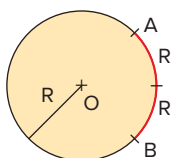
Definimos o arco unitário *u* como sendo a nossa unidade de medida e verificamos quantas vezes o arco *u* "cabe" dentro dos arcos dados $\overset{\frown}{CD}$ e $\overset{\frown}{AB}$.

Radiano

O radiano (simbolicamente rad) é um arco unitário criado para ser a unidade básica dos arcos, juntamente com o grau.

Assim:

1 u = raio da circunferência que contém o arco.

Observe:

$med\ (\overset{\frown}{AB}) = 2R$

Resumindo:

$(\overset{\frown}{AB}) = 2\ rad$

Fig. 4 A unidade radiano.

Se "retificarmos" o arco $\overset{\frown}{AB}$, obtemos um segmento $\overline{AB}$ cuja medida é 2R. Reforce a ideia com o exemplo a seguir.

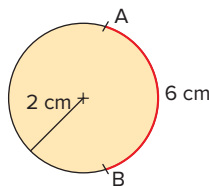
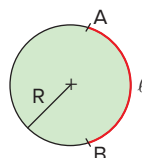



Fig. 5 Exemplo da unidade radiano.

! Atenção

Para medir um arco $\overset{\frown}{AB}$ em radianos, divida a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ pelo raio da circunferência

Circunferência e círculo são conjuntos diferentes Circunferência é só a linha e círculo é a linha e os pontos internos.

Medir uma grandeza significativa é comparar suas dimensões com uma outra definida como padrão (unidade).

A etimologia da palavra trigonometria vem do grego *tri* (três) *gonos* (ângulos) *metros* (medida).

Relacionando o grau e o radiano

Sabemos da Geometria Plana que o comprimento de uma circunferência de raio R é: $C = 2\pi R$; assim, a circunferência toda mede:

$$\text{Circunferência} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi \text{ rad, ou seja:}$$

$$2\pi \text{ rad} \equiv 360°$$

Observe, a seguir, os exercícios de transformações de unidades

Exercícios resolvidos

1 Transforme 135° em radianos.

Resolução:

$$\begin{matrix} 360° & 2\pi \\ 135° & x \end{matrix} \quad \therefore\ 360x = (135)\ (2\pi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{270\pi}{360} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

2 Transforme $\frac{7\pi}{5}$ rad em graus.

Resolução:

$$\begin{matrix} 360° & \text{——} & 2\pi \\ x & & \frac{7\pi}{5} \end{matrix} \quad \therefore \quad 2\pi x = (360)\cdot\left(\frac{7\pi}{5}\right) \Rightarrow x = 252°$$

3 Calcule quantos graus tem 1 rad.

Resolução:

$$\begin{matrix} 360° & 2\pi \\ x & 1 \end{matrix} \quad 2\pi x = 360 \Rightarrow$$

$$x = \frac{180°}{\pi} = \frac{180°}{3{,}1416} = 57{,}295°$$

(o que equivale a 57°17'44")

! Atenção

Vamos relembrar os problemas dos ângulos dos ponteiros de um relógio

Ponteiro pequeno

30° 60 min

Ponteiro grande

360° 60 min

4 Calcule o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 12 h e 50 min.

ângulo = 60° + x

Resolução:

- Marcamos a 1ª hora inteira antes (no caso 12 h).
- Marcamos o horário desejado.
- O ponteiro pequeno percorre um ângulo *x*.
- O ângulo desejado mede 60° + x.
- Cálculo do *x*:

$$\begin{matrix} 30° & \text{——— } 60 \text{ min} \\ x & \text{——— } 50 \text{ min} \end{matrix}$$

$60x = 30 \cdot 50 \Rightarrow x = 25°$

- Ângulo = 60° + 25° = 85°

Ciclo trigonométrico

Considere uma circunferência de raio 1 centrada na origem de um sistema cartesiano. Na figura 6, o ciclo trigonométrico foi dividido em quatro regiões chamadas quadrantes.

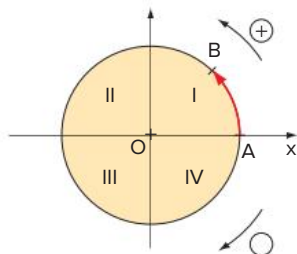



Fig. 6 Ciclo trigonométrico.

O comprimento dessa circunferência vale 2π, (sendo R = 1).

Vamos marcar um ponto B na circunferência e adotar o ponto A como sendo a origem de todos os arcos. A medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ será associada a um número real, o arco também terá um sentido, indicado na figura 7.

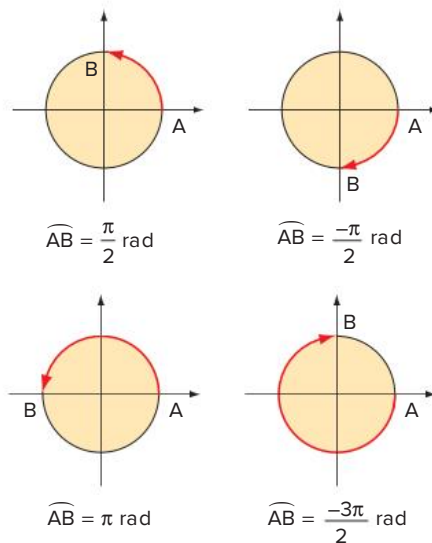



Fig. 7 Representação dos arcos orientados.

No ciclo trigonométrico, temos a liberdade de dar quantas voltas quisermos, tanto no sentido horário quanto no anti-horário. Essa possibilidade permite o seguinte:

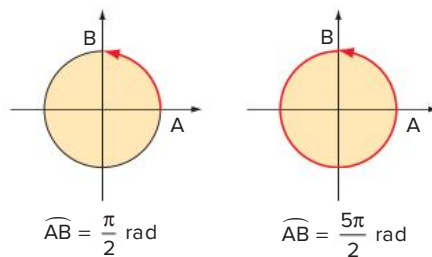



Fig. 8 Arcos com as mesmas extremidades.

Os dois arcos terminam no ponto B, mas o primeiro é menor do que o segundo, e a diferença entre eles é de 2π (uma volta).

Essa ideia sugere que um único ponto B sob a circunferência trigonométrica pode representar infinitos arcos trigonométricos, basta alterarmos o número de voltas e o sentido. Observe a figura 9.

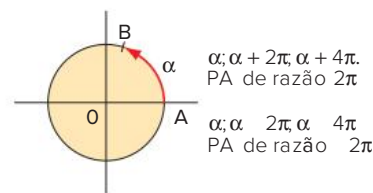



Fig. 9 Arcos côngruos.

Os arcos representados na figura 9 possuem extremidade em B, mas número de voltas e sentidos diversos.

Esses arcos são chamados de **arcos côngruos**. Eles possuem as mesmas **propriedades trigonométricas**. Podem, algebricamente, ser representados pelo conjunto:

$\widehat{AB} = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \widehat{AB} = \alpha + 2K\pi;\ K \in \mathbb{Z}\}$

$|K|$: representa o número de voltas.

$K > 0$: voltas no sentido anti-horário.

$K < 0$: voltas no sentido horário.

Na divisão de números inteiros: $\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline R & q \end{array}$, temos

$D = d \cdot q + R$ e $0 \le R < d$

Vamos denominar "família" de arcos todos os arcos que possuem a mesma extremidade

Dois arcos são chamados de semicôngruos quando possuem extremidades no mesmo diâmetro.

Exercícios resolvidos

5 Represente no ciclo trigonométrico os arcos:

a) 13π

b) $572°$

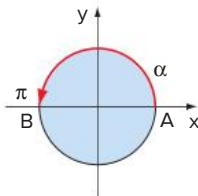
c) $\dfrac{7\pi}{3}$

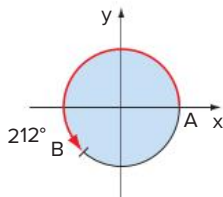
d) -17π

Resolução:

a) Obviamente esse arco deu mais de uma volta, mas quantas? Faça a divisão: $\begin{array}{l|l} 13\pi & 2\pi \\ \hline \pi & 6 \end{array}$

Temos 6 voltas no sentido anti-horário e mais π radianos?

$13\pi = \pi + 6 \cdot (2\pi)$

13π e π são arcos côngruos.

b) $\begin{array}{l|l} 572° & 360° \\ \hline 212° & 1 \end{array} \Rightarrow 572° = 212° + 1 \cdot (360°)$

c) Vamos utilizar o seguinte artifício neste exemplo:

$$\begin{array}{l|l} \frac{7\pi}{3} & \frac{6\pi}{3} \\ \hline \frac{\pi}{3} & 1 \end{array}$$

Transformamos 2π em $\dfrac{6\pi}{3}$ para facilitar a divisão:

$\dfrac{7\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} + 1 \cdot (2\pi)$

d) Vamos fazer a divisão desprezando, a princípio, o sinal

$\begin{array}{l|l} 17\pi & 2\pi \\ \hline \pi & 8 \end{array} \Rightarrow 17\pi = \pi + 8\ (2\pi)$

Ajustando os sinais, temos: $-17\pi = -\pi + (-8) \cdot 2\pi$

6 Represente no ciclo trigonométrico as "famílias" de arcos representadas por:

a) $\left\{\widehat{AB} \in \mathbb{R} \mid \widehat{AB} = \pi + K\pi;\ K \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\left\{\widehat{AB} \in \mathbb{R} \mid \widehat{AB} = K\dfrac{\pi}{2};\ K \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $\left\{\widehat{AB} \in \mathbb{R} \mid \widehat{AB} = \dfrac{\pi}{6} + K\pi;\ K \in \mathbb{Z}\right\}$

Resolução:

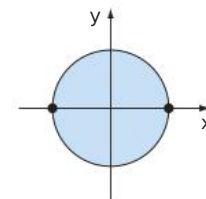
a) $\widehat{AB} = \pi + K\pi$

$K = 0 \Rightarrow \widehat{AB} = \pi$

$K = 1 \Rightarrow \widehat{AB} = 2\pi$

$K = 2 \Rightarrow \widehat{AB} = 3\pi$ (repetição)

$K \Longrightarrow 1 \quad \not\Rightarrow \widehat{AB} \quad 0$ (repetição)

para todos os demais $K \in \mathbb{Z}$, teremos as mesmas extremidades, logo:

b) $\widehat{AB} = K\dfrac{\pi}{2}$

$K = 0 \Rightarrow \widehat{AB} = 0$

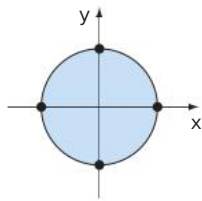
$K = 1 \Rightarrow \widehat{AB} = \dfrac{\pi}{2}$

$K = 2 \Rightarrow \widehat{AB} = \pi$

$K = 3 \Rightarrow \widehat{AB} = \dfrac{3\pi}{2}$

$K = 4 \Rightarrow \widehat{AB} = 4\pi$ (repetição)

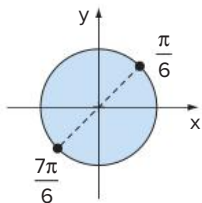
$K = -1 \Rightarrow \widehat{AB} = \dfrac{-\pi}{2}$ (repetição)

para todos os demais $K \in \mathbb{Z}$, teremos somente arcos côngruos, logo:

c) $\widehat{AB} = \frac{\pi}{6} + K\pi$

$K = 0 \Rightarrow \widehat{AB} = \frac{\pi}{6}$

$K = 1 \Rightarrow \widehat{AB} = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$

$K = 2 \Rightarrow \widehat{AB} = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$ (repetição)

Assim:

7 Determine a equação da família dos arcos dada a sua representação no ciclo trigonométrico.

a)

b)

c)

d)

Resolução:

a) Os dois pontos dividem a circunferência em arcos iguais, isso indica que eles fazem parte da mesma família.

Para montar a equação da família, escolha qual quer arco côngruo e some $K\pi$. Observe:

$\widehat{AB} = \frac{\pi}{2} + K\pi;\ K \in \mathbb{Z}$, mas também poderia ser:

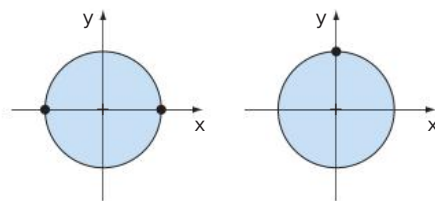
$\widehat{AB} = \frac{3\pi}{2} + K\pi;\ K \in \mathbb{Z}$ ou $\widehat{AB} = \frac{\pi}{2} + K\pi;$

$K \in \mathbb{Z}$, dentre outras infinitas representações.

b) $\widehat{AB} = \pi + 2K\pi;\ K \in \mathbb{Z}$

c) $\widehat{AB} = \frac{K\pi}{4};\ K \in \mathbb{Z}$

(As extremidades dos arcos são vértices de um octógono regular).

d) Neste exemplo, os três pontos não dividem a circunferência em três partes iguais, logo não pertencem à mesma família. Vamos dividir o problema.

$\widehat{AB} = K\pi;\ K \in \mathbb{Z}$ ou $\widehat{AB} = \frac{\pi}{2} + 2K\pi;\ K \in \mathbb{Z}$

Primeira determinação positiva

Também pode ser chamado de menor determinação positiva o arco côngruo de uma família que possui a menor medida positiva ou nula.

Exercício resolvido

8 Calcule a primeira determinação positiva:

• 1000°

Resolução:

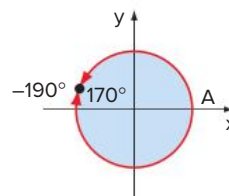
$$\begin{array}{r|l} 1000° & 360° \\ \hline 280° & 2 \end{array} \Rightarrow 1000° = 280° + (2) \cdot 360°$$

280° é a primeira determinação positiva.

• –2350°

Resolução:

$$\begin{array}{r|l} 2350° & 360° \\ \hline -2160° & 6 \\ \hline 190° & \end{array} \Rightarrow -2350° = (-190°) + (-6) \cdot 360°$$

É claro que –190° não pode ser a primeira determinação positiva. Observe:

170° é côngruo de –190°, logo 170° é a primeira determinação positiva.

Revisando

1 Transforme as medidas de graus para radianos na tabela abaixo.

0°		210°	
30°		225°	
45°		240°	
60°		270°	
90°		300°	
120°		315°	
135°		330°	
150°		360°	
180°		540°	

2 Calcule o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 16 h e 40 min.

3 Calcule a primeira determinação positiva dos arcos:

a) 1730°

b) 1000°

c) $\frac{23\pi}{4}$ rad

Exercícios propostos

1 Converter em graus as seguintes medidas em radianos:

a) $\frac{5\pi}{3}$ c) $\frac{4\pi}{3}$ e) 4π

b) $\frac{\pi}{8}$ d) $\frac{\pi}{20}$

2 Converter em radianos as seguintes medidas dadas em graus:

a) 450° c) 210° e) 252°

b) 225° d) 330°

3 **EEAR 2019** Gabriel verificou que a medida de um ângulo é $\frac{3\pi}{10}$ rad. Essa medida é igual a

A 48° B 54° C 66° D 72°

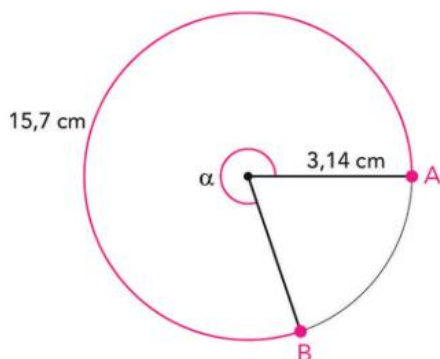
4 Sobre uma circunferência de raio 1,6 cm marca-se um arco de comprimento 6,4 cm. Calcular a medida do arco, em radianos.

5 Sobre uma circunferência de raio 10 cm marca-se um arco $\overset{\frown}{AB}$ tal que a corda $\overline{AB}$ mede 10 cm. Calcular a medida do arco em radianos.

6 **Fuvest** Um arco de circunferência mede 300°, o seu comprimento é 2 km. Qual o número inteiro mais próximo da medida do raio, em metros?

A 157 C 382 E 764

B 284 D 628

7 **Uerj 2019** Observe no esquema um círculo de raio igual a 3,14 cm. Seu maior arco, AB, correspondente ao ângulo central α, tem comprimento de 15,7cm.

Calcule, em graus, a medida do ângulo α.

8 **Fuvest** Considere um arco $\overset{\frown}{AB}$ de 110° numa circunferência de raio 10 cm. Considere, a seguir, um arco $\overset{\frown}{A'B'}$ de 60° numa circunferência de raio 5 cm.
Dividindo-se o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ pelo do arco $\overset{\frown}{A'B'}$ (ambos medidos em cm), obtém-se:

A $\frac{11}{6}$ B 2 C $\frac{11}{3}$ D $\frac{22}{3}$ E 11

9 **Fuvest** O perímetro de um setor circular de raio R e ângulo central medindo α radianos é igual ao perímetro de um quadrado de lado R. Então α é igual a:

A $\frac{\pi}{3}$ B 2 C 1 D $\frac{2\pi}{3}$ E $\frac{\pi}{2}$

10 Em um círculo, um ângulo central intercepta um arco de 0,1 m, e o raio mede 20 cm Quantos radianos mede tal ângulo?

11 **Fuvest (Adapt.)** Considere um arco $\overset{\frown}{AB}$ de 120° em uma circunferência de raio 10 cm. Considere, a seguir, um arco $\overset{\frown}{A'B'}$ de 60° em uma circunferência de raio 10 cm. Dividindo-se o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ pelo do arco $\overset{\frown}{A'B'}$ (ambos medidos em cm), obtém-se:

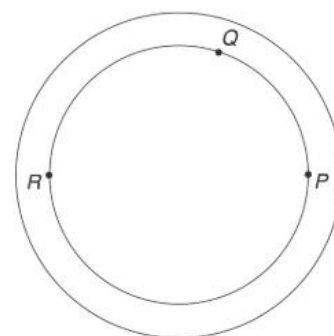
A $\frac{11}{6}$ D $\frac{22}{3}$

B 2 E 11

C $\frac{11}{3}$

12 **Fuvest (Adapt.)** O perímetro de um setor circular de raio R e ângulo central medindo α radianos é igual ao perímetro de um triângulo equilátero de lado R. Então, α é igual a:

A $\frac{\pi}{3}$ B 2 C 1 D $\frac{2\pi}{3}$ E $\frac{\pi}{2}$

13 **Enem PPL 2019** Uma pista circular delimitada por duas circunferências concêntricas foi construída. Na circunferência interna dessa pista, de raio 0,3 km, serão colocados aparelhos de ginástica localizados nos pontos P, Q e R, conforme a figura.

O segmento $\overset{\frown}{RP}$ é um diâmetro dessa circunferência interna, e o ângulo $P\hat{R}Q$ tem medida igual a $\frac{\pi}{5}$ radianos
Para uma pessoa ir do ponto P ao ponto Q andando pela circunferência interna no sentido anti horário, ela percorrerá uma distância, em quilômetro, igual a

A 0,009π D 0,12π

B 0,03π E 0,18π

C 0,06π

14 Represente os arcos no ciclo trigonométrico, indicando o quadrante em que se encontra sua extremidade.

a) $\frac{\pi}{3}$ rad

b) 135°

c) $\frac{\pi}{12}$ rad

d) 240°

e) $\frac{5\pi}{3}$ rad

f) $-\frac{2\pi}{3}$ rad

15 Quais dos seguintes pares de arcos são côngruos?

A 65° e 1145°

B $\frac{2\pi}{3}$ rad e $\frac{16\pi}{3}$ rad

C $\frac{19\pi}{4}$ rad e $\frac{37\pi}{4}$ rad

D $\frac{6\pi}{8}$ rad e $\frac{18\pi}{8}$ rad

16 **UFGO** O conjunto de todos os valores de x, para que o ângulo $\frac{x}{x^2+1}\pi$ radianos pertença ao 1º quadrante, é representado por qual intervalo?

17 Encontre a primeira determinação positiva dos seguintes arcos:

a) 2390°

b) 5450°

c) $\frac{26}{3}\pi$ rad

d) 60°

e) $\frac{17\pi}{3}$ rad

18 Os arcos positivos, menores que $\frac{50\pi}{9}$ rad, que são côngruos de –18° são:

A 342° e 720°

B 302° e 702°

C $\frac{19\pi}{10}$ e $\frac{39\pi}{10}$

D $\frac{17\pi}{10}$ e $\frac{37\pi}{10}$

19 Considerando os arcos de medidas 1845°, 440° e 900°, qual deles tem a menor primeira determinação positiva?

20 Em um sorteio utilizou-se uma roda dividida em 360 números, como o ciclo trigonométrico. Ao ser girado no sentido anti-horário, o marcador do número do ganhador, que originalmente estava no número 90, formou um ângulo de 2340°.
Qual foi o número sorteado?

21 **UEG 2016** Na competição de *skate* a rampa em forma de U tem o nome de *vert*, onde os atletas fazem diversas manobras radicais. Cada uma dessas manobras recebe um nome distinto de acordo com o total de giros realizados pelo skatista e pelo *skate*, uma delas é a “180 *allie frontside*”, que consiste num giro de meia-volta.
Sabendo-se que 540° e 900° são côngruos a 180°, um atleta que faz as manobras 540 *McTwist* e 900 realizou giros completos de

A 1,5 e 2,5 voltas respectivamente.

B 0,5 e 2,5 voltas respectivamente.

C 1,5 e 3,0 voltas respectivamente.

D 3,0 e 5,0 voltas respectivamente.

E 1,5 e 4,0 voltas respectivamente.

22 Determine a expressão geral de x, sabendo que: $\frac{\pi}{4}-3x$ e $2x+\frac{\pi}{2}$ são côngruos.

23 Calcule x, sabendo que os arcos $6x + 36°$ e $3x - 24°$ são semicôngruos.

24 Sendo m e n números inteiros, provar a igualdade entre as famílias:

a) $(4n+1)\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+2m\pi$

b) $n \cdot 120° + 60° = m \cdot 240° \pm 60°$

25 **FGV** É uma hora da tarde; o ponteiro dos minutos coincidirá com o ponteiro das horas, pela primeira vez, aproximadamente, às:

A 13h5min23s

B 13h5min25s

C 13h5min27s

D 13h5min29s

E 13h5min31s

26 **UFMS 2020** Às 12 horas, os ponteiros dos minutos e das horas se superpõem, e às 13 horas eles fazem um ângulo de 30°. Seguindo esse raciocínio, o valor das somas dos ângulos formados às 15h30min e às 18h40min é:

A 150°.

B 115°.

C 75°.

D 40°.

E 35°.

27 **Uece 2019** Em um relógio analógico circular usual, no momento em que está registrando 10 horas e trinta e cinco minutos, a medida do menor ângulo entre os ponteiros indicadores de horas e minutos é

A 108 graus.

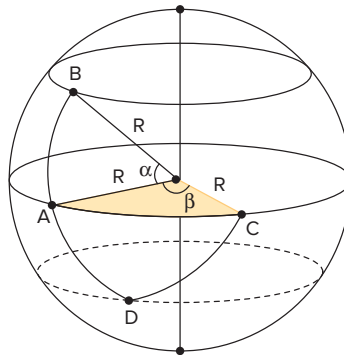
B 107 graus e trinta minutos.

C 109 graus.

D 108 graus e trinta minutos.

Textos complementares

Trigonometria esférica

Para determinarmos a posição de um ponto, basta o cruzamento de duas linhas. Essa ideia geral pode ser aplicada na superfície de uma esfera. Observe a figura a seguir.

Trigonometria esférica.

Toda seção plana de uma esfera é um círculo. Se o plano passa pelo centro da esfera, o círculo é máximo. Nesse caso, temos o chamado plano do Equador.

Cálculos paralelos ao plano do Equador determinam infinitos pontos sobre sua circunferência.

A medida do arco $\widehat{AB}$ em graus é a chamada latitude do ponto B (α é a latitude). Mas a distância entre os pontos AB é dada por $AB = \alpha R$ (α em radianos).

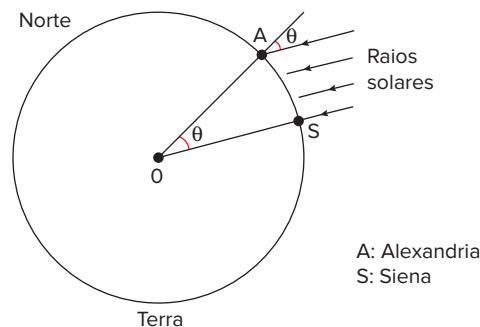
A medida do arco $\widehat{AC}$ em graus é a chamada longitude do ponto C (β é a longitude) A medida de $AC = \beta R$ (β em radianos)

Temos então um sistema de coordenadas sobre a superfície da esfera feita de arcos com as suas respectivas medidas em graus (α, β).

Observando a figura, os pontos A, D e C, sobre a superfície da esfera e seus máximos, determinam um "triângulo esférico".

Eratóstenes e o cálculo do raio da Terra

Eratóstenes (276 194 a.C) foi bibliotecário-chefe do museu de Alexandria e, por volta de 240 a C , efetuou uma medição famosa da circunferência máxima da Terra Por meio de observações de alguns fatos diários, notou que, ao meio-dia do solstício de verão, uma vareta na vertical não projetava nenhuma sombra, e que a imagem do Sol podia ser vista refletida nos poços mais fundos. Essas observações foram feitas na cidade de Siena, ao passo que em Alexandria (que ele acreditava estar no mesmo meridiano de Siena) os raios do Sol inclinavam-se de $\frac{1}{50}$ de um círculo completo em relação à vertical. A distância de Siena e Alexandria é de cerca de 800 km.

Com essas informações, Eratóstenes imaginou o seguinte:

Como os raios solares são praticamente paralelos, temos que:

$$A\hat{O}S = \theta = \frac{1}{50} \cdot \text{círculo} = 7{,}2° = \frac{7{,}2\pi}{180} \text{ radianos}$$

Assim, $\theta \text{ (em radianos)} = \frac{\widehat{AS}}{R} \Rightarrow \frac{7{,}2\pi}{180} = \frac{800\text{km}}{R} \Rightarrow R \approx 6\,366 \text{ km}$

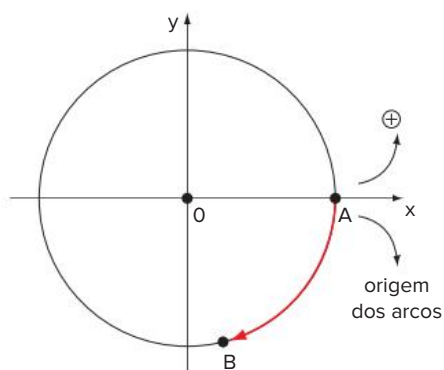
Sabemos que o valor atual e muito mais preciso para o raio da Terra é de cerca de 6378 km; portanto, um resultado excelente, tendo em vista a simplicidade do cálculo.

Atividade

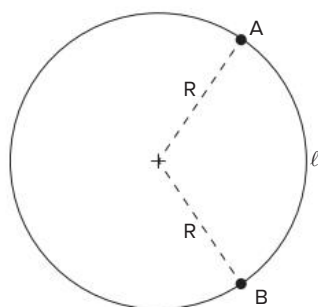
1 Calcule o comprimento da circunferência que um plano paralelo ao Equador determina sobre a Terra, sabendo que o plano possui latitude de 15° e o raio da Terra é de aproximadamente 6378 km.

Resumindo

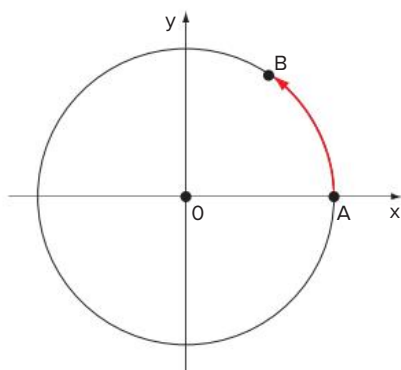
Um dos conceitos básicos da Trigonometria é a diferença entre arco geométrico e arco trigonométrico. No arco geométrico, bastam os pontos da circunferência e calcular sua medida. Para caracterizarmos o arco trigonométrico, utilizamos o ciclo trigonométrico, em que os arcos terão uma orientação e suas medidas podem ultrapassar 360° (2π radianos) e também podem ser negativas.

Por exemplo:

$\overset{\frown}{AB} = 60°$ (arco geométrico)

$\overset{\frown}{AB} = 60°$ (arco trigonométrico)

Unidade de medida básica: Radiano

Medida de $\overset{\frown}{AB}$ em radianos $= \dfrac{\ell}{R}$

Arcos côngruos

São arcos que possuem as mesmas extremidades no ciclo trigonométrico.

Observe todas as medidas côngruas ao arco $\overset{\frown}{AB}$.

$(...; \alpha - 6\pi; \alpha - 4\pi; \alpha - 2\pi; \alpha; \alpha + 2\pi; \alpha + 4\pi; \alpha + 6\pi)$

Genericamente: $\overset{\frown}{AB} = \alpha + 2k\pi;\ K \in \mathbb{Z}$

$\alpha > 0$ é a primeira determinação positiva de $\overset{\frown}{AB}$

Quer saber mais?

Site

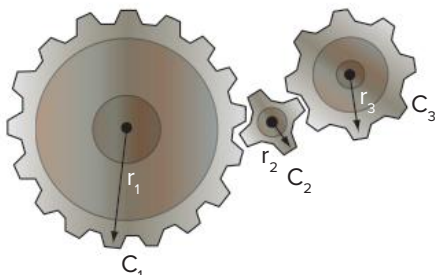
- Uma breve história da Trigonometria
  Disponível em: <www.mat.ufrgs.br/~portosil/trigapl.html>.

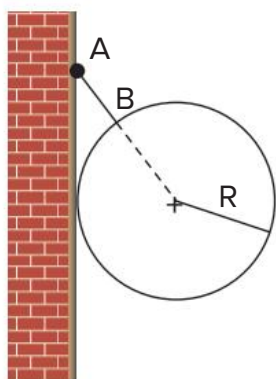
Exercícios complementares

1 **Fuvest** Quais os arcos côngruos de $\frac{25\pi}{4}$ compreendidos entre -3π e π?

2 Para abrir um determinado cofre de segredo giratório é necessário posicionar o ponteiro da chave no zero e realizar os seguintes comandos:
- Girar 135° no sentido horário;
  Girar 60° no sentido anti horário;
  Girar 45° no sentido horário;
- Girar 30° no sentido anti-horário.

Ao abrir o cofre, qual será o menor ângulo formado entre o ponteiro da chave e a posição zero?

3 **UFPE** Três coroas circulares dentadas C_1, C_2 e C_3 de raios $r_1 = 10$ cm, $r_2 = 2$ cm e $r_3 = 5$ cm, respectivamente, estão perfeitamente acopladas como na figura a seguir. Girando-se a coroa C_1 de um ângulo de 41° no sentido horário, quantos graus girará a coroa C_3?

4 Em que quadrantes estão as extremidades dos arcos $K \cdot \pi + (-1)^K \cdot \frac{\pi}{3}$ sendo $K \in \mathbb{Z}$?

5 A esfera representada na figura a seguir tem raio igual a R e está presa no ponto A e encostada na parede A corda $\overline{AB}$ mede R. Determine o valor do ângulo entre a corda e a parede (em radianos).

6 Provar que os arcos da família $(-1)^K \cdot \alpha + K\pi$; $K \in \mathbb{Z}$ e $\alpha \in 1^{\underline{o}}$ quadrante, são representados no ciclo trigonométrico por pontos simétricos em relação ao eixo *y*.

7 A diferença dos inversos das medidas de um arco em graus e em grados é igual ao quociente de sua medida em radianos por 2π. Determinar a medida desse arco em graus.

8 Demonstrar que os arcos compreendidos nas expressões: $\pm 30^\circ + k \cdot 120^\circ$ e $30^\circ + 60^\circ \cdot h$, k e h $\in \mathbb{Z}$ são os mesmos.

9 Calcule *x* em cada arco, sabendo que:

a) $20^\circ + 3x$ e x são complementares;

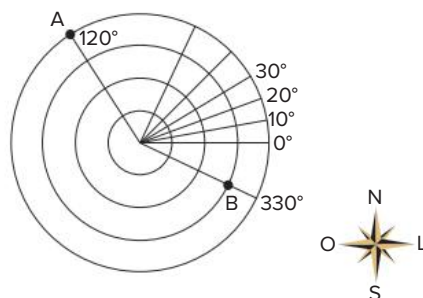
b) $2x \quad \frac{\pi}{3}$ e $3x + \frac{\pi}{2}$ são complementares;

c) x e $2\pi \quad$ x são suplementares

10 Em um círculo, um ângulo central de 60° intercepta um arco de 2π cm de comprimento. Calcular o raio desse círculo.

11 O ângulo sob o qual se vê a Lua é aproximadamente 32' e a distância da Lua à Terra é de aproximadamente 60 raios terrestres (raio da Terra 6000 km). Calcule o diâmetro da Lua.

12 Em um determinado jogo *online*, para indicar objeti vos, os jogadores utilizam-se das posições da rosa dos ventos.
Dentro de uma partida, um jogador recebeu a in formação que um dos objetivos estava localizado a Sudeste Considerando que esse jogador estava olhando em direção ao Norte, qual a menor amplitude possível, em graus, e em qual sentido esse jogador deverá realizar o giro.

13 O radar é um aparelho que usa o princípio da reflexão de ondas para determinar a posição de um objeto que se encontra distante ou encoberto por nevoeiro ou nuvem. A posição do objeto é indicada na forma de um ponto luminoso que aparece na tela do radar, que apresenta ângulos e círculos concêntricos, cujo centro representa a posição do radar, conforme ilustra a figura a seguir.

Considere que os pontos A e B da figura sejam na vios detectados pelo radar, o navio A está a 40 km do radar e o navio B, a 30 km. Com base nessas infor mações e desconsiderando as dimensões dos navios, julgue os itens que se seguem.

- A distância entre os navios A e B é maior que 69 km.
- Se, a partir das posições detectadas pelo radar, os navios A e B começarem a se movimentar no mesmo instante, em linha reta, com velocidades contantes iguais, o navio A para o leste e o navio B para o norte, então eles se chocarão.
- A partir da posição detectada pelo radar, caso B se movimente sobre um circulo de raio igual a 30 km, no sentido anti horário, com velocidade constante de 40 km/h, então em 10 min, o navio B percorrerá um arco correspondente a $(40/\pi)°$.

14 **Enem 2018** A rosa dos ventos é uma figura que representa oito sentidos, que dividem o círculo em partes iguais.

Uma câmera de vigilância está fixada no teto de um *shopping* e sua lente pode ser direcionada remotamente, através de um controlador, para qualquer sentido. A lente da câmera está apontada inicialmente no sentido Oeste e o seu controlador efetua três mudanças consecutivas, a saber:

- 1ª mudança: 135° no sentido anti-horário;
- 2ª mudança: 60° no sentido horário;
- 3ª mudança: 45° no sentido anti-horário.

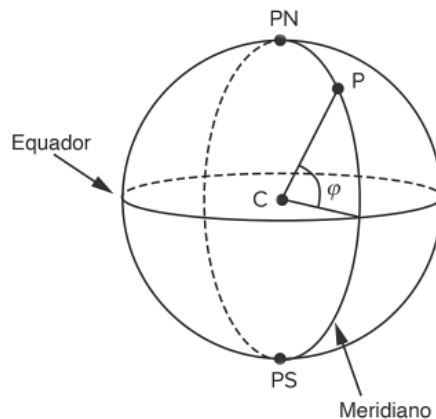
Após a 3ª mudança, ele é orientado a reposicionar a câmera, com a menor amplitude possível, no sentido Noroeste (*NO*) devido a um movimento suspeito de um cliente.

Qual mudança de sentido o controlador deve efetuar para reposicionar a câmera?

A 75° no sentido horário.
B 105° no sentido anti-horário.
C 120° no sentido anti-horário.
D 135° no sentido anti horário.
E 165° no sentido horário.

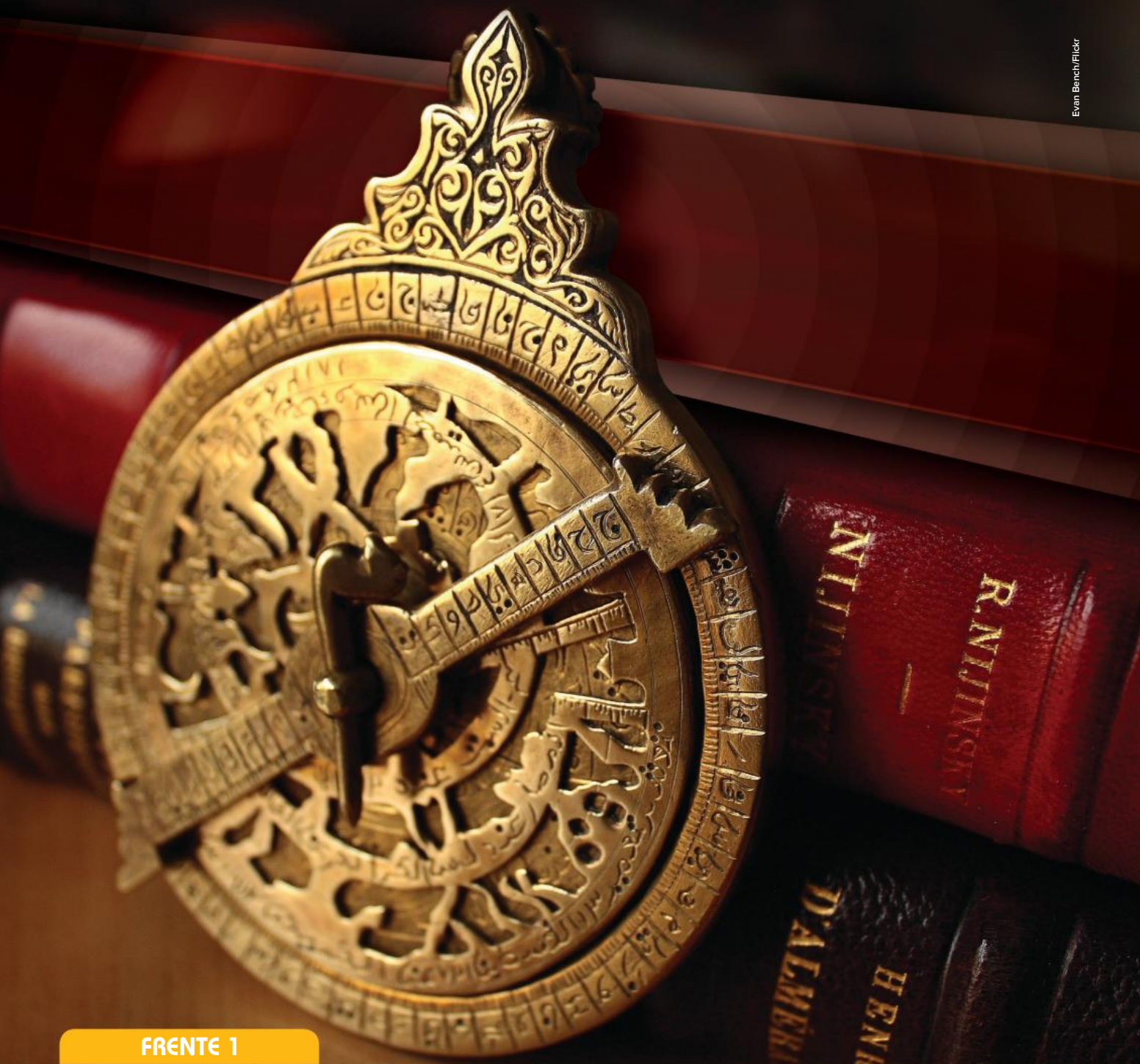
15 **Enem PPL 2019** As coordenadas usualmente utilizadas na localização de um ponto sobre a superfície terrestre são a latitude e a longitude. Para tal, considera-se que a Terra tem a forma de uma esfera.

Um meridiano é uma circunferência sobre a superfície da Terra que passa pelos polos Norte e Sul, representados na figura por PN e PS. O comprimento da semicircunferência que une os pontos PN e PS tem comprimento igual a 20016 km. A linha do Equador também é uma circunferência sobre a superfície da Terra, com raio igual ao da Terra, sendo que o plano que a contém é perpendicular ao que contém qualquer meridiano.

Seja P um ponto na superfície da Terra, C o centro da Terra e o segmento $\overline{PC}$ um raio, conforme mostra a figura. Seja φ o ângulo que o segmento $\overline{PC}$ faz com o plano que contém a linha do Equador. A medida em graus de φ é a medida da latitude de P.

Suponha que a partir da linha do Equador um navio viaja subindo em direção ao Polo Norte, percorrendo um meridiano, até um ponto P com 30 graus de latitude.

Quantos quilômetros são percorridos pelo navio?

A 1668
B 3336
C 5004
D 6672
E 10008

Evan Bench/Flickr

FRENTE 1

CAPÍTULO

8

Funções trigonométricas básicas – seno e cosseno

Hiparco (séc. II a.C.) foi um dos fundadores da trigonometria e inventor do astrolábio, instrumento naval antigo utilizado para medir a altura dos astros e determinar a posição deles no céu.

Seno e cosseno no triângulo retângulo

O capítulo de triângulo retângulo, em geometria plana, apresenta as definições de seno e cosseno como sendo razões entre lados do triângulo retângulo, observe:

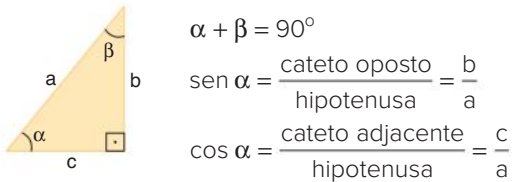



Fig 1 Triângulo retângulo.

Mas existe uma grande limitação da trigonometria do triângulo retângulo, o valor do ângulo α é tal que $0 < \alpha < 90°$. Essa limitação não condiz com o conceito de arco apresentado no capítulo 7. No ciclo trigonométrico, podemos variar o K (número de voltas) indeterminadamente.

Precisamos então complementar o conceito de seno e cosseno para **funções trigonométricas seno** e **cosseno**.

Função seno

Definição

Considere o ciclo trigonométrico com origem dos arcos em A e, $x \in \mathbb{R}$, a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ em radianos.

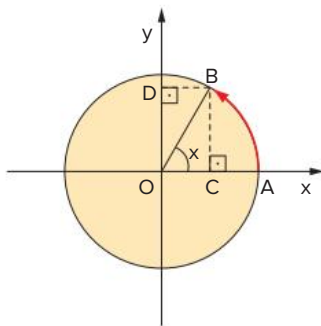



Fig. 2 Seno.

O ângulo $A\hat{O}B = x$ é chamado ângulo central, e possui medida igual ao arco $\overset{\frown}{AB}$. Logo $\overset{\frown}{AB} = x$. No ΔBOC, retângulo em C, podemos aplicar $\text{sen}\,x = \dfrac{BC}{OB}$, como $BC = OD$ e $OB = 1$, concluímos que o seno do arco de medida *x* é o segmento OD, projeção da extremidade B do arco no eixo *y*. Observe a construção geométrica do sen x:

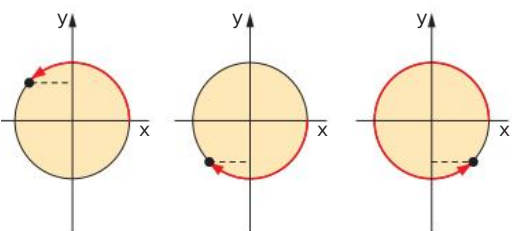
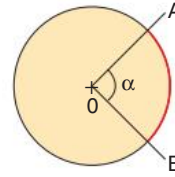



Fig. 3 Construção geométrica do seno.

O eixo *y* é conhecido como eixo dos senos, e o α é o ângulo central, $\alpha = (\overset{\frown}{AB})$.

> **! Atenção**
>
> Para obtermos o seno de um arco de medida *x*, projetamos a extremidade do arco no eixo *y*, o segmento formado até a origem é o sen x.

Concluímos então que, para cada arco $x \in \mathbb{R}$, teremos uma única projeção no eixo *y*. Assim temos a função seno.

Domínio da função seno

O domínio da função seno é o conjunto $\mathbb{R}$.

Imagem da função seno

Como o raio do ciclo trigonométrico vale 1, observe a figura 4.

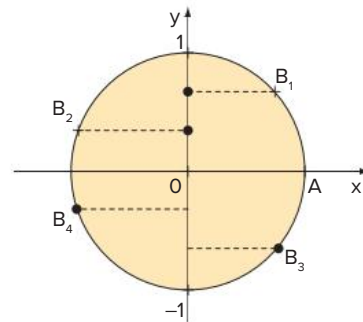



Fig. 4 Imagem da função seno.

Qualquer que seja a extremidade do arco (B_1, B_2, B_3, B_4...), a projeção vai estar no eixo *y*, tal que $-1 \le y \le 1$.

> **! Atenção**
>
> Para $\forall x \in \mathbb{R}$, temos: $-1 \le \text{sen}\,x \le 1$.

Sinais da função seno

Pela construção geométrica do seno de um arco *x*, observe o quadro de sinais da função seno.

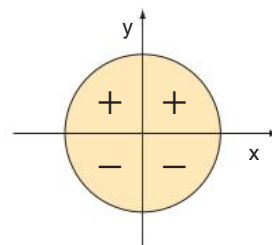



Fig. 5 Quadro de sinais.

Arcos côngruos

Sabemos que os arcos *x* e $x + K \cdot 2\pi$, $K \in \mathbb{Z}$ possuem a mesma extremidade no ciclo trigonométrico, logo a projeção será a mesma e o valor do seno também.

! Atenção

Qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, $\text{sen}\,x = \text{sen}(x + 2K\pi)$; $K \in \mathbb{Z}$.

Observe os exercícios resolvidos a seguir.

Exercícios resolvidos

1 $\text{sen}\,1470° = \text{sen}\,30°$

Resolução:

Pois:

$$\begin{array}{r|l} 1470° & 360° \\ -\ 1440° & 4 \\ \hline 30° & \end{array} \Rightarrow 1470° = 30° + 4(360°)$$

30° é a 1ª determinação positiva e côngruo de 1470°.

2 sen(1100°) = sen(20°) = sen340°

Resolução:

Pois:

$$\begin{array}{r|l} 1100° & 360° \\ 1080° & 3 \\ \hline 20° & \end{array} \Rightarrow 1100° = 20° + (\ 3) \cdot (360°)$$

–20° é côngruo de –1100° e a 1ª determinação positiva é 340°.

Período da função

Uma função é dita periódica quando encontrarmos um número $P > 0$, tal que, dando acréscimos iguais a P no valor de *x*, a imagem da função não se altera.

Percebemos que essa função é periódica quando $P = 2\pi$, pois esse valor equivale a uma volta no ciclo trigonométrico.

! Atenção

O período da função seno é 2π, pois

$\text{sen}\,x = \text{sen}(x + 2\pi)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Se existe $P \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $\forall x$, $f(x) = f(x + P)$, então P é o período da função *f*. A função seno é uma função periódica.

Gráfico da função f(x) = sen x

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen}\,x$, $Im_f = [-1; 1]$ e $P = 2\pi$ são as principais características da função seno. Observe a figura 6, na qual temos o ciclo trigonométrico acoplado a um sistema de coordenadas.

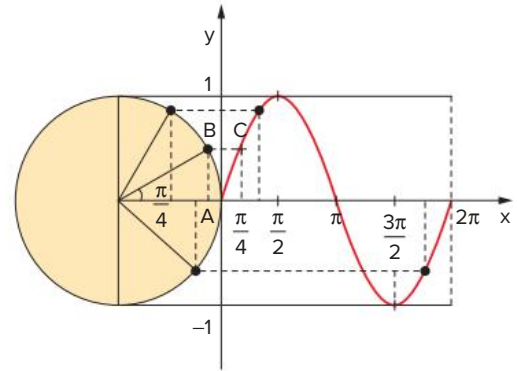



Fig. 6 Gráfico da função seno.

Fazendo o ponto B percorrer o ciclo trigonométrico, $\overset{\frown}{AB}$ é um arco e $\overline{AB}$ é o seu seno, e C é a ordenada do gráfico. Na figura 6, temos um exemplo para $x = \frac{\pi}{4}$. Repetindo esse procedimento indefinidas vezes, teremos o gráfico de sen x, a **senoide**

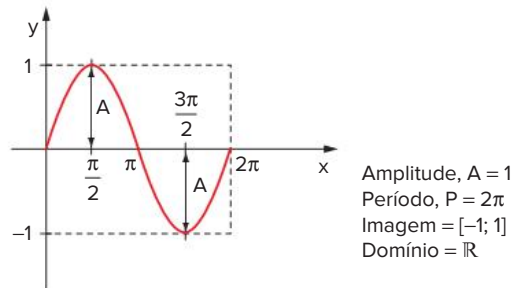



Fig. 7 Senoide.

Na figura 7, temos o gráfico básico da função $f(x) = \text{sen}\,x$. Como a função seno é periódica, para representá-la, basta construir o gráfico do seu período.

Mas não se esqueça de que esse desenho se repete de 2π em 2π para $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

Arcos simétricos

Vamos incentivar o aluno a não decorar certos procedimentos. A intenção é fazer o aluno raciocinar na fonte da teoria, ou seja, no ciclo trigonométrico e na definição do seno.

Você, com certeza, já vem utilizando na Física e na geometria plana os valores notáveis do seno. Refresque a memória com a tabela seguinte.

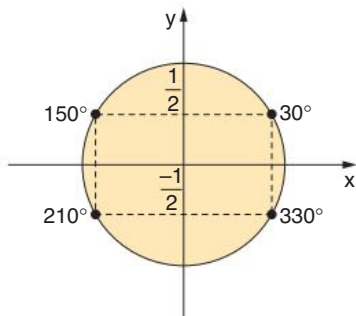
arco	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1

Tab. 1 Principais valores notáveis do seno.

Com essa tabela, podemos calcular o seno de outros arcos também.

Observe o exercício a seguir.

Exercício resolvido

3 Vamos encontrar os valores dos ângulos simétricos a $x = 30°$ para o seno.

Resolução:

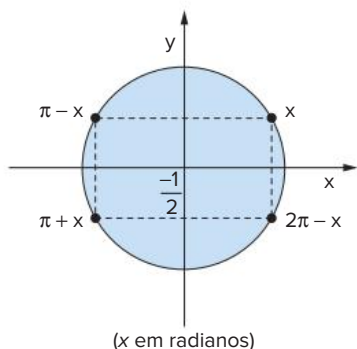
Pela figura anterior, podemos concluir que:

$\text{sen}150° = \text{sen}30° = \frac{1}{2}$

$\text{sen}210° = \quad \text{sen}30° = \quad \frac{1}{2}$

$\text{sen}330° = \quad \text{sen}30° = \quad \frac{1}{2}$

Essa análise geométrica do arco 30° pode ser chamada de redução ao 1º quadrante.
Vamos generalizá-la para um arco *x*. Observe a figura a seguir.

$\text{sen}(\pi \quad x) \quad \text{sen}\,x$
$\text{sen}(\pi + x) = \quad \text{sen}\,x$
$\text{sen}(2\pi \quad x) \quad \text{sen}\,x$

Análise do gráfico $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$

A construção de gráficos dessa modalidade é o ponto alto do nosso curso de trigonometria.

Vamos analisar o efeito de cada parâmetro separadamente, com exemplos numéricos, e depois generalizar o efeito do parâmetro.

No final, vamos integrar todos os parâmetros na mesma função.

Parâmetro a

A análise inicia com o gráfico básico $f(x) = \text{sen}x$

Para construir o gráfico $g(x) = 1 + \text{sen}x$, todas as ordenadas de f(x) vão “subir” 1 unidade, observe:

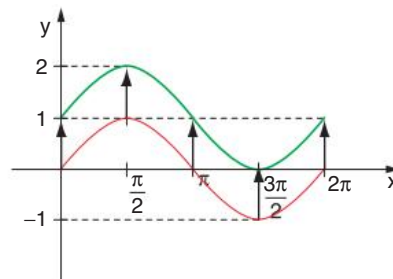



Fig. 8 Gráfico $g(x) = 1 + \text{sen}\,x$.

> **Atenção**
> O parâmetro a desloca o gráfico no eixo *y* alternando a imagem da função.

Na figura 8, a projeção do gráfico no eixo *y* nos dará a imagem da nova função, assim: $Im_g = [0; 2]$

Parâmetro b

Por exemplo, queremos construir o gráfico $g(x) = 2\text{sen}x$. Pelo gráfico da função $f(x) = \text{sen}x$, vamos multiplicar o valor de todas as ordenadas por 2, observe:

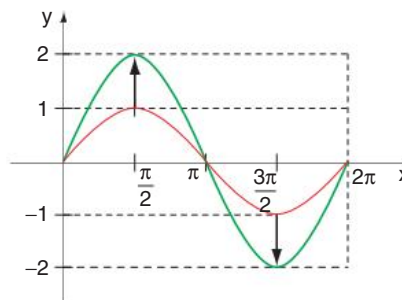



Fig. 9 Gráfico $g(x) = 2\text{sen}\,x$.

O conjunto imagem da função foi alterado e também sua amplitude. Assim: $Im_g = [-2; 2]$ e $A = 2$.

> **Atenção**
> O parâmetro *b* modifica a amplitude do gráfico

Ainda no parâmetro *b*, vamos fazer uma análise para $b < 0$, por exemplo $g(x) = -\frac{1}{2}\text{sen}\,x$.

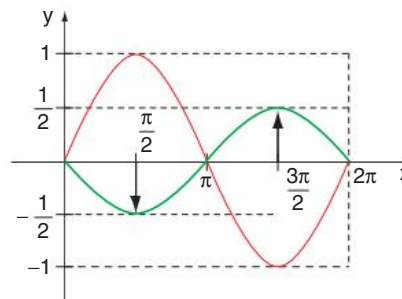



Fig. 10 Gráfico $g(x) = -\frac{1}{2}\text{sen}\,x$

Observe que ocorreu uma inversão do gráfico (devido ao) e uma redução da amplitude $\left(\text{devido ao } \frac{1}{2}\right)$

Parâmetro c

Vamos analisar as funções f(x) = sen x e g(x) = sen 2x, observe as tabelas:

x	senx
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	–1
2π	0
período 2π	

Tab. 2 Período da função sen x.

x	sen2x
0	0
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{4}$	–1
π	0
período π	

Tab. 3 Período da função sen 2x.

Observe que na função g(x) = sen2x o novo período é π. Percebemos que o parâmetro *c* afeta o período da função. Observe os resultados na figura do exercício resolvido 4.

> **! Atenção**
>
> O novo período da função
>
> $f(x) = a + b \cdot sen(cx + d)$ é dado por $P = \frac{2\pi}{|c|}$.
>
> Para construir um novo gráfico, devemos nos basear no gráfico f(x) = senx. O procedimento para construir o gráfico da função cosseno é o mesmo da função seno. O |b| fornece a amplitude da função.

Demonstração:

Se P > 0 e f(x) = f(x + P), $\forall$ x $\in \mathbb{R}$, então o menor valor positivo de P é o período da função *f*.

Utilizando essa definição, temos:

$$f(x) = a + b \cdot sen[cx + d]$$
$$f(x + P) = a + b \cdot sen[c(x + P) + d]$$

fazendo f(x) = f(x + P), temos:

$$a + b \cdot sen[cx + d] = a + b \cdot sen[c(x + P) + d]$$
$$\Rightarrow sen[cx + d] = sen[cx + cP + d]$$

Se os senos são iguais, os arcos podem ser côngruos, então:

$$cx + cP + d = (cx + d) + 2K\pi;\ K \in \mathbb{Z}$$

$cP = 2K\pi \therefore P = \frac{2K\pi}{c}$, como P é o menor valor positivo, fazemos K = 1 e |c|.

Conclusão: $P = \frac{2\pi}{|c|}$ (c.q.d.)

Observe agora mais alguns exercícios resolvidos.

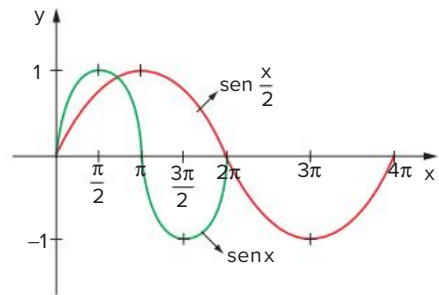
Exercícios resolvidos

4 Construa o gráfico $g(x) = sen\frac{x}{2}$.

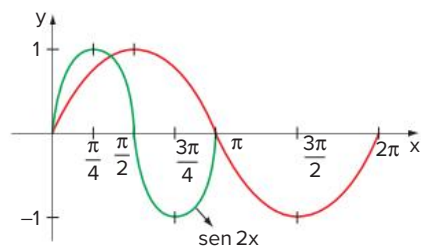
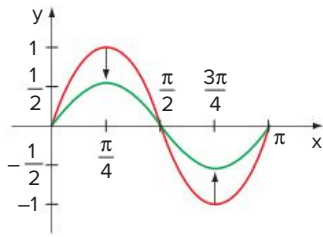
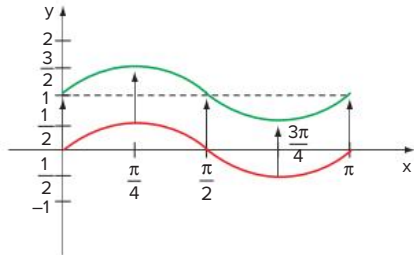
Resolução:

Sugerimos que a construção do gráfico seja feita calculando o período da função e marcando no eixo *x*.

Novo período $= \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

Observe a figura:

5 Construa o gráfico $g(x) = 1 + \frac{1}{2}sen(2x)$.

Resolução:

Os parâmetros alteram a função sen x de forma independente, sugerimos iniciar pelo período: $P = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Vamos agora alterar a amplitude:

Vamos deslocar o gráfico na direção do eixo *y*:

Parâmetro d

Vamos analisar os gráficos $f(t) = \text{sen}\,t$ e $g(x) = \text{sen}\left(x \quad \frac{\pi}{2}\right)$

Fazendo $t = x - \frac{\pi}{2}$ ∴ $x = t + \frac{\pi}{2}$

t	sent
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	–1
2π	0

Tab. 4 Translação do gráfico $\text{sen}\left(x \quad \frac{\pi}{2}\right)$ em função de *x*.

$x = t + \frac{\pi}{2}$	$\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	0
π	1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	–1
$\frac{5\pi}{2}$	0

Tab. 5 Translação do gráfico $\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ em função de *x*

Observe a comparação entre as tabelas e perceba o acréscimo de $\frac{\pi}{2}$ nas abscissas do novo gráfico $\text{sen}\left(x \quad \frac{\pi}{2}\right)$.

A figura 11 compara os dois gráficos.

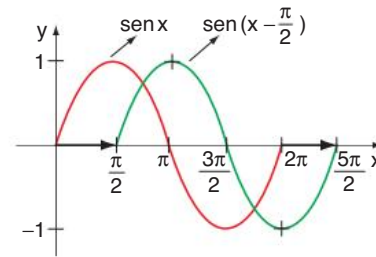



Fig. 11 Gráfico $g(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

! Atenção

O parâmetro *d* provoca o deslocamento do gráfico no eixo das abscissas.

Cuidado! O gráfico não se desloca de ±d sempre! Observe os exemplos.

Regra prática!

Seja: $f(x) = \text{sen}(cx + d)$. Faça $cx + d = 0$ ∴ $x = -\frac{d}{c}$.

As abscissas são acrescidas de $-\frac{d}{c}$.

No exemplo 1, o gráfico $f(x) = \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ é a composição de $h(x) = 2x - \frac{\pi}{2}$ e $g(x) = \text{sen}\,x$.

Observe: $g(h(x)) = \text{sen}(h(x)) = \text{sen}\left(2x \quad \frac{\pi}{2}\right)$.

Exercícios resolvidos

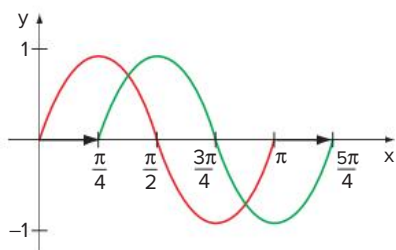
6 Construa o gráfico da função: $f(x) = \text{sen}\left(2x \quad \frac{\pi}{2}\right)$.

Resolução:

Período da função: $P = \frac{2\pi}{2} = \pi$

t	sent
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	–1
2π	0

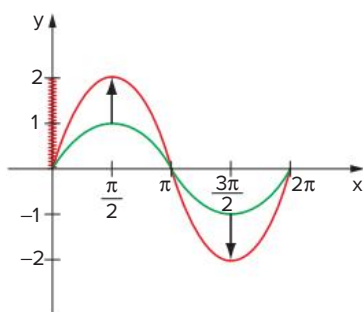
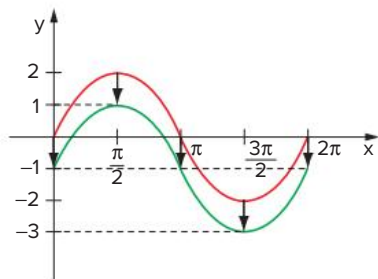
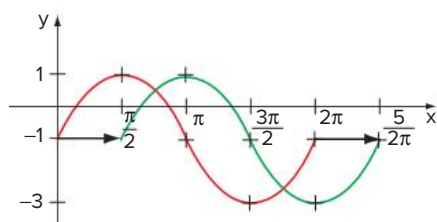
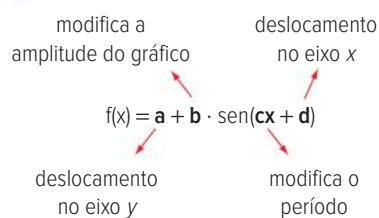
$x = \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}$	$\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$
$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{3\pi}{4}$	0
π	–1
$\frac{5\pi}{4}$	0

O gráfico "começa" em $x = \frac{\pi}{4}$ e as outras abscissas são acrescidas de $\frac{\pi}{4}$.

7 Construa o gráfico da função: $f(x) = \ 1 + 2\text{sen}\left(x \ \frac{\pi}{2}\right)$

Resolução:

Temos agora um exemplo completo:

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 1 \rightarrow P = 2\pi \\ d = \ \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Vamos alterar a amplitude do gráfico:

Vamos deslocar o gráfico no eixo *y*:

Deslocando agora o gráfico no eixo *x*, acrescentando $\frac{\pi}{2}$ para as abscissas, temos:

Função cosseno

Você deve ter percebido a riqueza de detalhes no estudo da função seno. O mesmo raciocínio vai ser utilizado para o estudo da função cosseno.

Definição

Considere o ciclo trigonométrico com origem dos arcos em A e, $x \in \mathbb{R}$, a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ em radianos.

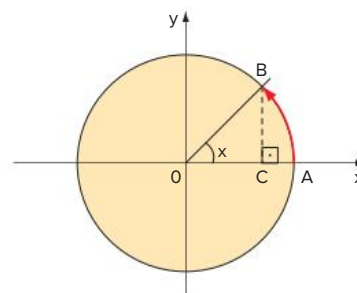



Fig. 12 Cosseno.

No ΔBOC, retângulo em C, podemos aplicar $\cos x = \frac{OC}{OB}$, como $OB = 1$, temos que $\cos x = OC$, concluímos que o cosseno do arco de medida *x* é a medida do segmento OC, projeção da extremidade B do arco no eixo *x*. Observe a construção geométrica do cos*x*:

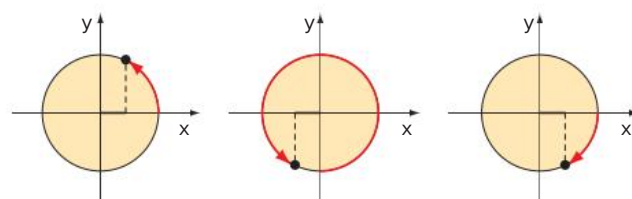
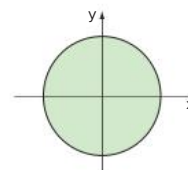



Fig. 13 Construção geométrica do cosseno.

> **Atenção**
>
> Para obtermos o cosseno de um arco de medida *x*, projetamos a extremidade do arco no eixo *x*, o segmento formado até a origem é o cos*x*.
>
> O eixo *x* é conhecido como eixo dos cossenos

FRENTE 1

Concluindo então que, para cada arco $x \in \mathbb{R}$, teremos uma única projeção no eixo *x*. Assim temos a *função cosseno*

Domínio da função cosseno

O domínio da função cosseno é o conjunto $\mathbb{R}$.

Imagem da função cosseno

O conjunto imagem da função cosseno é o mesmo da função seno. A projeção da extremidade do arco vai estar no eixo *x* no intervalo [–1; 1].

! Atenção

Para $\forall x \in \mathbb{R}$, temos: $-1 \leq \cos x \leq 1$

Sinais da função cosseno

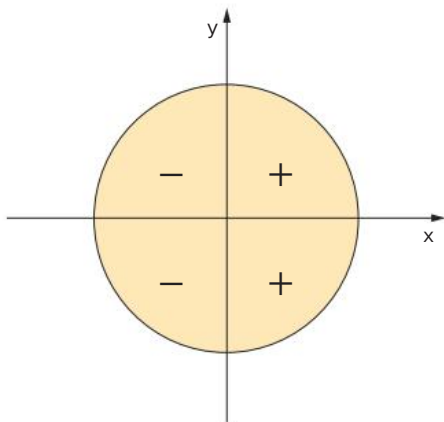



Fig 14 Quadro de sinais

Arcos côngruos

Os arcos *x* e $x + K \quad 2\pi$; $K \in \mathbb{Z}$ possuem a mesma extremidade, portanto o cosseno é o mesmo.

! Atenção

Qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \cos(x + 2K\pi)$; $K \in \mathbb{Z}$.

Período da função cosseno

A função cosseno é periódica.

! Atenção

O período da função cosseno é 2π, pois $\cos x = \cos(x + 2\pi)$; $\forall x \in \mathbb{R}$.

Gráfico da função f(x) = cos x

f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos x$, $Im_f = [\quad 1; 1]$ e $P = 2\pi$ são as principais características da função cosseno.

A figura 15 é o seu gráfico.

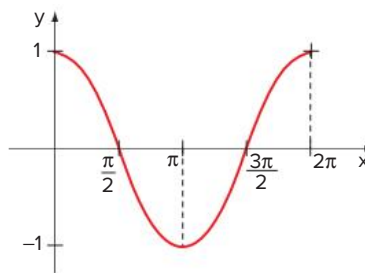



Fig. 15 Gráfico da função cosseno

O gráfico da função cosseno é a **cossenoide**.

Arcos simétricos

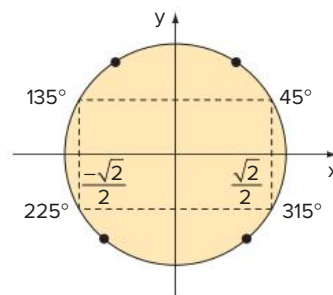
A tabela 6 contém os valores notáveis que devemos memorizar:

arco	0	30°	45°	60°	90°	180°	270°
cosseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0

Tab. 6 Principais valores notáveis cosseno.

Vamos novamente exemplificar a simetria dos arcos, veja os exercícios resolvidos 8 e 9.

Exercícios resolvidos

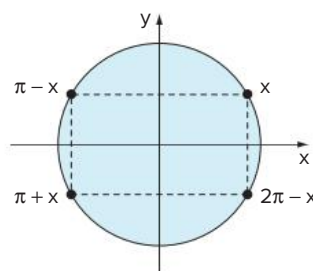
8 Vamos encontrar os valores dos ângulos simétricos para $x = 45°$ para o cosseno.

Resolução:

Pela figura, podemos concluir:

$\cos 135° = -\cos 45°$

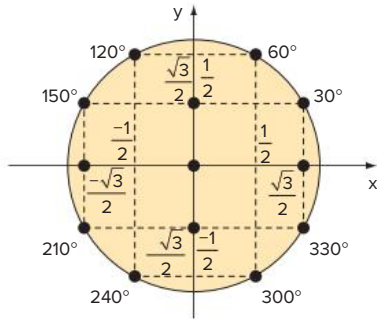
$\cos 225° = \quad \cos 45°$

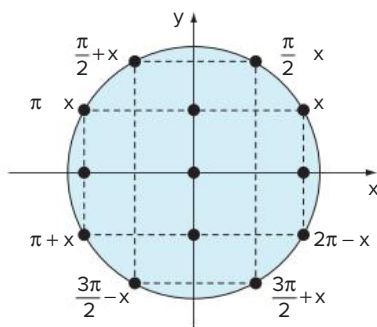
$\cos 315° = \cos 45°$

Vamos generalizar essa redução ao 1º quadrante:

$\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\cos(\pi + x) = \quad \cos x$

$\cos(2\pi \quad x) = \cos x$

9 Vamos agora reposicionar o retângulo formado pelos 4 arcos do exemplo anterior. Observe o novo exemplo para $x = 30°$.

Resolução:

Pela figura, percebemos que:
$\cos 60° = \text{sen}\,30°$
$\cos 120° = -\text{sen}\,30°$
$\cos 240° = \quad \text{sen}\,30°$
$\cos 300° = \text{sen}\,30°$
Vamos generalizar essa ideia para um arco x do 1º quadrante:

Análise do gráfico $f(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$

A análise é idêntica à função seno, com uma única alteração, é claro: o gráfico básico do cosseno é diferente do seno.

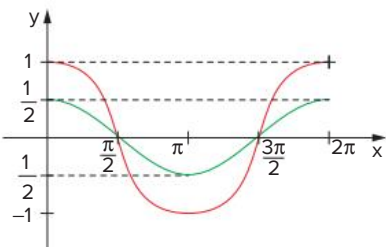
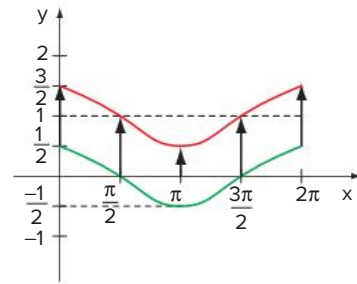
Observe os exercícios a seguir.

Exercícios resolvidos

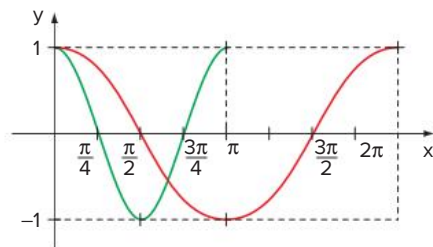
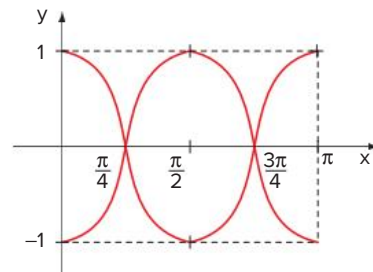
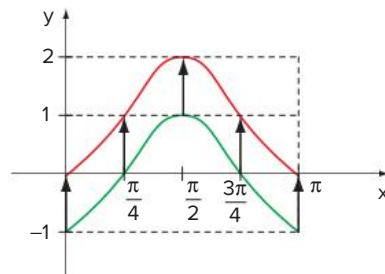
10 Construa o gráfico da função:

$f(x) = 1 + \frac{1}{2}\cos x$

Resolução:

Alteração na amplitude:

Deslocamento no eixo y:

11 Construa o gráfico da função: $f(x) = 1 - \cos 2x$.

Resolução:

Alteração no período: $P = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$

Inversão do gráfico:

Deslocando o gráfico no eixo y:

Relação fundamental da trigonometria (RFT)

Na verdade, existem várias relações fundamentais, mas até o momento conhecemos as funções $\text{sen}\,x$ e $\cos x$ e nos limitaremos a elas. Observe o ciclo trigonométrico a seguir, no qual vamos indicar o seno e o cosseno do arco x.

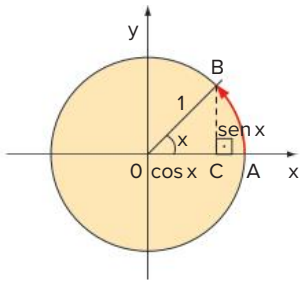



Fig. 16 Relação fundamental da trigonometria.

O ΔBOC é retângulo e seus catetos são as funções trigonométricas, então:

Pelo Teorema de Pitágoras

$(1)^2 = (\text{sen}x)^2 + (\cos x)^2$, simplificando a notação:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

! Atenção

Cuidado!

$\text{sen}^2 x = (\text{sen}x)^2$ $\text{sen}^2 x \neq \text{sen}x^2$

Exercícios resolvidos

12 Calcule o cos x sabendo que $\text{sen}\,x = \frac{1}{3}$ e $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Resolução:

Pela RFT, temos que: $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$; $\forall x \in \mathbb{R}$, logo,

$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \therefore \cos^2 x = 1 \quad \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

$\cos x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$, como *x* pertence ao 2º quadrante, $\cos x < 0$, portanto, $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

13 Simplifique a expressão: $\text{sen}^4 x \quad \cos^4 x$

Resolução:

Fatorando a expressão, temos:

$= \text{sen}^4 x \quad \cos^4 x = (\text{sen}^2 x \quad \cos^2 x)\,(\underbrace{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}_{1})$

$= \text{sen}^2 x - \cos^2 x = (1 - \cos^2 x) - \cos^2 x = 1 - 2\cos^2 x$

Revisando

1 Determine o intervalo de variação da equação $E(x) = -2 + 3\text{sen}\,x$ para $x \in \mathbb{R}$.

2 Calcule o valor de sen(2 550°)

3 Construir o esboço do gráfico $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f(x) = 1 + 2\text{sen}(2x - \pi)$.

4 Construir o esboço do gráfico $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e

$f(x) = \quad 1 + 2\cos\left(\frac{x}{2} \quad \frac{\pi}{4}\right)$

5 Considere $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ e $\text{sen}\,x = \frac{1}{3}$. Calcule o valor de $\cos x$.

6 Faça o esboço do gráfico da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que: $f(x) = \text{sen}^4 x + \cos^4 x + 2\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x$.

Exercícios propostos

1 **PUC** Determine todos os valores de *x*, de modo que a expressão $\text{sen}\,\theta = \frac{2x \quad 1}{3}$ exista.

A $[\ 1, 1[$
B $]-1, 0]$
C $[\ 1, 2]$
D $\left[\ 1, \frac{1}{2}\right]$
E $\left[\ 1, \frac{1}{3}\right[$

2 **PUC** O conjunto-imagem da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2\text{sen}x - 3$, é o intervalo:

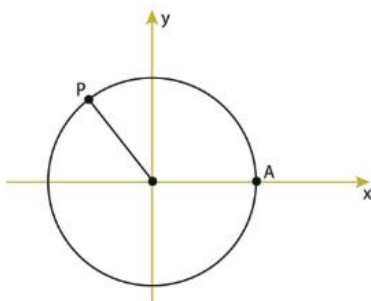
A $[-1, 1]$
B $[-5, 5]$
C $[-5, 1]$
D $[-1, 5]$
E $[-5, -1]$

3 **PUC** Se $x \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$ e $\text{sen}x = 3n - 1$, então "n" varia no intervalo:

A $\left]\frac{1}{3}, 1\right[$
B $]-1, 1[$
C $]-1, 0[$
D $]0, 1[$
E $\left]0, \frac{1}{3}\right[$

4 **Fuvest** O menor valor de $\frac{1}{3 - \cos x}$, com *x* real é:

A $\frac{1}{6}$
B $\frac{1}{4}$
C $\frac{1}{2}$
D 1
E 3

5 **Uerj 2019** O círculo a seguir tem o centro na origem do plano cartesiano xy e raio igual a 1. Nele, $\overset{\frown}{AP}$ determina um arco de 120°.

As coordenadas de P são:

A $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
B $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
C $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
D $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

6 **Ueba** Se a medida α de um arco é 8 radianos, então:

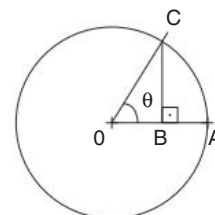
A $\text{sen}\alpha > 0$ e $\cos\alpha > 0$
B $\text{sen}\alpha > 0$ e $\cos\alpha < 0$
C $\text{sen}\alpha < 0$ e $\cos\alpha < 0$
D $\text{sen}\alpha < 0$ e $\cos\alpha > 0$
E $\text{sen}\alpha = 0$ e $\cos\alpha = 0$

7 Sen1200° é igual a:

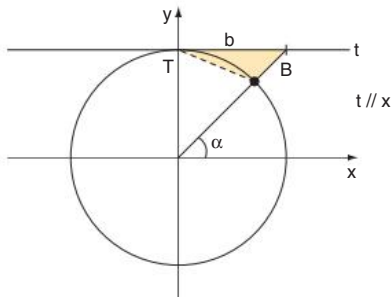
A cos60°
B sen60°
C cos30°
D sen30°
E cos45°

8 **UEG 2019** Os valores de **x**, sendo $0 \le x \le 2\pi$, para os quais as funções $f(x) = \text{sen}x$ e $g(x) = \cos x$ se intercep tam, são

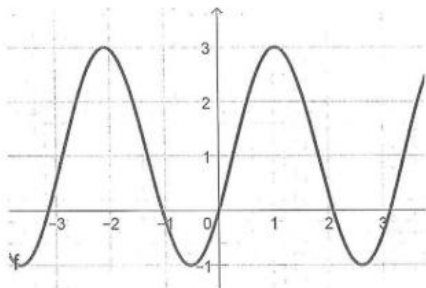
A $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$
B $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$
C $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$
D $\frac{5\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$
E $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$

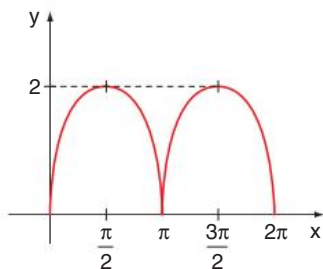
9 **PUC** Na figura a seguir o raio OA = 6. O segmento $\overline{OB}$ vale 3 e o segmento $\overline{CB} \perp \overline{OA}$. Determine o ângulo θ em radianos.

10 **UEL** Dos números a seguir, o mais próximo de $\text{sen}\,5$ é:

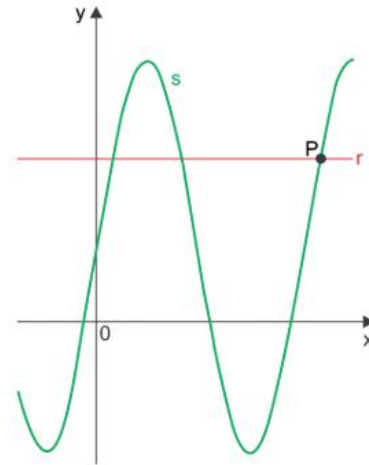
A 1 B $\frac{1}{2}$ C 0 D $-\frac{1}{2}$ E -1

11 Na figura seguinte, temos o ciclo trigonométrico e $\overline{TB}$ tem medida igual a *b*. Calcule a área do triângulo destacado.

12 **Cefet-MG 2019** Seja a função real definida por $f(x) = 2 + 2\text{sen}(x)$, no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$. O ponto de mínimo de f(x), nesse intervalo, tem coordenadas.

A $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.
C $\left(\frac{3\pi}{2},\ \ 2\right)$.
B $\left(\frac{\pi}{2},\ \ 2\right)$.
D $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$.

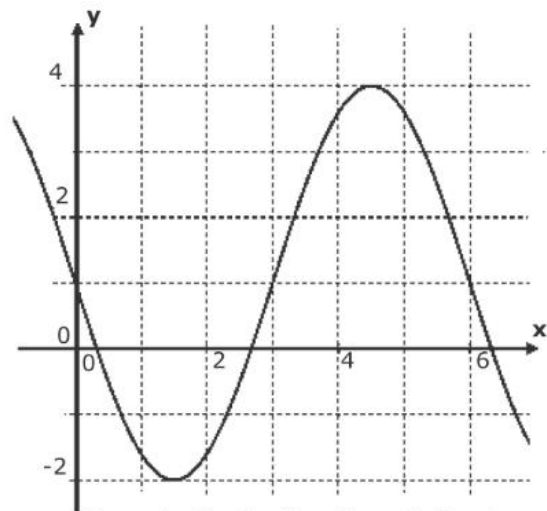
13 **Efomm 2020** Uma parte do gráfico da função *f* está representado na figura abaixo. Assinale a alternativa que pode representar f(x).

A $f(x) = \text{sen}(x\quad \pi) + 1$
D $f(x) = 2\text{sen}(2x) + 1$
B $f(x) = 2\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$
E $f(x) = 2\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$
C $f(x) = \text{sen}\left(2x\quad \frac{\pi}{6}\right) + 2$

14 **FGV** O gráfico seguinte representa a função:

A $y = \text{sen}2x$
B $y = 2\text{sen}x$
C $y = |\text{sen}2x|$
D $y = |2\text{sen}x|$
E $y = 2\text{sen}|x|$

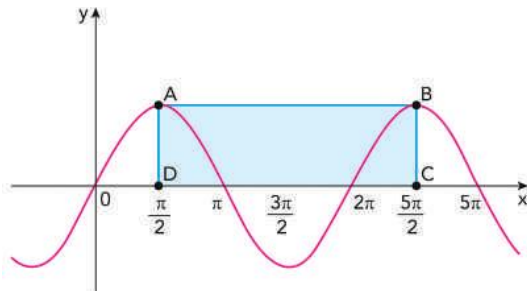
15 **Famerp 2020** A figura indica os gráficos de uma reta *r* e uma senoide *s*, de equações $y = \frac{5}{2}$, $y = 1 + 3\text{sen}(2x)$, em um plano cartesiano de eixos ortogonais.

Sendo P um ponto de intersecção dos gráficos, conforme mostra a figura, sua abscissa, convertida para graus, é igual a

A 275°
B 240°
C 225°
D 210°
E 195°

16 **PUC** Esboce o gráfico da função $f:[0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 + \text{sen}x + |\text{sen}x|$.

17 **EsPECEx 2020** Na figura abaixo está representado um trecho do gráfico de uma função real da forma $y = m \cdot \text{sen}(nx) + k$, $n > 0$.

Os valores de *m*, *n* e *k*, são, respectivamente,

A $3, \frac{\pi}{3}$ e 1.
C $-3, \frac{\pi}{6}$ e 1.
E $3, \frac{\pi}{6}$ e 1.
B $6, \frac{\pi}{6}$ e 1.
D $-3, \frac{\pi}{3}$ e 1.

18 **Uerj 2020** O gráfico a seguir representa a função periódica definida por $f(x) = 2\text{sen}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. No intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$, A e B são pontos do gráfico nos quais $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{5\pi}{2}\right)$ são valores máximos dessa função.

A área do retângulo ABCD é:

A 6π
B 5π
C 4π
D 3π

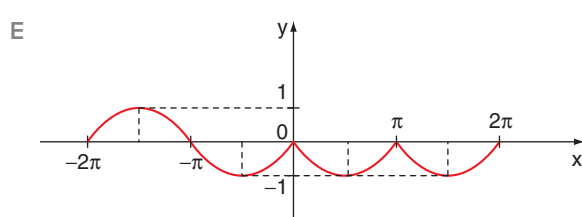
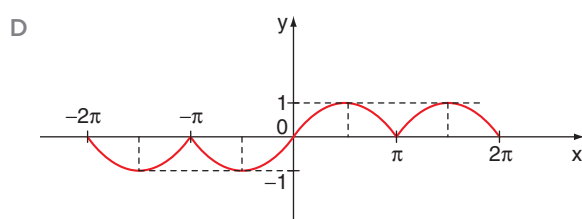
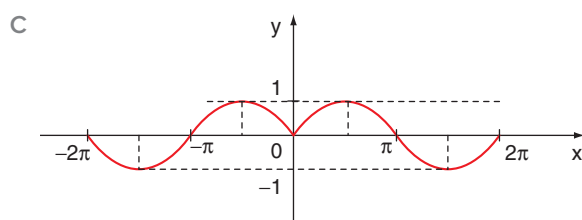
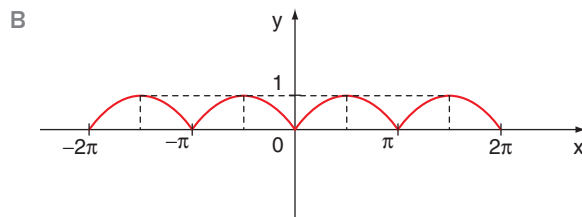
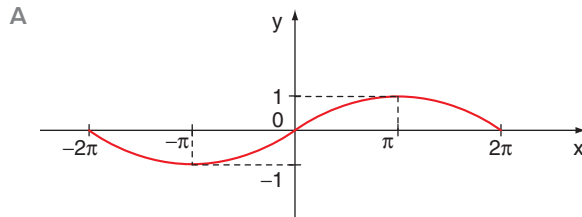
19 **FEI** O gráfico da função $y = f(x) = \text{sen}|x|$ no intervalo $[\;\;2\pi, 2\pi]$ é:

A

B

C

D

E

20 **UFRGS 2019** Considere a função real de variável real $f(x) = 3 - 5\text{sen}(2x + 4)$, valores de máximo, mínimo e o período de $f(x)$ são, respectivamente,

A $-2, 8, \pi$.
B $8, -2, \pi$.
C $\pi, -2, 8$.
D $\pi, 8, -2$.
E $8, \pi, -2$.

21 Simplifique a expressão $\frac{\cos^2\theta}{1 \;\; \theta\text{sen}}$, com $\text{sen}\theta \neq 1$.

22 **PUC** Se $a > 0$, a expressão

$\sqrt{a^2\cos\alpha \cdot \cos^2\beta + a^2\cos\alpha \cdot \text{sen}^2\beta}$ é igual a:

A $a^2\cos\alpha$
B $a\cos\alpha$
C $a\sqrt{\cos\alpha}$
D $a\sqrt{\text{sen}\,\alpha}$
E $a\text{sen}^2\alpha$

23 **Mackenzie** As raízes da equação $2x^2 - px - 1 = 0$ são $\text{sen}\theta$ e $\cos\theta$, sendo $\theta \in \mathbb{R}$. O valor de *p* é:

A zero
B 2
C 4
D 5
E n.d.a.

24 **FGV** Se $\text{sen}\,a = \frac{24}{25}$ e $a \in 2^{\underline{o}}$ quadrante, determine o valor de $\sqrt{\frac{1 \;\; \cos a}{1 + \cos a}}$.

A $\frac{3}{4}$
B $\frac{3}{5}$
C $\frac{5}{4}$
D $\frac{4}{3}$
E $\frac{1}{2}$

25 Achar os valores de *x* que verifiquem, simultaneamente, as igualdades:

$$\left[\cos a = \frac{6x+2}{5} \text{ e } \text{sen}\,a = \frac{3x+2}{5}\right]$$

A 3 e $\frac{1}{3}$
B $-\frac{1}{3}$ e $\frac{17}{15}$
C $\frac{1}{3}$ e $\frac{-17}{15}$
D $\;\;3$ e $\frac{1}{3}$
E n.d.a.

26 **Mackenzie** Para qualquer valor real de *x*, $(\text{sen}x + \cos x)^2 + (\text{sen}x - \cos x)^2$ é igual a:

A -1
B 0
C 1
D 2
E $2\text{sen}2x$

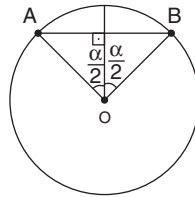
27 Calculando o valor da expressão:
$E = \text{sen}^4x + \cos^4x + 2\text{sen}^2x \;\; \cos^2x$, encontramos:

A 1
B sen^2x
C $\cos^2x$
D $\text{sen}x \;\; \cos x$
E zero

Origens da trigonometria

A origem da trigonometria é incerta, mas podemos afirmar que o seu desenvolvimento foi influenciado por causa dos problemas de astronomia, agrimensura e navegações, por volta de V a C , com os egípcios e os babilônios A palavra trigonometria é de origem grega e significa medidas do triângulo. O astrônomo grego Hiparco de Niceia (190-120 a.C.) é considerado o fundador da trigonometria. Foi ele quem introduziu as medidas sexagesimais em Astronomia e elaborou a primeira tabela trigonométrica. Para Hiparco, a trigonometria era uma ferramenta para fazer medições, prever eclipses, fazer calendários e muitas outras coisas.

Hiparco tinha construído uma tabela de cordas, precursora das modernas tabelas trigonométricas.

A construção das tabelas de cordas era feita da seguinte maneira:

Media-se a corda $\overline{AB}$ de uma unidade *u*, tal que $u = \frac{\text{raio}}{60}$. Assim, utilizava-se o símbolo crd α para representar o comprimento da corda do ângulo central α.

Da figura, podemos perceber que uma tabela de cordas é uma tabela dos senos dos ângulos.

$$\text{sen}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{AB}{2OA} = \frac{\text{cdr}\ \alpha}{\text{diâmetro}}$$

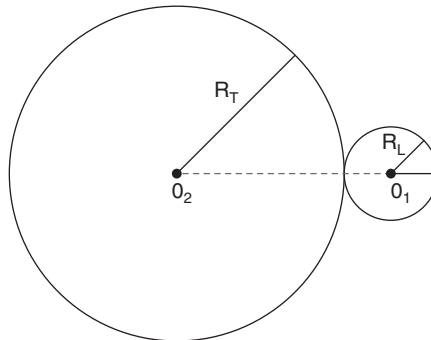
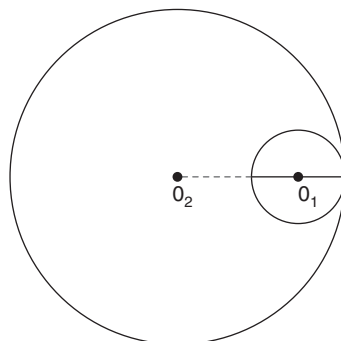
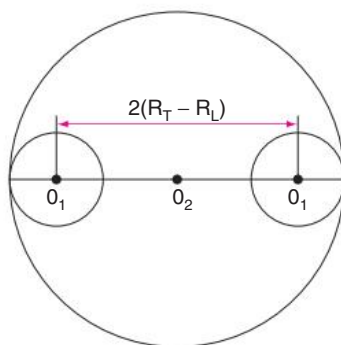
Hiparco e o raio da Lua

Hiparco, considerado o inventor da trigonometria, foi também o criador do astrolábio, um instrumento naval antigo utilizado para medir a altura dos astros acima do horizonte e determinar a posição deles no céu.

Hiparco adotava para raio da Terra o valor obtido por Eratóstenes, ou seja, aproximadamente 6366 km

O seu grande interesse pela Astronomia fez com que observasse vários eclipses lunares e desse uma especial atenção aos eclipses totais e de grande duração.

Hiparco concluiu que a Lua demora cerca de 1 hora para ocultar-se e mantém se oculta cerca de 1h40

Com base nessas informações, observe as figuras:

Início do eclipse lunar. R_T: raio da Terra, R_L: raio da Lua

Após 1 hora, a Lua estava totalmente oculta. Observe que o centro da Lua 0_1 percorre a distância de $2R_L$.

A Lua mantém-se oculta durante 1h e 40 min. E o centro 0_1 da Lua percorre a distância de $2(R_T - R_L)$.

Considerando a velocidade da ponta 0_1 constante, temos:

$$\frac{2R_L}{1h} = \frac{2R_T \quad 2R_L}{1{,}67h} \therefore 3{,}34R_L = 2R_T \therefore \ 2R_L \quad \cancel{5},34R_L \quad 2R_T$$

$$R_L = \frac{R_T}{2{,}67}$$

Com o resultado de Eratóstenes, temos então raio da Lua = 2384 km.

Sabemos hoje que o raio da Lua é cerca de 1737 km. O raciocínio de Hiparco é brilhante, mas nesse método faltou-lhe precisão para calcular a duração dos eclipses

Resumindo

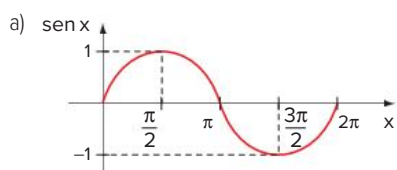
As funções básicas da trigonometria são:

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f(x) = \text{sen}\, x$ (função seno)

g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g(x) = \cos x$ (função cosseno)

A relação fundamental da trigonometria (RFT) relaciona as duas funções tal que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Propriedades básicas das funções:

a)

$1 \leq \text{sen}\, x \leq 1$

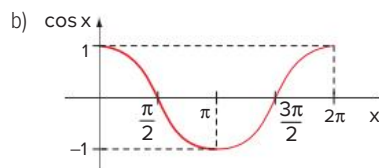
Período: 2π

Amplitude: 1

Domínio: $\mathbb{R}$

Função ímpar ($\text{sen}(-x) = \quad \text{sen}\, x$)

b)

$1 \leq \cos x \leq 1$

Período: 2π

Amplitude: 1

Domínio: $\mathbb{R}$

Função par ($\cos(-x) = \cos x$)

Quer saber mais?

Site

- Trigonometria – história e funções
  Disponível em: <http://ecalculo if.usp br/funcoes/trigonometricas/ftrigonometricas.htm>

Exercícios complementares

1 Sendo $x = \frac{\pi}{2}$, calcule o valor da expressão $\frac{\text{sen}\,x + \cos x}{\text{sen}\,x}$

A 0

B $\frac{1}{2}$

C 1

D 2

E ∞

2 Determine o período e a imagem da função real *f* definida por $f(x) = 3\text{sen}\,2x$.

3 Classifique as funções $\text{sen}\,x$ e $\cos x$ quanto a sua paridade.

4 **PUC** Sendo θ um ângulo agudo, então $\frac{5\pi}{2} \quad \theta$ pertence a qual quadrante?

A 1º

B 2º

C 3º

D 4º

E n.d.a.

5 **UEL 2019** Uma empresa de produtos alimentícios recebeu de seu contador uma planilha com os lucros mensais referentes ao ano de 2017. Ao analisar a planilha, a empresa constatou que, no mês 4 (abril), teve R$ 50 000,00 de lucro e que, no mês 6 (junho), o lucro foi de R$ 30 000,00.

Determine o lucro da empresa, em dezembro de 2017, sabendo que a função que descreve o lucro L no mês *t* daquele ano é definida por $L(t) = a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}t\right) + b$ em que $1 \le t \le 12$, $a > 0$ e $b > 0$.

Apresente os cálculos realizados na resolução da questão.

6 **FGV** Encontre o conjunto solução da equação na variável *x*: $x^2 - (\cos^2\alpha)x - \text{sen}^2\alpha = 0$.

7 **Vunesp** A expressão: $1 \quad 2 \quad \text{sen}^2x + \text{sen}^4x + \text{sen}^2x \quad \cos^2x$ é equivalente a:

A $\cos^4x$

B $2\cos^2x$

C $\cos^3x$

D $\cos^4x + 1$

E $\cos^2x$

8 **Fuvest** Ache m de modo que o sistema:

$\begin{cases} \cos x + m \cdot \text{sen}\,x = 0 \\ \cos x \quad \cdot m \quad \text{sen}\,x = 1 \end{cases}$ na incógnita *x*, tenha solução.

9 **UFPR 2020** A maior variação de maré do Brasil ocorre na baía de São Marcos, no estado do Maranhão. A diferença entre o nível mais alto e o nível mais baixo atingidos pela maré pode chegar a 8 metros em algumas épocas do ano. Suponha que em determinado dia do ano o nível da maré da baía de São Marcos possa ser descrito pela expressão

$$n(t) = 3\text{sen}\left((t \quad 5)\frac{\pi}{6}\right) + 4,\ \text{com } t \in [0{,}24]$$

sendo *t* tempo (medido em horas) e n(t) o nível da maré no instante *t* (dado em metros). Com base nessas informações, considere as seguintes afirmativas:

1. O nível mais alto é atingido duas vezes durante o dia.
2. Às 11 h é atingido o nível mais baixo da maré.
3. Às 5 h é atingido o nível mais alto da maré
4. A diferença entre o nível mais alto e o nível mais baixo é de 3 metros.

Assinale a alternativa correta.

A Somente a afirmativa 1 é verdadeira.

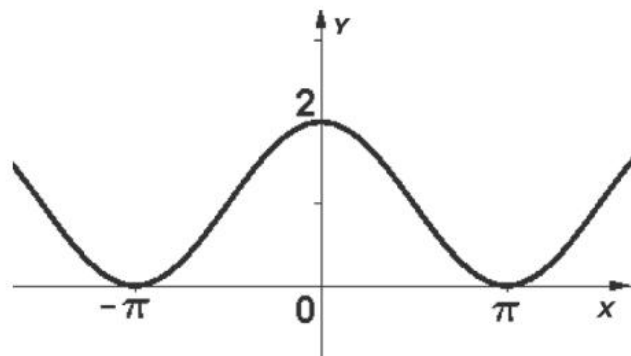
B Somente as afirmativas 1 e 4 são verdadeiras.

C Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.

D Somente as afirmativas 2, 3 e 4 são verdadeiras.

E As afirmativas 1, 2, 3 e 4 são verdadeiras.

10 Classifique as funções $f(x) = x\text{sen}\,x$ e $g(x) = x\cos x$ quanto à paridade

11 **EsPCEx 2019** Dentre as alternativas a seguir, aquela que apresenta uma função trigonométrica de 2π, cujo gráfico está representado na figura abaixo é

Desenho Ilustrativo Fora de Escala

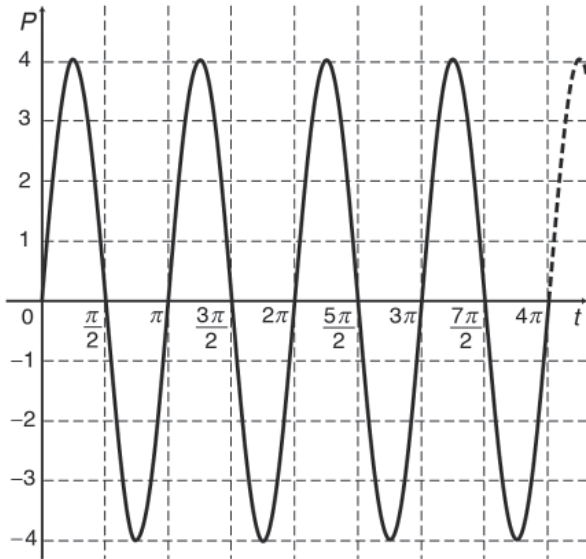
A $f(x) = 1 \quad \text{sen}(\pi \quad x)$.

B $f(x) = 1 + \cos(\pi \quad x)$.

C $f(x) = 2 - \cos(\pi + x)$.

D $f(x) = 2 \quad \text{sen}(\pi + x)$.

E $f(x) = 1 - \cos(\pi - x)$.

12 **Enem PPL 2019** Os movimentos ondulatórios (periódicos) são representados por equações do tipo $\pm A\text{sen}(wt + \theta)$, que apresentam parâmetros com significados físicos importantes, tais como a frequência $w = \frac{2\pi}{T}$, em que T é o período; A é a amplitude ou deslocamento máximo; θ é o ângulo de fase $0 \leq \theta < \frac{2\pi}{w}$, que mede o deslocamento no eixo horizontal em relação à origem no instante inicial do movimento.
O gráfico representa um movimento periódico, P = P(t), em centímetro, em que P é a posição da cabeça do pistão do motor de um carro em um instante *t*, conforme ilustra a figura.

A expressão algébrica que representa a posição P(t), da cabeça do pistão, em função do tempo *t* é

A $P(t) = 4\text{sen}(2t)$
B $P(t) = -4\text{sen}(2t)$
C $P(t) = -4\text{sen}(4t)$
D $P(t) = 4\text{sen}\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$
E $P(t) = 4\text{sen}\left(4t + \frac{\pi}{4}\right)$

13 Demonstrar que a expressão:
$y(x) = \text{sen}^6x + \cos^6x - 2\text{sen}^4x - \cos^4x + \text{sen}^2x$ é nula qualquer que seja o arco *x*.

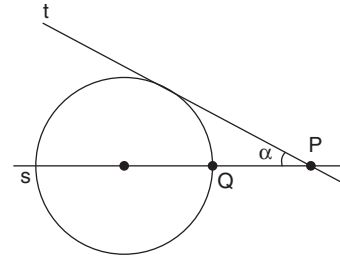
14 Simplificar a expressão considerando cos a > 0:

$$\frac{\cos a}{2} \cdot \sqrt{\frac{1 + \text{sen}^2 a}{\cos a}}\left[\sqrt{\frac{\cos^3 a}{1 + \text{sen}^2 a}} + \sqrt{\frac{1 + \text{sen}^2 a}{\cos a}}\right]$$

15 Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} + \text{sen}\, x;\ x \neq 0 \\ 0;\ x = 0 \end{cases}$$

Esboce o gráfico.

16 Na figura a seguir, a reta *s* passa pelo ponto P e pelo centro da circunferência de raio R, interceptando a no ponto Q, entre P e o centro. Além disso, a reta *t* passa por P, é tangente à circunferência e forma um ângulo α com a reta *s*. Se PQ = 2R, então, $\cos\alpha$ vale:

A $\frac{\sqrt{2}}{6}$
B $\frac{\sqrt{2}}{3}$
C $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
E $\frac{3\sqrt{2}}{5}$

17 **UFSC 2019** O dólar americano (US$) é moeda bastante usada em transações financeiras internacionais, mas, em decorrência de vários fatores, o seu preço pode variar bastante. Em um dia de forte variação, o preço, em reais, de venda e de compra de um dólar americano comercializado no Brasil foi descrito, respectivamente, pelas funções $V(t) = 3{,}8 + 0{,}4\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}t\right)$ e $C(t) = 3{,}5 + 0{,}5\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}t\right)$, nas quais *t* representa o tempo medido, em horas, sendo que $t \in \mathbb{R}$ e $8 \leq t \leq 17$.

01 Os valores máximo e mínimo do preço do dólar para venda foram de, respectivamente, R$ 3,80 e R$ 0,40.

02 Apenas para t = 13h, o preço de compra do dólar foi de R$ 3,30.

04 Uma pessoa que comprou US$ 130,00 quando t = 8h e vendeu essa quantia quando t = 14h perdeu R$ 13,00. Contudo, se a venda fosse feita quando t = 16h, obteria um lucro de R$ 39,00.

08 Usando cartão de crédito, uma pessoa comprou um produto em um *site* americano ao preço de US$ 50,00. Considerando que a cobrança da fatura do cartão de crédito ocorre segundo o preço de compra sempre às 17h, então o produto custou mais do que R$ 175,00.

16 Para cada *t* pertencente ao intervalo $\{t \in \mathbb{R};\ 12 < t < 16\}$, a diferença entre o preço de venda e o preço de compra foi maior que US$ 0,30.

Soma:

18 No hemocentro de um certo hospital, o número de doações de sangue tem variado periodicamente. Admita que, neste hospital, no ano de 2006, este número, de janeiro (t = 0) a dezembro (t = 11) seja dado, aproximadamente, pela expressão $S(t) = \lambda \quad \cos\left[\frac{(t-1)\pi}{6}\right]$ com λ uma constante positiva, S(t) em milhares e *t* em meses, $0 \leq t \leq 11$. Determine:

a) a constante λ, sabendo que no mês de fevereiro houve 2 mil doações de sangue.

b) em quais meses houve 3 mil doações de sangue

19 Dadas as curvas $y = x^2$ e $y = \cos x$, assinalar dentre as afirmações a seguir a verdadeira.

A Elas não interceptam-se.
B Elas interceptam-se em uma infinidade de pontos.
C Elas interceptam-se em dois pontos.
D Elas interceptam-se em um único ponto.
E Elas interceptam-se em três pontos.

20 Faça o esboço do gráfico correspondente à função $f(x) = 1 + \cos(x + \pi)$, para $-\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

21 Foram feitos os gráficos das funções:
$f(x) = \text{sen } 4x$ e $g(x) = \frac{x}{100}$, para *x* no intervalo $[0; 2\pi]$.
O número de pontos comuns aos dois gráficos é:
A 16 B 8 C 4 D 2 E 1

FRENTE 2

CAPÍTULO

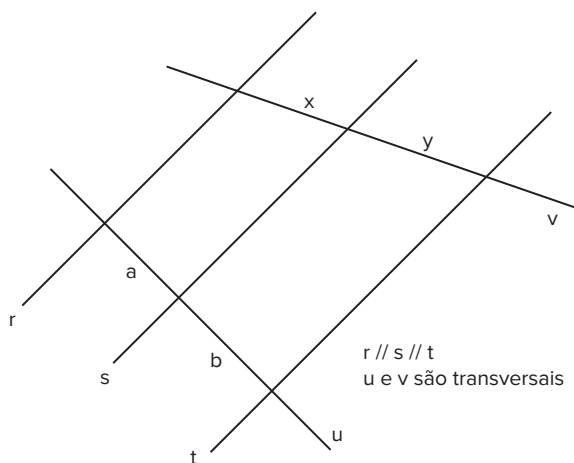
4

Análise de grandezas proporcionais

Quando são comparadas entre si duas quantidades da mesma espécie ou de espécies diferentes, o quociente que mostra a relação entre elas estabelece uma proporcionalidade.

Palavras específicas como “dobro”, “triplo”, “metade”, “terço”, e expressões do tipo “o quíntuplo de” ou “a quinta parte de”, ”de dois para um”, “de três para dois” ou, genericamente, “de a para b”, informam proporções entre duas grandezas quaisquer.

Grandezas proporcionais

O princípio da proporcionalidade está entre os primeiros teoremas da geometria euclidiana tradicional, enunciado no século VII a C, pelo matemático Tales de Mileto. Seu mais famoso teorema diz que *"se um feixe de retas paralelas for cortado por duas transversais r e s, então os segmentos determinados em r terão comprimentos diretamente proporcionais aos dos segmentos determinados em s, pelas mesmas retas paralelas"*.

$$a : b = x : y \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

Mas foi provavelmente na época da escola Pitagórica que os cientistas perceberam relações de proporcionalidade entre diferentes grandezas, físicas, químicas e geométricas.

Uma história relata que Pitágoras passava em frente a uma oficina de ferreiros e parou para prestar atenção aos sons percutidos pelos martelos batendo nas bigornas, tentando identificar as notas musicais produzidas Depois selecionou alguns dos martelos e mediu a massa de cada um percebendo que as notas produzidas por um par de martelos soavam harmônicas quando as razões entre as massas dos martelos ficavam expressas por frações como $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$ ou $\frac{3}{4}$, por exemplo. Já quando essas frações ficavam expressas de forma irredutível por termos maiores como $\frac{22}{7}$ ou $\frac{355}{113}$, as notas produzidas pelos martelos soavam desarmônicas. Pitágoras já sabia que isso ocorria com os comprimentos de cordas de mesma espessura esticadas sob uma mesma tensão, de modo que a relação de proporcionalidade entre as massas de martelos de ferro e comprimentos de cordas esticadas estabeleceu os princípios da teoria musical ocidental (século VI a.C.).

Alguns séculos depois, o astrônomo Eudoxo de Cnido estabeleceu grande parte dos processos aritméticos que usamos até hoje para o tratamento de valores numéricos proporcionais entre si, como a regra de três simples (século III a.C.).

Revisando razões e proporções

No estudo da Álgebra, toda relação de igualdade entre duas frações é denominada proporção.

Sentenças do tipo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, com *b* e *d* não nulos, são proporções que podem ser lidas como "*a* está para *b* assim como *c* está para *d*. A principal propriedade de uma proporção é a do produto cruzado:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Um importante problema aritmético que deve ser do minado pelo estudante é encontrar a quarta proporcional a partir de três números. Isso consiste em determinar o valor de *x* na expressão $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, tendo os valores de a, b e c.

O processo de resolução desse problema é conhecido como regra de três:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

$$a \cdot x = b \cdot c$$

$$x = \frac{b \cdot c}{a}$$

Proporções podem ser simplificadas dividindo-se ambos os numeradores ou ambos os denominadores das frações que a compõem por um mesmo número real não nulo.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, n \neq 0 \Leftrightarrow \frac{a:n}{b} = \frac{c:n}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, n \neq 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b:n} = \frac{c}{d:n}$$

Por exemplo, dividindo por 13 os numeradores da proporção $\frac{52}{15} = \frac{65}{x}$ obtém-se a proporção $\frac{4}{15} = \frac{5}{x}$, que é mais simples para se encaminhar o restante da resolução.

Veja também que na proporção $\frac{5}{72} = \frac{7}{8x}$ ambos os denominadores podem ser divididos por 8 obtendo-se a proporção $\frac{5}{9} = \frac{7}{x}$.

Outras propriedades das proporções

No processo de resolução de uma equação expressa pela igualdade de duas frações, os numeradores dessas frações podem ser somados aos seus denominadores obtendo-se uma equação equivalente:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a + b} = \frac{c}{c + d}$$

Analogamente, os denominadores das frações podem ser somados aos seus numeradores obtendo-se outra equação equivalente:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

Além disso, somando se ambos os numeradores e ambos os denominadores das frações de uma proporção, obtém-se uma fração equivalente às originais:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Proporção direta

Dizemos que duas grandezas são diretamente propor cionais entre si quando há entre elas uma relação do tipo quociente constante. Assim, quando os valores de uma delas são divididos pelos valores correspondentes da outra, obtêm-se sempre o mesmo resultado. Esse resultado constante pode ser uma razão simples ou uma razão composta.

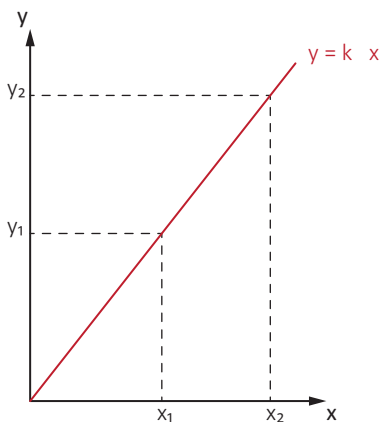
Sendo *x* e *y* duas grandezas diretamente proporcionais, então deve existir um número real *k* satisfazendo a relação:

$$\frac{y}{x} = k$$

Essa mesma relação pode ser expressa como função y = f(x) por:

$$y = k \cdot x$$

Relações expressas dessa forma são denominadas funções lineares, sendo o coeficiente real *k* denominado constante de proporcionalidade.

A representação gráfica de uma função linear, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, tem a forma de uma reta que passa pela origem do sistema, mas, no caso de as grandezas *x* e *y* serem estritamente positivas, os gráficos assumem formas de semirretas, contidas no primeiro quadrante, com extremidade na origem do sistema cartesiano.

De gráficos como esse é correto assumir que:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

Exercício resolvido

1 A reta que representa o gráfico da função y = f(x) passa pelos pontos (0, 0) e (50, 40); determine o valor de *x* quando y = 20.

Resolução:

Como a reta passa pela origem do sistema cartesiano, podemos concluir que as grandezas x e y são diretamente proporcionais.

Assim: $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \Rightarrow \frac{40}{50} = \frac{20}{x}$.

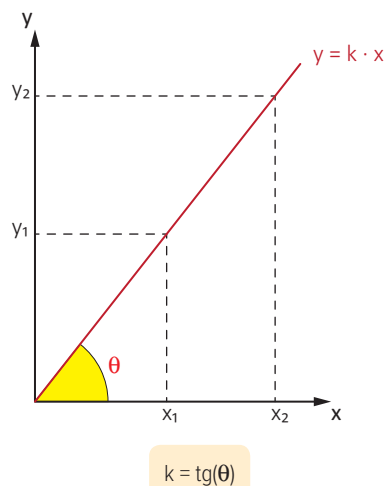
A proporção pode ser simplificada, dividindo por 20 ambos os numeradores das frações, obtendo:

$$\frac{40}{50} = \frac{20}{x} \Leftrightarrow \frac{2}{50} = \frac{1}{x}$$

Agora, do produto cruzado: $2x = 50 \Leftrightarrow x = 25$.

Saiba mais

Se as grandezas *x* e *y* forem realmente comprimentos e ambos os eixos estiverem na mesma escala de comprimentos, então, pode se afirmar que a constante de proporcionalidade é equivalente à tangente do ângulo de inclinação da reta que representa o gráfico da função, em relação ao eixo das abscissas (horizontal).

$k = tg(\theta)$

Também existem certas variações da estrutura de proporcionalidade em que uma grandeza *y* é diretamente proporcional a uma determinada função da grandeza *x*, e não à grandeza *x* em si Por exemplo:

- Dizemos que a grandeza *y* é diretamente proporcional ao **quadrado** da grandeza *x* quando existir um número real *k* tal que:

$$y = k \cdot x^2$$

- Dizemos que a grandeza *y* é diretamente proporcional ao **logaritmo decimal** da grandeza *x* quando existir um número real *k* tal que:

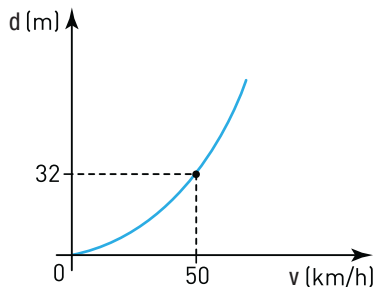
$$y = k \cdot \log(x)$$

- Dizemos que a grandeza *y* é diretamente proporcional ao **inverso** da grandeza *x* quando existir um número real *k* tal que:

$$y = k \cdot \frac{1}{x}$$

Neste último caso, também se pode dizer que as grandezas *x* e *y* são inversamente proporcionais e, nesses casos, o gráfico não será uma reta ou um segmento de reta.

Exercício resolvido

2 **Uerj 2012** Distância de frenagem é aquela percorrida por um carro do instante em que seu freio é acionado até o momento em que ele para. Essa distância é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade que o carro está desenvolvendo no instante em que o freio é acionado.
O gráfico abaixo indica a distância de frenagem *d*, em metros, percorrida por um carro, em função de sua velocidade *v*, em quilômetros por hora.

Admita que o freio desse carro seja acionado quando ele alcançar a velocidade de 100 km/h. Calcule sua distância de frenagem, em metros.

Resolução:

Conforme o enunciado, temos $d = k \cdot v^2$. Assim, de acordo com o gráfico: $32 = k \cdot 50^2 \Leftrightarrow k = \frac{32}{2500} = 0{,}0128$.
Então, para uma velocidade de 100 km/h, a distância de frenagem seria de:

$$d = 0{,}0128 \cdot 100^2 = 0{,}0128 \cdot 10000 = 128 \text{ m}$$

Proporção inversa

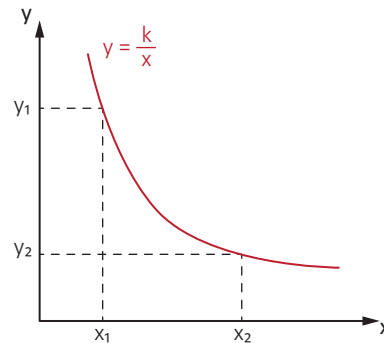
Dizemos que duas grandezas são inversamente proporcionais entre si quando há entre elas uma relação do tipo produto constante. Assim, quando os valores de uma delas são multiplicados pelos valores correspondentes da outra, obtém-se o mesmo resultado sempre.

Sendo *x* e *y* duas grandezas inversamente proporcionais, então deve existir um número real *k* satisfazendo a seguinte relação:

$$x \cdot y = k$$

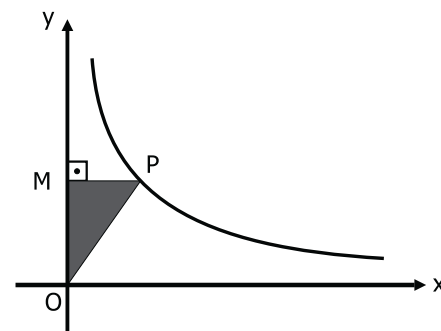
Essa mesma relação pode ser expressa como uma função y = f(x) por:

$$y = \frac{k}{x}$$

Relações expressas dessa forma são funções cujos gráficos ficam representados por arcos de hipérboles equiláteras cujas retas assíntotas são os próprios eixos coordenados.

De gráficos como esse é correto assumir que:

$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$$

Exercício resolvido

3 **Mackenzie 2012** Na figura, P é um ponto do gráfico da função y = f(x), com *x* e *y* inversamente proporcionais. Se (3, 90) é um outro ponto da curva, então a área do triângulo OMP é

A 135
B 90
C 180
D 45
E 270

Resolução:

Como *x* e *y* são inversamente proporcionais, temos que: $x_P \cdot y_P = 3 \cdot 90 = 270$.
Portanto, a área A do triângulo OMP é

$$A = \frac{270}{2} = 135 \text{ unidades de área.}$$

Alternativa: A.

Divisão em partes proporcionais

Todo valor numérico pode ser repartido em parcelas de formas diferentes. É possível dividir quantias em partes iguais ou proporcionais de acordo com o que se deseja. Mas, qualquer que seja o tipo de divisão, é necessário que a soma das partes resulte sempre no valor dividido.

Assim, se um valor V for dividido em duas partes *x* e *y*, teremos que:

$$x + y = V$$

Se for dividido em três partes *x*, *y* e *z*, então teremos que:

$$x + y + z = V$$

De forma genérica se o valor V for dividido em *n* partes $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n$, então teremos que:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + ... + x_n = V$$

Divisão em partes diretamente proporcionais

Para dividir um número N em duas partes *x* e *y*, diretamente proporcionais aos números a e b, é necessário resolver o seguinte sistema de equações: $\begin{cases} x + y = N \\ \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \end{cases}$.

Apresentamos duas maneiras de se resolver um sis tema como esse. Uma delas consiste em usar a constante de proporcionalidade k e expressar *x* e *y* em função de a e b. Assim, da segunda equação, vem:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = k \Rightarrow \begin{cases} x = a \cdot k \\ y = b \cdot k \end{cases}$$

Substituindo essas expressões na primeira equação do sistema, tem-se:

$$x + y = N$$
$$ak + bk = N$$
$$(a + b)k = N$$
$$k = \frac{N}{a + b}$$

Assim, tem-se que:

$$x = \frac{a \cdot N}{a + b} \quad \text{e} \quad y = \frac{b \cdot N}{a + b}$$

Outra maneira de resolver esse sistema é usando a propriedade das proporções, que permite somar os numeradores e os denominadores das frações que compõem a proporção, obtendo uma nova fração equivalente às originais. Assim:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{x + y}{a + b}$$

Então, como $x + y = N$, tem-se:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{N}{a + b} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a \cdot N}{a + b} \\ y = \frac{b \cdot N}{a + b} \end{cases}$$

Para dividir um número N em três partes *x*, *y* e *z* diretamente proporcionais aos números a, b e c, é necessário resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y + z = N \\ \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \end{cases}$$

Aplicando o primeiro método apresentado:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k \Rightarrow \begin{cases} x = a \cdot k \\ y = b \cdot k \\ z = c \cdot k \end{cases}$$

$$x + y + z = N$$
$$a \cdot k + b \cdot k + c \cdot k = N$$
$$(a + b + c) \cdot k = N$$
$$k = \frac{N}{a + b + c}$$

Logo:

$$x = \frac{a \cdot N}{a + b + c} \qquad y = \frac{b \cdot N}{a + b + c} \qquad z = \frac{c \cdot N}{a + b + c}$$

Exercício resolvido

4 Três amigos, Artur, Bruno e Cláudio, fizeram um jogo de R$ 60,00 na loteria esportiva e ganharam um prêmio de R$ 126.000,00. Como Artur contribuiu com apenas R$ 15,00 e Bruno com R$ 25,00, eles decidiram repartir o prêmio em partes diretamente proporcionais aos valores gastos na aposta. Quanto deverá receber cada um?

Resolução:

Os valores pagos pelos amigos foram:

$$\begin{cases} \text{Artur} \to \text{R\$ } 15{,}00 \\ \text{Bruno} \to \text{R\$ } 25{,}00 \\ \text{Cláudio} \to \text{R\$ } 60{,}00 - \text{R\$ } 15{,}00 - \text{R\$ } 25{,}00 = \text{R\$ } 20{,}00 \end{cases}$$

Como os valores são diretamente proporcionais aos números 3, 5 e 4, sendo A, B e C as parcelas, em reais, do prêmio que cada um deve receber, existe uma constante de proporcionalidade *k* tal que:

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{5} = \frac{C}{4} = k \qquad \text{(I)}$$

Como a soma dos valores recebidos por cada um deve ser igual ao valor total do prêmio:

$$A + B + C = \text{R\$ } 126.000{,}00 \qquad \text{(II)}$$

Da equação I, temos: $\begin{cases} A = 3 \cdot k \\ B = 5 \cdot k \\ C = 4 \cdot k \end{cases}$.

Substituindo essas expressões na equação (II), obtemos:

$$3 \cdot k + 5 \cdot k + 4 \cdot k = \text{R\$ } 126.000{,}00$$
$$12 \cdot k = \text{R\$ } 126.000{,}00$$
$$k = \frac{\text{R\$ } 126.000{,}00}{12}$$
$$k = \text{R\$ } 10\,500{,}00$$

Portanto: $\begin{cases} A = 3 \cdot \text{R\$ } 10.500{,}00 = \text{R\$ } 31.500{,}00 \\ B = 5 \cdot \text{R\$ } 10.500{,}00 = \text{R\$ } 52.500{,}00 \\ C = 4 \cdot \text{R\$ } 10.500{,}00 = \text{R\$ } 42.000{,}00 \end{cases}$.

Divisão em partes inversamente proporcionais

Para dividir um número N em duas partes *x* e *y* inver samente proporcionais aos números a e b, é necessário resolver o seguinte sistema de equações: $\begin{cases} x+y=N \\ a\cdot x=b\cdot y \end{cases}$

Usando a constante de proporcionalidade k podemos expressar *x* e *y* em função de a e b. Para isso, da segunda equação, vem: $ax=by=k \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{k}{a} \\ y=\dfrac{k}{b} \end{cases}$.

Substituindo essas expressões na primeira equação do sistema, tem-se:

$$x+y=N$$

$$\frac{k}{a}+\frac{k}{b}=N$$

$$\frac{b\ k\ \ a\ k}{a\ b}=N$$

$$\frac{(b+a)\cdot k}{a\ b}=N$$

$$k=\frac{a\cdot b\cdot N}{a+b}$$

Assim, tem-se que:

$$x=\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{a\cdot b\cdot N}{a+b}\right)=\frac{b\cdot N}{a+b} \quad \text{e} \quad y=\frac{1}{b}\cdot\left(\frac{a\cdot b\cdot N}{a+b}\right)=\frac{a\cdot N}{a+b}$$

Para dividir um número N em três partes *x*, *y* e *z* diretamente proporcionais aos números a, b e c, é necessário resolver o seguinte sistema de equações: $\begin{cases} x+y+z=N \\ a\cdot x=b\cdot y=c\cdot z \end{cases}$

Aplicando o mesmo método:

$$a\cdot x=b\cdot y=c\cdot z \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{k}{a} \\ y=\dfrac{k}{b} \\ z=\dfrac{k}{c} \end{cases}$$

$$x+y+z=N$$

$$\frac{k}{a}+\frac{k}{b}+\frac{k}{c}=N$$

$$\frac{b\cdot c\cdot k+a\cdot c\cdot k+a\cdot b\cdot k}{a\cdot b\cdot c}=N$$

$$\frac{(b\ c\ \ a\ c\ \ a\ b)\ k}{a\ b\ c}=N$$

$$k=\frac{a\cdot b\cdot c\cdot N}{a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c}$$

Portanto: $x=\dfrac{1}{a}\cdot\left(\dfrac{a\cdot b\cdot c\cdot N}{a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c}\right)=\dfrac{b\cdot c\cdot N}{a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c}$.

Dividindo o numerador e o denominador dessa fração por b · c, obtém-se:

$$x=\frac{N}{\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+1}$$

Analogamente, obtêm se:

$$y=\frac{N}{\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+1} \quad \text{e} \quad z=\frac{N}{\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1}$$

Exercício resolvido

5 Paulo faleceu em dezembro de 2010 e deixou para seus três filhos uma herança de R$ 130.000,00 que, segundo o testamento deveria ser dividida em partes inversamente proporcionais às suas idades.
Sabendo que o filho mais velho de Paulo nasceu em abril de 1986, o segundo filho nasceu em junho de 1992 e a filha caçula em fevereiro 1998, determine a quantia que cada um recebeu.

Resolução:

As idades dos filhos de Paulo em 2010 eram:

Mais velho → 2010 = 1986   24 anos
Segundo filho → 2010 − 1992 = 18 anos
Filha caçula → 2010 − 1998 = 12 anos

Assim, sendo *x*, *y* e *z* as parcelas, em reais, da herança que cada um deve receber, do mais velho para o mais novo, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} 24x=18y=12z=k & \text{(I)} \\ x+y+z=\text{R\$ }130.000{,}00 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação I, temos $x=\frac{k}{24}$ $y=\frac{k}{18}$ e $z=\frac{k}{12}$, expressões que substituídas na equação (II) fazem:

$$\frac{k}{24}+\frac{k}{18}+\frac{k}{12}=\text{R\$ }130.000{,}00$$

Como o mmc(24, 18, 12) = 72, tem-se:

$$\frac{3k+4k+6k}{72}=\text{R\$ }130.000{,}00 \Leftrightarrow \frac{13k}{72}=\text{R\$ }130.000{,}00$$

Dividindo ambos os membros da equação por 13:

$$\frac{k}{72}=\text{R\$ }10.000{,}00 \Leftrightarrow k=\text{R\$ }720.000{,}00$$

Assim: $\begin{cases} x=\dfrac{\text{R\$ }720.000{,}00}{24}=\text{R\$ }30.000{,}00 \\ y=\dfrac{\text{R\$ }720.000{,}00}{18}=\text{R\$ }40.000{,}00 \\ z=\dfrac{\text{R\$ }720\ 000{,}00}{12}=\text{R\$ }60.000{,}00 \end{cases}$

Portanto, o filho mais velho recebe R$ 30.000,00, o do meio, R$ 40.000,00 e a caçula, R$ 60 000,00.

Deduzindo uma relação de proporcionalidade

Duas grandezas não são diretamente proporcionais simplesmente porque uma delas aumenta quando a outra também aumenta. Crescimento simultâneo não significa crescimento proporcional.

Para garantir essa relação de proporcionalidade deve-se verificar se, quando o valor de uma das grandezas dupli ca, por exemplo, o valor da outra grandeza também du plica. Quando uma triplica, a outra também triplica, e assim por diante.

Observe que as idades de uma mãe e sua filha aumentam simultaneamente ao longo dos anos, mas o período necessário para que a idade de uma criança duplique não é o suficiente para que a idade de sua mãe também duplique. Assim, as idades de uma mãe e sua filha não são grandezas proporcionais.

Agora, quando medidas de segmentos de reta são comparadas em diferentes unidades de comprimento como, por exemplo, metro e polegada, os valores obtidos sempre terão relação de proporcionalidade direta.

Da mesma forma, duas grandezas não podem ser ditas inversamente proporcionais simplesmente porque o crescimento de uma delas acarreta o decrescimento no valor da outra.

Para garantir essa relação de proporcionalidade, deve-se verificar se quando o valor de uma das grandezas duplica, por exemplo, o valor da outra grandeza cai pela metade. Quando uma triplica, a outra cai para sua terça parte, e assim por diante.

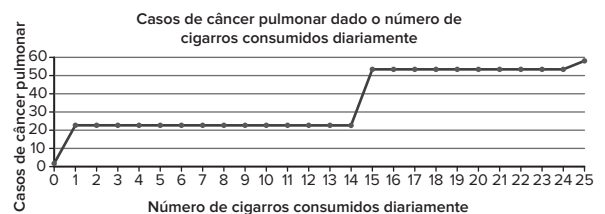
No estudo físico da energia de um corpo em queda livre, por exemplo, quando a energia cinética aumenta, a energia potencial do mesmo corpo diminui, mas não ocorre de uma delas duplicar sempre que a outra cai pela metade. Assim, as energias cinética e potencial de um corpo em queda livre não são grandezas proporcionais.

Agora, em uma compra parcelada sem juros, por exemplo, quando se compara a quantidade de parcelas ao valor de cada parcela, pode se perceber que, quando o número de parcelas cai pela metade, o valor de cada parcela deve duplicar Assim, a quantidade de parcelas e o valor de cada parcela são grandezas inversamente proporcionais

! Atenção

Em exercícios, as relações de proporcionalidade podem ser:
1. Declaradas pelo enunciado.
2. Deduzidas de valores apresentados em tabelas.
3 Deduzidas pelo contexto do problema

Exercícios resolvidos

6 Enem 2009 A suspeita de que haveria uma relação causal entre tabagismo e câncer de pulmão foi levantada pela primeira vez a partir de observações clínicas. Para testar essa possível associação, foram conduzidos inúmeros estudos epidemiológicos. Dentre esses, houve o estudo do número de casos de câncer em relação ao número de cigarros consumidos por dia, cujos resultados são mostrados no gráfico a seguir.

Fonte: Centers for Disease Control and Prevention CDC - EIS Summer Course, 1992. (Adapt.)

De acordo com as informações do gráfico:

A o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas inversamente proporcionais.

B o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas que não se relacionam.

C o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas diretamente proporcionais.

D uma pessoa não fumante certamente nunca será diagnosticada com câncer de pulmão.

E o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas que estão relacionadas, mas sem proporcionalidade.

Resolução:

De acordo com o gráfico, quando o número de ci garros consumidos diariamente duplica, temos que o número de casos de câncer pulmonar não duplica nem cai pela metade. Portanto, o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas que estão relacionadas, mas sem proporcionalidade.

Alternativa: E.

7 PUC-Minas Na tabela abaixo, y é inversamente proporcional ao quadrado de x ($x > 0$).

x	1	2	m
y	2	p	8

Com base nessas informações, é correto afirmar que os valores de **p** e **m** são:

A $p = \frac{1}{8}$ e $m = \frac{1}{4}$

B $p = \frac{1}{4}$ e $m = \frac{1}{8}$

C $p = \frac{1}{2}$ e $m = \frac{1}{4}$

D $p = \frac{1}{2}$ e $m = \frac{1}{2}$

Resolução:

De acordo com o enunciado, temos que:

$$\begin{cases} 2^2 \cdot p = 1^2 \cdot 2 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2} \\ 8 \cdot m^2 = 1^2 \cdot 2, \text{ com } m > 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Alternativa: D.

8 A frequência sonora da nota musical obtida fazendo-se soar uma corda esticada é diretamente proporcional à tensão, mas inversamente proporcional à área de sua secção transversal e ao seu comprimento. Observe a tabela com as frequências das notas de certa escala diatônica ocidental:

Nota	Lá	Si	Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	lá
Frequência (Hz)	440	495	536	578	660	715	770	880

Considere uma corda com 56 cm de comprimento que, em certa tensão, emite a nota Si (495 Hz) Se reduzirmos o comprimento dessa corda para 42 cm e a mantivermos sob a mesma tensão, qual será a nota que esta corda passará a emitir?

A Lá
B Ré
C Fá
D Sol
E Mi

Resolução:

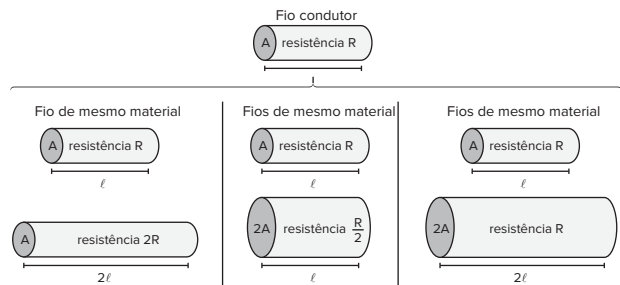
Diminuindo-se o comprimento de uma corda em 25%, ela fica com $\frac{3}{4}$ do seu comprimento original; como a frequência da nota emitida é inversamente proporcional ao comprimento da corda, temos que a frequência passa a ser igual a $\frac{4}{3}$ de 495 Hz, que são 660 Hz, que é a frequência da nota Mi.
Alternativa: E.

9 **Enem 2010**

A resistência elétrica e as dimensões do condutor

A relação da resistência elétrica com as dimensões do condutor foi estudada por um grupo de cientistas por meio de vários experimentos de eletricidade. Eles verificaram que existe proporcionalidade entre:

- resistência (R) e comprimento (ℓ), dada a mesma secção transversal (A);
- resistência (R) e área da secção transversal (A), dado o mesmo comprimento (ℓ) e
- comprimento (ℓ) e área da secção transversal (A), dada a mesma resistência (R).

Considerando os resistores como fios, pode-se exemplificar o estudo das grandezas que influem na resistência elétrica utilizando as seguintes figuras.

Disponível em: <www.efeitojoule.com>. Acesso em: abr. 2010. (Adapt.)

As figuras mostram que as proporcionalidades existentes entre resistência (R) e comprimento (ℓ), resistência (R) e área da secção transversal (A), e entre comprimento (ℓ) e área da secção transversal (A) são, respectivamente,

A direta, direta e direta.
B direta, direta e inversa.
C direta, inversa e direta.
D inversa, direta e direta.
E inversa, direta e inversa.

Resolução:

Verificamos pelas figuras que, dobrando o comprimento (ℓ) e mantendo a área (A), dobramos a resistência (R); dobrando a área (A) e mantendo o comprimento (ℓ), dividimos a resistência (R) por 2 e dobrando a área (A), devemos dobrar o comprimento (ℓ) para manter a mesma resistência (R).
Logo, teremos proporcionalidades direta, inversa e direta, respectivamente.
Alternativa: C.

Composição de proporções

Já vimos que, se uma grandeza A é diretamente pro porcional a uma grandeza B, para obtermos os valores de A, basta multiplicarmos os valores de B por uma constante real não nula

$$A = k \cdot B$$

Além disso, vimos que, se uma grandeza A é inversa mente proporcional a uma grandeza C, para obtermos os valores de A, basta dividirmos os valores da constante real não nula pela grandeza C.

$$A = \frac{k}{C}$$

Agora, se a grandeza A é diretamente proporcional à grandeza B e, simultaneamente, inversamente proporcional à grandeza C, então, haverá uma terceira constante real não nula que, multiplicada pela fração cujo numerador possui os valores da grandeza B e o denominador possui os valores da grandeza C, resulta nos valores de A. Uma vez conhecida essa constante, teremos:

$$A = k \cdot \frac{B}{C}$$

Seguindo esse padrão, se uma grandeza Y é direta mente proporcional às grandezas M e N, então existe uma constante real não nula tal que:

$$Y = k \cdot M \cdot N$$

Se uma grandeza Y é diretamente proporcional às grandezas L, M e N, então existe uma constante real não nula tal que:

$$Y = k \cdot L \cdot M \cdot N$$

Se uma grandeza Y é inversamente proporcional às grandezas P e Q, então existe uma constante real não nula tal que:

$$Y = \frac{k}{P \cdot Q}$$

Se uma grandeza Y é inversamente proporcional às grandezas P, Q e R, então existe uma constante real não nula tal que:

$$Y = \frac{k}{P \cdot Q \cdot R}$$

Sendo assim, se uma grandeza Y for diretamente proporcional a algumas grandezas (L, M, N, ...) e, ao mesmo tempo, for inversamente proporcional a outras grandezas (P, Q, R, ...), por exemplo, podemos expressar Y em função dessas grandezas proporcionais encontrando uma cons tante *k*, real e não nula, tal que:

$$Y = k \cdot \frac{L \cdot M \cdot N \cdot}{P \cdot Q \cdot R \cdot ...}$$

! Atenção

Note que, para expressar uma grandeza Y em função de suas grandezas proporcionais, a constante de proporcionalidade *k* sempre multiplica uma fração cujo numerador é o produto das grandezas que são diretamente proporcionais a Y, e o denominador é o produto das grandezas inversamente proporcionais a Y.

Encontrando constantes de proporcionalidade

Considere um experimento feito em laboratório que avalia três grandezas R, S e T envolvidas num mesmo fenômeno. Quando as medições de seus valores indicam a existência de relações de proporcionalidade, é possível determinar uma constante adequada a partir de alguns dos valores observados. Imagine que a tabela a seguir apresente alguns dos valores das grandezas R, S e T:

R	S	T
8	10	16
4	20	16
8	20	32

Observando os valores da tabela, é possível perceber que:

I. As grandezas R e S são **inversamente** proporcionais, pois da primeira para a segunda linha nota-se que a grandeza T = 16 se mantém constante, a grandeza S duplica de valor passando de 10 para 20, enquanto a grandeza R cai pela metade, passando de 8 para 4. Portanto, aqui o produto dessas grandezas é constante:

$$R \cdot S = 10 \cdot 8 = 20 \cdot 4$$

II. As grandezas S e T são **diretamente** proporcionais, pois da primeira para a terceira linha nota-se que a grandeza R = 8 se mantém constante e as grandezas S e T duplicam de valor, uma passando de 10 para 20 e a outra de 16 para 32. Portanto, aqui o quociente dessas grandezas é constante:

$$\frac{S}{T} = \frac{10}{16} = \frac{20}{32}$$

III. As grandezas R e T são **diretamente** proporcionais, pois da segunda para a terceira linha nota-se que a grandeza S = 20 se mantém constante e as grandezas R e T duplicam de valor, uma passando de 4 para 8 e a outra de 16 para 32. Portanto, aqui o quociente dessas grandezas é constante:

$$\frac{R}{T} = \frac{4}{16} = \frac{8}{32}$$

Assim, de acordo com as duas primeiras classificações de proporcionalidade, deve existir uma constante real não nula *k*, tal que:

$$S = k \cdot \frac{T}{R}$$

Note que:

- A grandeza T ocupa o numerador da fração porque é diretamente proporcional à grandeza S;
- A grandeza R ocupa o denominador da fração por que é inversamente proporcional à grandeza S.

Nesse momento, as informações contidas em qualquer linha da tabela podem ser usadas para se determinar o valor de *k*. Assim, usando os valores da primeira linha, por exemplo, tem-se:

$$S = k \cdot \frac{T}{R} \Rightarrow 8 = k \cdot \frac{16}{10}$$

Finalmente, resolvendo essa equação encontra-se k = 5.

Portanto, uma fórmula que permite expressar a grandeza S em função das grandezas T e R é:

$$S = 5 \cdot \frac{T}{R}$$

Se tivéssemos usado as duas últimas classificações de proporcionalidade feitas com os valores da tabela, deveríamos admitir a existência de outra constante de proporcionalidade *k*', tal que:

$$T = k' \cdot \frac{R \cdot S}{1}$$

Note que:

- A grandeza R ocupa o numerador da fração porque é diretamente proporcional à grandeza T;
- A grandeza S também ocupa o numerador da fração porque é diretamente proporcional à grandeza T

Como não há grandeza inversamente proporcional à grandeza T, o denominador da fração fica ocupado pelo número 1.

Novamente as informações contidas em qualquer linha da tabela podem ser usadas para se determinar o valor de *k*'. Então, usando os valores da segunda linha, por exemplo, tem-se:

$$T = k' \cdot R \cdot S \Rightarrow 16 = k \cdot 4 \cdot 20$$

Finalmente, resolvendo essa equação encontra-se k' = 0,2.

Portanto, uma fórmula que permite expressar a grandeza T em função das grandezas R e S é:

$$T = 0{,}2 \ R \ S$$

Portanto: $k' = \frac{1}{k}$

Atenção

Em todo problema desse tipo, há duas possibilidades para o valor da constante de proporcionalidade *k* ou *k*'. Tudo depende da grandeza escolhida para ser expressa em função das outras.

É importante observar que os valores de *k* e *k*' são recíprocos, ou seja: k · k' = 1.

Portanto: $k' = \frac{1}{k}$

Veja agora como lidar com uma quarta grandeza Y que estabelece relações de proporcionalidade com as demais grandezas R, S e T do exemplo anterior. Para isso vamos dispor da seguinte tabela:

	R	S	T	Y
Linha 1	8	10	16	12
Linha 2	4	20	16	12
Linha 3	8	20	32	12
Linha 4	4	10	16	6
Linha 5	8	20	64	6

Para encontrar uma expressão que forneça os valores de Y em função das grandezas R, S e T é necessário observar na tabela que:

I. Nas linhas 1 e 4, as grandezas S = 10 e T = 16 não variam. Isso permite afirmar que Y é uma grandeza diretamente proporcional a R, pois, da linha 1 para a linha 4, ambos os valores de Y e R caem pela metade, um passando de 12 para 6 enquanto o outro passa de 8 para 4. Portanto, aqui o quociente dessas grandezas é constante:

$$\frac{Y}{R} = \frac{12}{8} = \frac{6}{4}$$

II Nas linhas 2 e 4, as grandezas R = 4 e T = 16 não variam Isso permite afirmar que Y é uma grandeza diretamente proporcional a S, pois, da linha 2 para a linha 4, ambos os valores de Y e S caem pela metade, um passando de 12 para 6 enquanto o outro passa de 20 para 10 Portanto, aqui o quociente dessas grandezas é constante:

$$\frac{Y}{S} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10}$$

III. Nas linhas 3 e 5, as grandezas R = 8 e S = 20 não variam. Isso permite afirmar que Y é uma grandeza inversamente proporcional a T, pois, da linha 3 para a linha 5, a grandeza Y cai pela metade, passando de 12 para 6, enquanto a grandeza T duplica, passando de 32 para 64. Portanto, aqui o produto dessas grandezas é constante:

$$Y \cdot T = 12 \cdot 32 = 6 \cdot 64$$

As outras relações de proporcionalidade entre R, S e T também podem ser obtidas como no exemplo anterior, mas, dispondo-se apenas das relações que já foram encontradas, já é possível expressar uma função para Y. Resumindo, tem-se que:

- Y é grandeza diretamente proporcional a R e S;
- Y é grandeza inversamente proporcional a T.

Sendo assim, existe uma constante não nula *k*, tal que:

$$Y = k \cdot \frac{R \cdot S}{T}$$

Mais uma vez, as informações contidas em qualquer linha da tabela podem ser usadas na determinação do valor de *k*. Assim, usando os valores da quarta linha, por exemplo, tem-se:

$$Y = k \cdot \frac{R \cdot S}{T} \Rightarrow 6 = k \cdot \frac{4 \cdot 10}{16}$$

Finalmente, resolvendo essa equação encontra-se k = 2,4.

Portanto, uma fórmula que permite expressar a grandeza Y em função das grandezas R, S e T é:

$$Y = 2{,}4 \cdot \frac{R \cdot S}{T}$$

Exercício resolvido

10 Se três pedreiros constroem 200 metros de muro com 2,5 metros de altura em cinco dias, trabalhando dez horas por dia, quantos dias são necessários para que

dois pedreiros construam 180 metros de muro com 2 metros de altura, trabalhando seis horas por dia? Considere que todos os pedreiros sejam igualmente eficientes, que o rendimento de trabalho diário seja o mesmo a qualquer hora do dia e que a dificuldade de construção do metro quadrado de cada muro não dependa de suas dimensões.

Resolução:

Do enunciado, temos a seguinte tabela de grandezas:

D = Dias de trabalho	P = Nº de pedreiros	A = Área do muro	H = Horas diárias de trabalho
5	3	200 · 2,5 = 500	10
x	2	180 · 2 = 360	6

Como a grandeza D pode ser considerada diretamente proporcional à grandeza A, mas deve ser considerada inversamente proporcional às grandezas P e H, existe $k > 0$, tal que: $D = k \cdot \frac{A}{P \cdot H}$

Assim, da primeira linha da tabela, temos:

$$5 = k \cdot \frac{500}{3 \cdot 10} \Leftrightarrow k = \frac{3}{10}$$

Portanto, da segunda linha da tabela:

$$x = \frac{3}{10} \cdot \frac{360}{2 \cdot 6} \Leftrightarrow x = 9$$

Variação de grandezas

Calcula se a variação de uma grandeza subtraindo seu valor inicial de seu valor final. Essa diferença costuma ser representada pela letra grega Δ (delta maiúscula), escrita junto à grandeza que varia.

Assim, quando uma grandeza *x* varia de um valor inicial x_1 para um valor final x_2, indicamos a variação da grandeza *x* por:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Grandezas de variação diretamente proporcional

Dizemos que duas grandezas *x* e *y* têm variação diretamente proporcional quando existe uma constante real não nula tal que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$$

Essa mesma relação pode ser expressa como $\Delta y = k \cdot \Delta x$

Assim, representando por x_o e y_o os valores iniciais das grandezas *x* e *y*, da expressão anterior, tem-se que:

$$y - y_o = k \cdot (x - x_o)$$

No estudo da Geometria Analítica, uma relação expressa dessa forma é denominada equação de reta, pois seus gráficos cartesianos possuem esse formato específico. Nesse estudo, a constante de proporcionalidade *k* é também chamada de coeficiente angular e costuma ser representada pela letra *m*. Assim, a equação da reta fica:

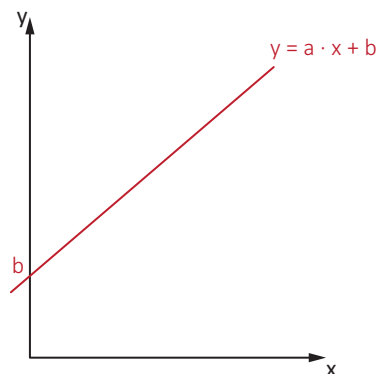
$$y - y_o = m \cdot (x - x_o)$$

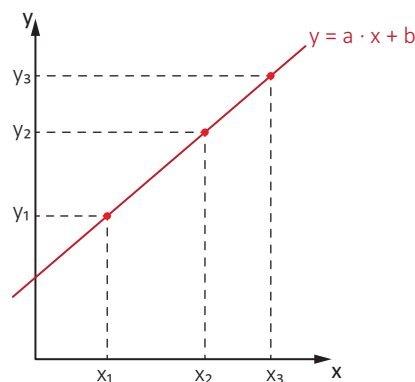
Continuando o desenvolvimento algébrico dessa sentença, tem-se:

$$y - y_o = m \cdot x - m \cdot x_o$$
$$y = m \cdot x - m \cdot x_o + y_o$$
$$y = m \cdot x + (y_o - m \cdot x_o)$$

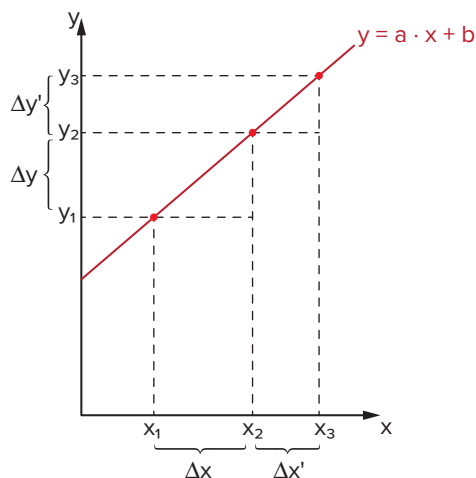
Assim, fazendo $a = m$ e $b = y_o - m \cdot x_o$, a mesma relação pode ser expressa como uma função polinomial de primeiro grau (função afim):

$$y = a \cdot x + b$$

No estudo da Álgebra os parâmetros **a** e **b** desse tipo de função são denominados coeficiente principal **(a)** e termo independente **(b)**. O parâmetro **b** de uma função afim também é chamado de coeficiente linear Seu valor indica o ponto onde a reta que representa o gráfico da função intercepta o eixo da ordenadas (vertical).

Em gráficos desse tipo é correto assumir a validade da regra de três direta, desde que aplicada às variações das grandezas *x* e *y*.

Para isso, é necessário identificar as coordenadas de três pontos da reta.

A partir dos pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) calculam-se duas variações de cada grandeza, por exemplo:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$
$$\Delta x' = x_3 - x_2$$
$$\Delta y = y_2 - y_1$$
$$\Delta y' = y_3 - y_2$$

FRENTE 2

Assim, finalmente é possível expressar algebricamente a relação de proporcionalidade entre as variações das grandezas *x* e *y*:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'} \Leftrightarrow \Delta x \cdot \Delta y' = \Delta x' \cdot \Delta y$$

Exercício resolvido

11 Sabendo que a variação do comprimento de uma barra metálica é diretamente proporcional à variação da temperatura, qual deve ser o comprimento, em centímetros, que atinge uma dessas barras quando aquecida a uma temperatura de 76 °C, se a 25 °C ela mede 0,65 m e a 55 °C ela passa a medir 0,7 m?

A 73,5
B 77,5
C 81,5
D 85,5
E 89,5

Resolução:

Sendo T a temperatura, em graus Celsius, e L o comprimento, em centímetros, da barra metálica em questão, tem-se a seguinte tabela:

T	L
25	65
55	70
76	x

As variações de temperatura são: $\left\{\begin{array}{l}\Delta T_1 = 55 \quad 25 \quad 30 \\ \Delta T_2 = 76 \quad 55 \quad 21\end{array}\right.$.

As variações no comprimento são: $\left\{\begin{array}{l}\Delta L_1 = 70 \quad 65 \quad 5 \\ \Delta L_2 = x \quad 70\end{array}\right.$.

Como essas variações são diretamente proporcionais da regra de três simples, temos:

$$\Delta T_1 \cdot \Delta L_2 = \Delta T_2 \cdot \Delta L_1$$
$$30 \cdot (x \quad 70) = 21 \cdot 5$$
$$30x \quad 2100 = 105$$
$$30x = 105 + 2100$$
$$x = \frac{2205}{30}$$
$$x = 73{,}5 \text{ cm}$$

Alternativa: A.

Aplicações da estrutura de proporcionalidade

O modelo matemático da análise de grandezas pro porcionais ou de variações proporcionais, estudado neste capítulo, é de fato um dos mais aplicados por outras ciên cias envolvidas nos processos de exames pré-vestibulares Tanto pelas ciências exatas, como a Física ou a Química, quanto por algumas das ciências humanas, como a Geo grafia, por exemplo Este modelo também é bastante útil em situações mais prosaicas, como a criação de galinhas.

Consideremos que o dono de uma pequena granja deva comprar ração periodicamente para alimentar suas galinhas adultas O número de galinhas adultas em uma granja é variável, podendo aumentar, pois em algum mo mento as jovens galinhas tornam-se adultas, mas podendo também diminuir, uma vez que as galinhas adultas serão abatidas ou vendidas

Além disso, a quantidade de ração comprada também pode variar em cada pedido, de acordo com a vontade do granjeiro ou a disponibilidade para entrega de seus fornecedores Assim, o tempo entre uma compra e outra deve oscilar de acordo com as variações das quantidades de galinhas e ração comprada

Embora seja bastante comum supor que as grandezas envolvidas nessa situação tenham relação de proporciona lidade, o método científico recomenda que essa suposição seja verificada antes da aplicação do modelo matemático Assim, imagine agora que o dono dessa granja construiu uma tabela comparando as três grandezas envolvidas para testar a hipótese da proporcionalidade:

Número de galinhas adultas	Quantidade de ração comprada	Tempo de duração da ração comprada
60	120 kg	24 dias
60	180 kg	36 dias
60	80 kg	16 dias
90	120 kg	16 dias
90	60 kg	8 dias
45	60 kg	16 dias

Já vimos que, para verificar a relação de proporcionalidade entre duas dessas três grandezas, basta observar um par de linhas da tabela que apresentem o mesmo valor para a terceira grandeza envolvida.

As duas primeiras linhas dessa tabela mostram que, com o mesmo número de galinhas, as quantidades de ração comprada e seus respectivos tempos de duração são diretamente proporcionais, pois tanto os números 120 e 180 quanto os números 24 e 36 estão na razão de 2 para 3:

$$\frac{120}{180} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

Essa mesma relação de proporcionalidade pode ser observada comparando-se a quarta e a quinta linha da tabela, pois elas mostram que, com um mesmo número de galinhas, o tempo de duração da ração comprada cai pela metade quando a quantidade de ração comprada também cai pela metade

Já as duas últimas linhas da tabela mostram que o número de galinhas adultas na criação e o tempo de duração da ração comprada são grandezas inversamente proporcionais, pois, com a mesma quantidade de ração comprada, o tempo de duração da ração comprada duplica quando o número de galinhas cai pela metade.

Assim, sendo:

- N = número de galinhas adultas na criação
- R = quantidade de ração comprada
- Δt = tempo de duração da ração comprada

É correto afirmar que:

- Δt e N são grandezas inversamente proporcionais.
- Δt e R são grandezas diretamente proporcionais

Então, existe uma constante de proporcionalidade *k* positiva tal que:

$$\Delta t = k \cdot \frac{R}{N}$$

Agora, basta escolher uma linha qualquer da tabela para se obter o valor de *k*. Assim, dos valores apresentados pela primeira linha da tabela, temos que: $24 = k \cdot \frac{120}{60} \Leftrightarrow k = 12$

Feito isso, o dono da granja obtém a relação:

$$\Delta t = 12 \cdot \frac{R}{N}$$

Essa relação, que pode ser verificada em cada linha da tabela, serve para prever com relativa precisão qual o tempo de duração da ração comprada de acordo com a quantidade e o número de galinhas adultas na granja Assim, se houver, por exemplo, 50 galinhas adultas na granja (N = 50) e apenas 100 kg de ração disponível no estoque (R = 100), essa ração se esgotará em:

$$\Delta t = 12 \cdot \frac{R}{N} = 12 \cdot \frac{100}{50} = 12 \cdot 2 = 24 \text{ dias}$$

Com as previsões fornecidas por essa relação, o granjeiro pode preparar-se melhor, do ponto de vista financeiro, para suas próximas compras.

Exemplos na Física

A expressão para calcular a velocidade média de um corpo em movimento é $v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$.

Nessa expressão temos a constante de proporcionalidade k = 1, mas isso acontece apenas se a unidade de medida da velocidade média está de acordo com as unidades em que foram medidos a variação de tempo e o deslocamento. Assim, por exemplo, podemos usar a expressão para obter a velocidade em metros por segundo apenas se o deslocamento for medido em metros e a variação de tempo, em segundos

Agora, se quiséssemos obter a velocidade média em quilômetros por hora, a partir do deslocamento em metros e do tempo em segundos, a expressão correta deveria ser escrita com uma constante de proporcionalidade igual a **trinta e seis décimos**, que possui uma unidade bastante estranha, o "quilômetro segundo por metro hora".

Toda constante física ou química tem uma unidade adequada para relacionar as grandezas que verificam alguma relação de proporcionalidade, mas o estudo dessas unidades é próprio da Física e da Química.

Neste ponto, o estudo da Matemática preocupa-se apenas com a obtenção do numeral que indica corretamente a medida de uma grandeza Para expressar as relações aritméticas entre os numerais que indicam os valores de grandezas proporcionais, sem nos preocupar com a adequação de suas unidades, existe uma notação particular que usa de palavras ou abreviações escritas entre colchetes.

Com essa notação, os números que indicam a velocidade média, em quilômetros por hora, podem ser obtidos do deslocamento em metros e da variação de tempo em segundos pela expressão:

$$[\text{Velocidade média}] = 3{,}6 \cdot \frac{[\text{deslocamento}]}{[\text{variação de tempo}]}$$

A força eletromagnética entre duas cargas elétricas Q_1 e Q_2 é uma grandeza diretamente proporcional aos módulos dessas cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. Assim, tem-se a expressão:

$$F = k \cdot \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{d^2}$$

Nessa relação, para que a força seja expressa em newton a partir das cargas medidas em coulomb e da distância em metros, deve-se adotar $k = 9 \cdot 10^9$

Entre as leis de Kepler para o movimento celeste há uma dizendo que o quadrado do período de revolução de um planeta em torno de sua estrela é diretamente proporcional ao cubo da distância média entre o planeta e a estrela. Assim, sendo T o período de rotação e D a distância média, tem-se que:

$$T^2 = k \cdot D^3$$

Nessa relação, a constante de proporcionalidade depende não só das unidades escolhidas para se medir o período e a distância, mas também da massa da estrela em que o planeta orbita No caso do Sistema Solar, tem-se $k \cong 1$

Exercício resolvido

12 A energia associada a um corpo em movimento é chamada de energia cinética E_C, cuja unidade é o joule (J). A grandeza da energia cinética é diretamente proporcional à grandeza da massa (em kg) do corpo e, também, é diretamente proporcional ao quadrado da grandeza de sua velocidade (em m/s)

Com base nesse texto, faça o que se pede em cada item:

a) Escreva uma relação que expresse a energia cinética em função da massa *m* e da velocidade *v* de um corpo, usando a letra k para indicar a cons tante de proporcionalidade

b) Determine o valor numérico da constante de proporcionalidade indicada na relação encontrada no item anterior, sabendo que um corpo com massa igual a 20 kg, que está a uma velocidade de 3 m/s, tem energia cinética de 90 J.

c) Reescreva a relação que expressa a energia cinética, em joules, em função da massa em quilogramas, e da velocidade, em metros por segundo, usando a constante de proporcionalidade encontrada no item anterior

d) Determine a energia cinética de um corpo com 90 kg que está a uma velocidade de 20 m/s

e) Determine a massa de um corpo que, a uma velocidade de 10 m/s, tem uma energia cinética de 50 J.

f) Determine a velocidade absoluta de um corpo cuja energia cinética é de 100 J e sua massa é de 8 kg

Resolução:

a) Como o quadrado da velocidade e a massa são diretamente proporcionais à energia cinética, então uma possível relação, com *k* positivo, é: $E_C = k \cdot m \cdot v^2$.

b) Do enunciado e do item anterior, temos:

$$90 = k \cdot 20 \cdot 3^2$$
$$90 = k \cdot 180$$
$$k = 0,5$$

c) Substituindo o valor encontrado no item anterior na expressão, temos: $E_C = 0,5 \cdot m \cdot v^2$.

d) $E_C = 0,5 \cdot 90 \cdot 20^2 = 45 \cdot 400 = 18\,000$ J

e) $50 = 0,5 \cdot m \cdot 10^2 \Leftrightarrow 50 = 50 \cdot m \Leftrightarrow m = 1$ kg

f) $100 = 0,5 \cdot 8 \cdot v^2 \Leftrightarrow 100 = 4 \cdot v^2 \Leftrightarrow 25 = v^2 \Leftrightarrow v = 5$ m/s

Exemplos na Geometria

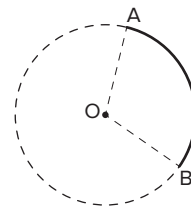
O comprimento de uma circunferência é diretamente proporcional ao comprimento de seu diâmetro. A constante que estabelece essa relação de proporcionalidade é indicada pela letra π e vale, aproximadamente, 3,1416.

Assim, estando o comprimento C da circunferência e o diâmetro numa mesma unidade de medida, temos:

$$[\text{circunferência}] = \pi \cdot [\text{diâmetro}]$$

Como o comprimento do diâmetro de uma circunferên cia mede o dobro da medida do seu raio *r*, essa relação pode ser expressa por:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Já o comprimento de um arco de circunferência é diretamente proporcional a duas outras grandezas, que são: a medida do ângulo central e o comprimento do raio da circunferência que contém o arco. Sendo assim:

$$\left[\text{comp}\left(\overset{\frown}{AB}\right)\right] = k \cdot \left[\text{med}\left(A\hat{O}B\right)\right] \cdot [\text{raio}]$$

Se tanto o comprimento do arco quanto o comprimento do raio estiverem na mesma unidade, e a medida do ângulo estiver expressa em radianos, temos k = 1, mas, se a medida do ângulo estiver em graus, teremos $k = \frac{\pi}{180^\circ}$ (aproximadamente 0,0175).

Assim, o comprimento de um arco de 40° em uma circunferência de raio 6 m é, numericamente, expresso por:

$$C = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 40^\circ \cdot 6 = \frac{4\pi}{3} \cong 4,2 \text{ m}$$

Outro exemplo envolvendo a mesma figura é o da área A do círculo, que é diretamente proporcional ao quadrado do comprimento do raio r, situação em que a constante de proporcionalidade é igual a π. Assim:

$$A = \pi \cdot r^2$$

Já o volume V de uma esfera é uma grandeza dire tamente proporcional ao cubo do raio r Nesse caso, a constante de proporcionalidade da relação é igual a $\frac{4\pi}{3}$ Assim:

$$V = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3$$

Exemplo na Química

Uma importante relação de proporcionalidade entre as grandezas associadas aos gases ideais: a pressão que um gás exerce no recipiente que o contém é diretamente proporcional à sua temperatura absoluta e à quantidade de gás (em mols) dentro do recipiente, mas é inversamente proporcional ao volume que ele ocupa. Sendo assim, temos:

$$[\text{pressão}] = k \cdot \frac{[\text{quantidade de gás}] \cdot [\text{temperatura}]}{[\text{volume}]}$$

Se a pressão (P) for medida em atmosferas, a temperatura (T) em graus Kelvin, o volume (V) em litros e a quantidade de gás (n) em número de mols, teremos k = 0,082, número conhecido como constante de Rutherford, que os químicos costumam indicar pela letra R. Assim:

$$P = 0,082 \cdot \frac{n \cdot T}{V} \Leftrightarrow P \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

Exercício resolvido

13 São dados dois recipientes A e B, tais que o volume do recipiente B é o triplo do volume do recipiente A Se a quantidade de gás no recipiente B é dobro da quantidade de gás no recipiente A, qual deve ser a razão entre as temperaturas absolutas dos gases nesses recipientes para que as pressões exercidas em ambos os recipientes seja a mesma?

Resolução:

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T \Rightarrow \begin{cases} P_A \cdot V_A = n_A \cdot R \cdot T_A & \text{(I)} \\ P_B \cdot V_B = n_B \cdot R \cdot T_B & \text{(II)} \end{cases}$$

Do enunciado: $\begin{cases} V_B = 3 \cdot V_A \\ n_B = 2 \cdot n_A \\ P_A = P_B \end{cases}$.

Assim, a segunda equação do sistema pode ser expressa por:

$$P_A \cdot 3 \cdot V_A = 2 \cdot n_A \cdot R \cdot T_B \qquad \text{(III)}$$

Então, dividindo-se a equação I pela equação III, temos:

$$\frac{P_A \cdot V_A}{P_A \cdot 3 \cdot V_A} = \frac{n_A \cdot R \cdot T_A}{2 \cdot n_A \cdot R \cdot T_B} \Leftrightarrow \frac{T_B}{T_A} = \frac{3}{2}$$

Exemplo na Geografia

No estudo da Geografia há uma grandeza denominada **densidade demográfica** que é diretamente proporcional ao número de habitantes de uma determinada região e inversamente proporcional à área dessa região, que é, geralmente, expressa em quilômetros quadrados; nesse caso, a constante de proporcionalidade é $k = 1$.

A densidade demográfica não representa nenhuma taxa periódica, uma vez que é relativa ao espaço e não ao tempo. Trata-se de uma razão composta que transmite uma noção de concentração populacional.

A expressão matemática que relaciona as grandezas da densidade demográfica D, da população P e da área S de uma mesma região é:

$$D = \frac{P}{S}$$

Exercícios resolvidos

14 Considere dois países que tenham a mesma população, mas tais que um deles tenha o triplo da densidade demográfica do outro. Então, se o mais denso tem 175 mil km^2 de área, qual deve ser a área do outro país?

Resolução:

Como as densidades demográficas são tais que $D_1 = 3 \cdot D_2$, temos:

	País 1	País 2
População	P	P
Área (em milhares de km^2)	175	x

Assim:

$$D_1 = 3 \cdot D_2 \Leftrightarrow \frac{P}{175} = \frac{3 \cdot P}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{175} = \frac{3}{x} \Leftrightarrow x = 3 \cdot 175$$

Note que a simplificação dos antecedentes foi feita dividindo-os pelo valor de P, que representa a população de ambos os países e, portanto, é diferente de zero.

Sendo *x* a área do segundo país em milhares de km^2, temos que essa área é de 525 000 km^2.

15 Em 2010 um projeto previa que o Governo Federal repartisse uma verba de R$ 135 milhões entre os três estados da região Sul do país, e que a repartição seria proporcional ao número de municípios ou à participação no PIB regional de cada um, baseando-se nos dados da seguinte tabela:

	Paraná	Santa Catarina	Rio Grande do Sul
Capital	Curitiba	Florianópolis	Porto Alegre
Extensão territorial	199 316 694 km^2	95 703 487 km^2	268 781 896 km^2
Quantidade de municípios	399	293	496
População	10 444 526 habitantes	6 248 436 habitantes	10 693 929 habitantes
População urbana	85,3%	84%	85,1%
Densidade demográfica	52,4 hab./km^2	65,3 hab./km^2	39,8 hab./km^2
Participação no PIB regional	36,5%	23,6%	39,9%

Fonte: IBGE

Faça uma estimativa do valor que cada estado deve ter recebido.

Resolução:

Sendo C_1, C_2 e C_3 as cotas, respectivamente, do Paraná, Santa Catarina e Rio Grande do Sul, temos que:

$$C_1 + C_2 + C_3 = \text{R\$ } 135.000.000,00$$

A quantidade de municípios é representada pelos números 399, 293 e 496, que são bastante próximos dos números 400, 300 e 500, bem mais simples de serem usados para fazer uma estimativa, pois são diretamente proporcionais aos números 4, 3 e 5. Assim:

$$\frac{C_1}{4} = \frac{C_2}{3} = \frac{C_3}{5} = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{4+3+5} = \frac{\text{R\$ } 135.000\,000,00}{12} = \text{R\$ } 11.250.000,00$$

Portanto, as cotas seriam, aproximadamente, de:

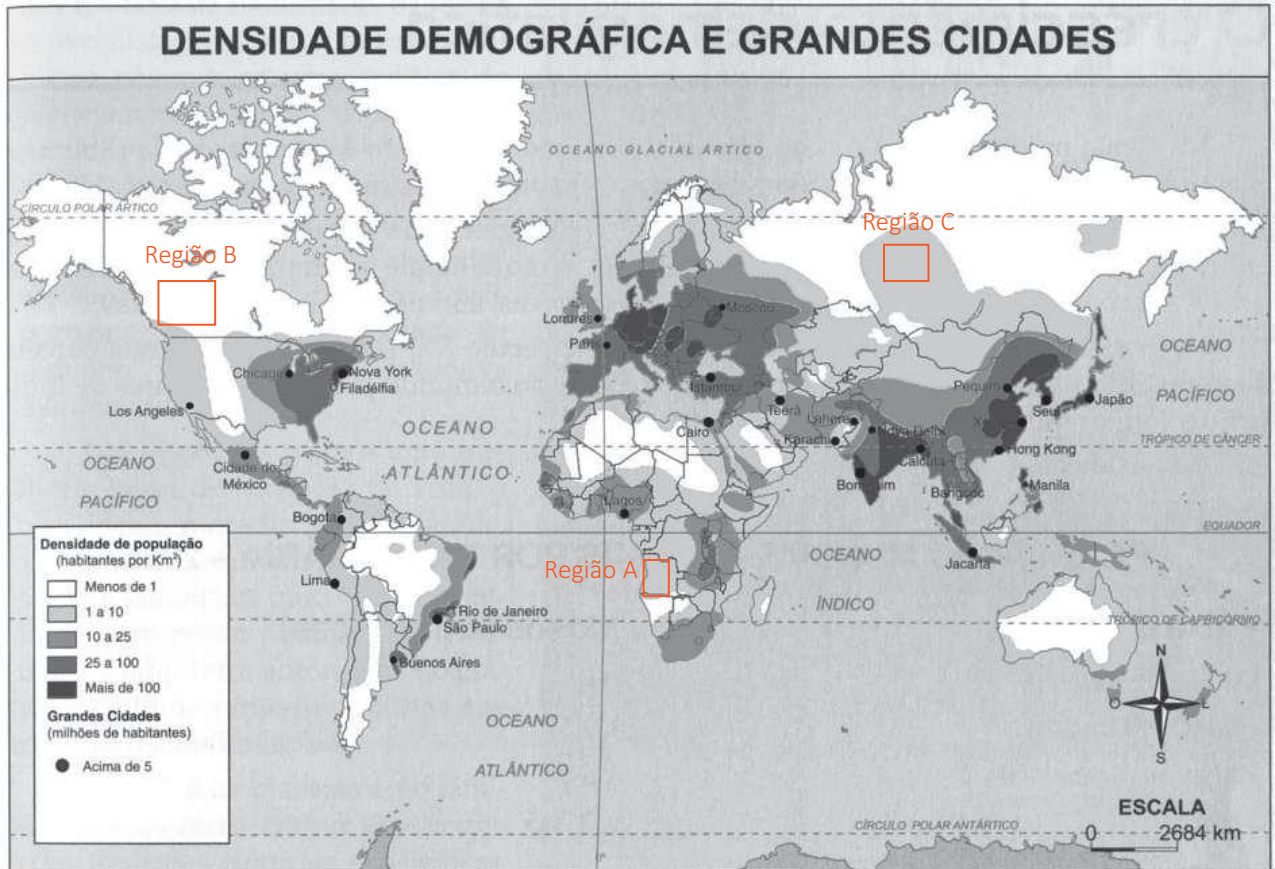
$$\begin{cases} \text{PR: } C_1 = 4 \cdot \text{R\$ } 11.250.000,00 = \text{R\$ } 45.000.000,00 \\ \text{SC: } C_2 = 3 \cdot \text{R\$ } 11.250.000,00 = \text{R\$ } 33.750.000,00 \\ \text{RS: } C_3 = 5 \cdot \text{R\$ } 11.250.000,00 = \text{R\$ } 56.250.000,00 \end{cases}$$

Agora, se as cotas fossem proporcionais às participações de cada estado no PIB da região, nossa estimativa poderia ser feita aproximando-se os percentuais de 36,5% para o Paraná, 23,6% para Santa Catarina e 39,9% para o Rio Grande do Sul para, respectivamente, 36%, 24% e 40%. Em seguida, devemos escrever esses números na proporção como taxas unitárias, aproveitando o fato de que a soma das partes do número 1 é igual ao número 1.

$$\frac{C_1}{0,36} = \frac{C_2}{0,24} = \frac{C_3}{0,40} = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{0,36 + 0,24 + 0,40} = \frac{\text{R\$ } 135.000.000,00}{1,00} = \text{R\$ } 135.000.000,00$$

Nesse caso, as cotas seriam:

$$\begin{cases} \text{Paraná} \rightarrow \dfrac{C_1}{0,36} = \text{R\$ } 135.000.000,00 \Rightarrow C_1 = 0,36 \cdot \text{R\$ } 135.000.000,00 = \text{R\$ } 48.600.000,00 \\ \text{Santa Catarina} \rightarrow \dfrac{C_2}{0,24} = \text{R\$ } 135.000.000,00 \Rightarrow C_2 = 0,24 \cdot \text{R\$ } 135.000.000,00 = \text{R\$ } 32.400.000,00 \\ \text{Rio Grande do Sul} \rightarrow \dfrac{C_3}{0,40} = \text{R\$ } 135.000.000,00 \Rightarrow C_3 = 0,40 \cdot \text{R\$ } 135.000.000,00 = \text{R\$ } 54.000.000,00 \end{cases}$$

16 O mapa a seguir mostra a distribuição da população mundial em meados dos anos 1970, de forma que, quanto mais escura é a região do mapa, maior é a concentração de indivíduos no local.

Nesse mapa estão destacadas três regiões:

- Região A: corresponde ao território de Angola, país com uma área territorial de 1246700 km^2 e cuja população, à época, tinha acabado de ultrapassar os 6 milhões de habitantes;
- Regiões B e C: situadas na América do Norte e na Ásia, respectivamente, têm a mesma área, porém, igual ao dobro da área da região A.

Com base nas informações contidas no mapa e no enunciado, assinale a alternativa **incorreta** a respeito das medidas demográficas dessas regiões naquela época:

A O número de habitantes da região B era menor do que o número de habitantes da região C.
B A densidade demográfica de Angola era, naquela época, de aproximadamente 5 habitantes por km^2.
C Em meados dos anos 1970 a região A tinha uma população menor que a população da região B.
D É possível que a região A tenha uma população maior que a população da região C.
E Se as regiões A e C têm a mesma densidade demográfica, então a população da região C é de, aproximadamente, 12 milhões de pessoas.

Resolução:

Nessa representação da superfície do planeta há:
Regiões de mesma área, mas em cores diferentes, como B e C.
Regiões com a mesma cor, mas cujas áreas são diferentes, como A e C.
Regiões com cores e áreas diferentes, como A e B.
Sejam D_x, P_x e S_x, respectivamente, a densidade demográfica, a população e a área da região X
Alternativa A: correta Do gabarito de cores do mapa, temos: $D_B < 1$ e $1 < D_C < 10$, portanto, $D_B < D_C$.
Então, como $S_B = S_C > 0$ e $P = D \quad S$, temos que $D_B \quad S_B < D_C \quad S_C \Leftrightarrow P_B < P_C$.
Alternativa B: correta O texto informa que Angola tem uma área de 1246700 km^2, porém, como a informação da população PA = 6 milhões foi dada de forma aproximada, podemos também usar $S_A = 1200000$ km^2 como aproxima ção da área e, assim, concluir que: $D_A = \frac{P_A}{S_A} = \frac{6000000 \text{ habitantes}}{1200000 \text{ km}^2} = 5$ habitantes por km^2

FRENTE 2

Alternativa C: incorreta. Do gabarito de cores do mapa temos $D_B < 1$. Do texto temos que: $S_B = 2 \cdot S_A$, logo, $S_B = 2493400\ km^2$.

Portanto, temos que $\frac{P_B}{2493400} < 1 \Leftrightarrow P_B < 2493400$ habitantes, que é menor que os 6 000 000 de habitantes de A.

Alternativa D: correta. O texto informa que $S_C = 2 \quad S_A$, portanto, $S_C = 2493400\ km^2$ Do gabarito de cores do mapa temos que: $1 < D_C < 10$. Então $D_C = 2$ é uma possibilidade válida e, nesse caso, temos:

$$D_C = \frac{P_C}{S_C} \Rightarrow 2 = \frac{P_C}{2493400} \Leftrightarrow P_C = 4986800 \text{ habitantes (menor que os 6 000 000 de habitantes de A)}$$

Alternativa E: correta. Da hipótese $D_A = D_C$, ou seja, $\frac{P_A}{S_A} = \frac{P_C}{S_C}$. Como $S_A = 2 \cdot S_C$ e $P_A = 6$ milhões (aproximadamente), temos que $\frac{6 \text{ milhões}}{S_A} = \frac{P_C}{2 \cdot S_A}$. Assim, simplificando a grandeza S_A nos denominadores das frações, e resolvendo a equação, temos, nessa hipótese, que $P_C = 12$ milhões de habitantes (aproximadamente).

Alternativa: C.

Revisando

1 Enem 2019 Três sócios resolveram fundar uma fábrica O investimento inicial foi de R$ 1.000.000,00. E, independentemente do valor que cada um investiu nesse primeiro momento, resolveram considerar que cada um deles contribuiu com um terço do investimento inicial

Algum tempo depois, um quarto sócio entrou para a sociedade, e os quatro, juntos, investiram mais R$ 800.000,00 na fábrica Cada um deles contribuiu com um quarto desse valor Quando venderam a fábrica, nenhum outro investimento havia sido feito Os sócios decidiram então dividir o montante de R$ 1.800.000,00 obtido com a venda, de modo proporcional à quantia total investida por cada sócio

Quais os valores mais próximos, em porcentagens, correspondentes às parcelas financeiras que cada um dos três sócios iniciais e o quarto sócio, respectivamente, receberam?

A 29,60 e 11,11 **B** 28,70 e 13,89. **C** 25,00 e 25,00. **D** 18,52 e 11,11 **E** 12,96 e 13,89.

2 Enem 2013 Para se construir um contrapiso, é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com 14 m^3 de concreto.

Qual é o volume de cimento, em m^3, na carga de concreto trazido pela betoneira?

A 1,75 **B** 2,00 **C** 2,33 **D** 4,00 **E** 8,00

3 Uerj 2018 Uma herança foi dividida em exatamente duas partes: *x*, que é inversamente proporcional a 2, e *y*, que é inversamente proporcional a 3.

A parte *x* é igual a uma fração da herança que equivale a:

A $\frac{3}{5}$ **B** $\frac{2}{5}$ **C** $\frac{1}{6}$ **D** $\frac{5}{6}$

4 **Enem 2018** Uma loja vende automóveis em N parcelas iguais sem juros. No momento de contratar o financiamento, caso o cliente queira aumentar o prazo, acrescentando mais 5 parcelas, o valor de cada uma das parcelas diminui R$ 200,00, ou se ele quiser diminuir o prazo, com 4 parcelas a menos, o valor de cada uma das parcelas sobe R$ 232,00. Considere ainda que, nas três possibilidades de pagamento, o valor do automóvel é o mesmo, todas são sem juros e não é dado desconto em nenhuma das situações.
Nessas condições, qual é a quantidade N de parcelas a serem pagas de acordo com a proposta inicial da loja?

A 20
B 24
C 29
D 40
E 58

5 A pressão é uma medida de força por unidade de área que, no estudo da mecânica dos fluidos, costuma ser separada em dois tipos: a pressão estática P_{est}, e a pressão dinâmica P_{din}. A pressão dinâmica exercida por um líquido é diretamente proporcional tanto à densidade **ρ** do líquido quanto ao quadrado de sua velocidade *v*.
Sendo assim, deve existir uma constante de proporcionalidade *k* tal que:

A $P_{din} = k \cdot \frac{\rho}{v^2}$
B $P_{din} = k^2 \cdot \rho \cdot v$
C $P_{din} = k \cdot \frac{\rho^2}{v}$
D $P_{din} = k \cdot \rho \cdot v^2$
E $P_{din} = k^2 \cdot \frac{v^2}{\rho}$

6 **UPE 2017** Um grupo com 50 escoteiros vai acampar durante 28 dias Eles precisam comprar uma quantidade de açú car suficiente para esses dias e já sabem que a média de consumo por semana, para 10 pessoas é de 3500 gramas de açúcar. Quantos quilogramas de açúcar são necessários para os 28 dias de acampamento desse grupo?

A 15,5
B 17,5
C 35
D 50,5
E 70

7 **ESPM 2016** Duas impressoras iguais imprimem 5000 páginas em 30 minutos Se elas forem substituídas por uma só impressora 20% mais eficiente que cada uma das anteriores, 3600 páginas seriam impressas num tempo de:

A 36 min
B 42 min
C 24 min
D 28 min
E 48 min

8 **PUC-Rio 2018** Sabemos que 5 gatos comem 20 kg de ração em 20 dias. Considere as seguintes afirmações:

I 2 gatos comem 2 kg de ração em 2 dias.
II 5 gatos comem 5 kg de ração em 5 dias.
III 4 gatos comem 16 kg de ração em 16 dias

Quais destas afirmativas são verdadeiras?

A Apenas I
B Apenas II
C Apenas III
D Nenhuma delas
E Todas as três

9 **Uece 2017** Um fazendeiro tem reserva de ração suficiente para alimentar suas 16 vacas durante 62 dias. Após 14 dias, o fazendeiro vendeu 4 vacas e continuou a alimentar as restantes seguindo o mesmo padrão inicial. Quantos dias, no total, durou sua reserva de ração?

A 80. B 78. C 82. D 76.

10 **Enem 2017** Às 17 h 15 min começa uma forte chuva, que cai com intensidade constante. Uma piscina em forma de paralelepípedo retângulo, que se encontrava inicialmente vazia, começa a acumular a água da chuva e, às 18 horas, o nível da água em seu interior alcança 20 cm de altura. Nesse instante, é aberto o registro que libera o escoamento da água por um ralo localizado no fundo dessa piscina, cuja vazão é constante. Às 18 h 40 min a chuva cessa e, nesse exato instante o nível da água na piscina baixou para 15 cm.

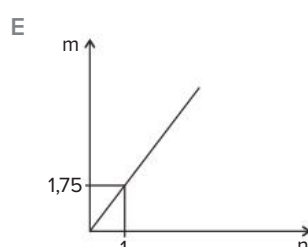
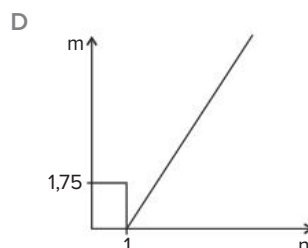
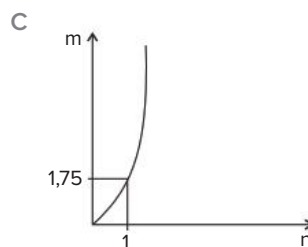
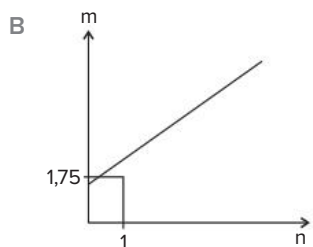
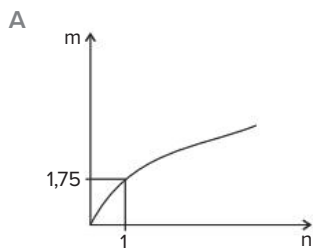
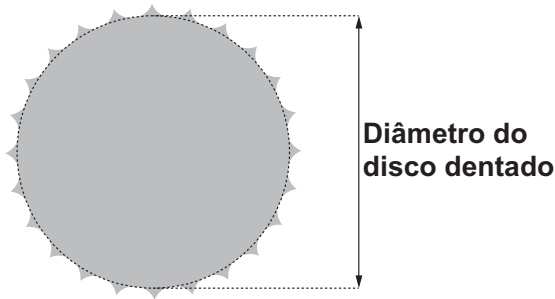
O instante em que a água dessa piscina terminar de escoar completamente está compreendido entre

A 19 h 30 min e 20 h 10 min.
B 19 h 20 min e 19 h 30 min.
C 19 h 10 min e 19 h 20 min.
D 19 h e 19 h 10 min.
E 18 h 40 min e 19 h.

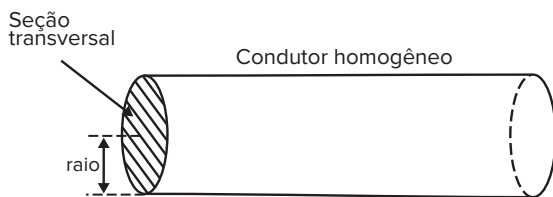
Exercícios propostos

1 **Enem 2011** As frutas que antes se compravam por dúzias, hoje em dia, podem ser compradas por quilogramas, existindo também a variação dos preços de acordo com a época de produção. Considere que, independente da época ou variação de preço, certa fruta custa R$ 1,75 o quilograma

Dos gráficos a seguir, o que representa o preço *m* pago em reais pela compra de *n* quilogramas desse produto é

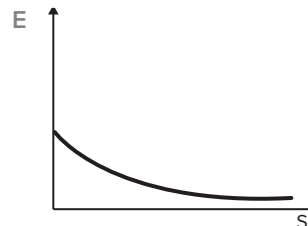
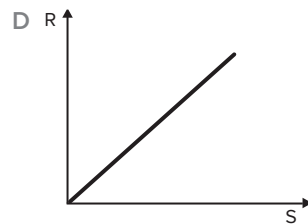
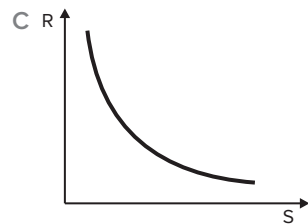
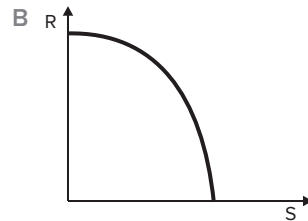
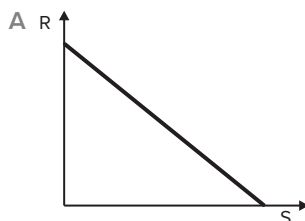
A
B
C
D
E

2 **Enem 2019** Um ciclista quer montar um sistema de marchas usando dois discos dentados na parte traseira de sua bicicleta, chamados catracas. A coroa é o disco dentado que é movimentado pelos pedais da bicicleta, sendo que a corrente transmite esse movimento às catracas, que ficam posicionadas na roda traseira da bicicleta. As diferentes marchas ficam definidas pelos diferentes diâmetros das catracas, que são medidos conforme indicação na figura.

O ciclista já dispõe de uma catraca com 7 cm de diâmetro e pretende incluir uma segunda catraca, de modo que, à medida em que a corrente passe por ela, a bicicleta avance 50% a mais do que avançaria se a corrente passasse pela primeira catraca, a cada volta completa dos pedais.
O valor mais próximo da medida do diâmetro da segunda catraca, em centímetro e com uma casa decimal, é

A 2,3.
B 3,5.
C 4,7.
D 5,3.
E 10,5

3 **Enem PPL 2018** A resistência elétrica R de um condutor homogêneo é inversamente proporcional à área S de sua seção transversal.

Disponível em: http://efisica.if.usp.br. Acesso em: 2 ago. 2012.

O gráfico que representa a variação da resistência R do condutor em função da área S de sua seção transversal é

A
B
C
D R S

E S

4 **UFPA 2013** Na paralimpíada de 2012, o corredor paraense Alan Fonteles ganhou medalha de ouro nos 200 m rasos na categoria T44. Usou novas próteses, que alongaram o comprimento de seus membros inferiores em 6 cm. O comprimento de seus membros inferiores com as antigas próteses era de 79 cm e, com estas, ele corria os 200 m em 23 s. Considerando que os outros fatores (peso, preparo físico, etc.) não se alterem, seu tempo ao correr os 200 m rasos com as novas próteses deve diminuir, em segundos, aproximadamente:

A 1,0
B 1,2
C 1,4
D 1,6
E 2,8

5 **FMP 2016** Considere a soma 0,75 + 1,25 + 1 = 3.
Os números 0,75; 1,25 e 1 configuram a decomposição do número 3 em parcelas diretamente proporcionais a

A 20; 12 e 15
B $\frac{5}{75}; \frac{5}{120}$ e $\frac{1}{50}$
C 3; 5 e 4
D $\frac{4}{3}; \frac{4}{5}$ e 1
E $\frac{1}{3}; \frac{1}{5}$ e $\frac{1}{4}$

FRENTE 2

6 Enem 2019 Para contratar três máquinas que farão o reparo de vias rurais de um município, a prefeitura elaborou um edital que, entre outras cláusulas, previa:

- Cada empresa interessada só pode cadastrar uma única máquina para concorrer ao edital;
- O total de recursos destinados para contratar o conjunto das três máquinas é de R$ 31.000,00;
- O valor a ser pago a cada empresa será inversamente proporcional à idade de uso da máquina cadastrada pela empresa para o presente edital.

As três empresas vencedoras do edital cadastraram máquinas com 2, 3 e 5 anos de idade de uso.
Quanto receberá a empresa que cadastrou a máquina com maior idade de uso?

A R$ 3100,00
B R$ 6.000,00
C R$ 6.200,00
D R$ 15.000,00
E R$ 15.500,00

7 UPE 2013 As famílias Tatu, Pinguim e Pardal realizaram uma viagem juntas, cada uma em seu carro. Cada família sabe muito bem o quanto o seu carro consome de gasolina. O quadro a seguir mostra o carro de cada uma das famílias, com os respectivos consumos médios

Família	Carro	Consumo
Tatu	Penault	20 Km/l
Pinguim	Pevrolet	15 Km/l
Pardal	Piat	12 Km/l

Nessa viagem, eles sempre pagaram a gasolina com o mesmo cartão de crédito. Ao final da viagem, eles perceberam que consumiram 1200 litros de gasolina e gastaram 3 mil reais com esses abastecimentos.
Como eles decidiram dividir a despesa de forma proporcional ao que cada família consumiu, quanto deverá pagar a família Pardal?

A R$ 750,00
B R$ 1.000,00
C R$ 1.050,00
D R$ 1.250,00
E R$ 1.800,00

8 Uece 2015 Duas grandezas positivas x e y são inversamente proporcionais se existe uma correspondência bijetiva entre os valores de x e os valores de y e um número constante positivo k tal que, se o valor y é o correspondente do valor x então $y \cdot x = k$ Nestas condições, se o valor y = 6 é o correspondente ao valor x = 25, então o valor y que corresponde ao valor x = 15 é

A 8. B 10. C 12. D 14.

9 IFCE 2016 Três números naturais são diretamente proporcionais a 2, 3 e 5. Se a soma dos quadrados desses números é 342, então os três números são

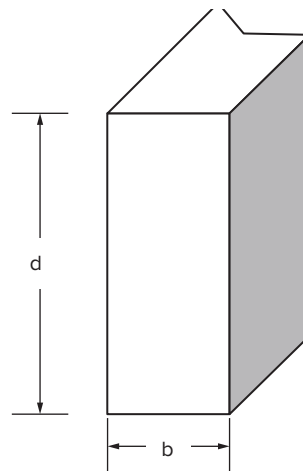
A 6, 9 e 15.
B 10, 30 e 50.
C 4, 6 e 10.
D 5, 8 e 12.
E 8, 12 e 20.

10 Enem 2011 Cerca de 20 milhões de brasileiros vivem na região coberta pela caatinga, em quase 800 mil km² de área. Quando não chove, o homem do sertão e sua família precisam caminhar quilômetros em busca da água dos açudes. A irregularidade climática é um dos fatores que mais interferem na vida do sertanejo.

Disponível em: http://www.wwf.org.br. Acesso em: 23 abr. 2010.

Segundo este levantamento, a densidade demográfica da região coberta pela caatinga, em habitantes por km², é de

A 250.
B 25
C 2,5
D 0,25
E 0,025

11 Enem 2011 A resistência das vigas de dado comprimento é diretamente proporcional à largura (b) e ao quadrado da altura (d), conforme a figura. A constante de proporcionalidade *k* varia de acordo com o material utilizado na sua construção.

Considerando-se S como a resistência, a representação algébrica que exprime essa relação é

A $S = k \cdot b \cdot d$
B $S = b \cdot d^2$
C $S = k \cdot b \cdot d^2$
D $S = \frac{k \cdot b}{d^2}$
E $S = \frac{k \cdot d^2}{b}$

12 A vazão de um líquido passando por uma tubulação cilíndrica é uma grandeza V diretamente proporcional ao quadrado do raio da tubulação e diretamente proporcional à velocidade de escoamento do líquido.
Assim, sendo *r* a medida do raio da tubulação, *v* a velocidade de escoamento do líquido e *k* a constante de proporcionalidade adequada a essa situação, pode-se concluir que:

A $V = k \cdot v \cdot r$
B $V = k \cdot v^2 \cdot r$
C $V = k \cdot r^2 \cdot v$
D $V = \frac{k^2 \cdot r}{v}$
E $V = \frac{k \cdot r^2}{v}$

13 Uma lâmpada comum pode ser considerada como uma fonte de luz puntiforme quando suas dimensões são inferiores a um quinto da distância entre a lâmpada e o objeto iluminado. A intensidade da luz num ponto P oriunda de uma fonte de luz puntiforme situada num ponto L é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os pontos P e L. Esta relação pode ser modelada pela expressão $I = \frac{k}{d^2}$ em que I é a intensidade da luz, em watts por metro quadrado, e *k* é uma constante.

A figura 1 mostra um vaso de flores no piso de uma sala, iluminado por uma lâmpada que está a 3 metros de altura. Se esse vaso for colocado sobre uma mesa com meio metro de altura, como mostra a figura 2, então a intensidade da luz no vaso aumentará em:

A 40% B 44% C 50% D 55% E 60%

14 **Enem 2013** Muitos processos fisiológicos e bioquímicos, tais como batimentos cardíacos e taxa de respiração, apresentam escalas construídas a partir da relação entre superfície e massa (ou volume) do animal. Uma dessas escalas, por exemplo, considera que "o cubo da área S da superfície de um mamífero é proporcional ao quadrado de sua massa M".

HUGHES-HALLETT, D. et al. Cálculo e aplicações. São Paulo: Edgard Blücher, 1999 (adaptado).

Isso é equivalente a dizer que, para uma constante $k > 0$, a área S pode ser escrita em função de M por meio da expressão:

A $S = k \cdot M$
B $S = k \cdot M^{\frac{1}{3}}$
C $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{\frac{1}{3}}$
D $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{\frac{2}{3}}$
E $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^2$

15 **Uece 2015** Se um pacote de biscoito contém 10 biscoitos e pesa 95 gramas, e se 15 gramas de biscoito correspondem a 90 calorias, quantas calorias tem cada biscoito?

A 53 calorias.
B 55 calorias.
C 57 calorias.
D 59 calorias.

16 **Enem** Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região. Vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg de alimentos por dia. Animados com os resultados, 30 novos alunos somaram-se ao grupo, e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha.

Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado seria de:

A 920 kg
B 800 kg
C 720 kg
D 600 kg
E 570 kg

17 **IFSC 2016** Em uma fábrica, quatro máquinas empacotam 10000 balas por hora. Se quisermos empacotar 50000 balas em meia hora, é **CORRETO** afirmar que o número de máquinas necessárias para executar esse trabalho será exatamente

A 30. B 20. C 40. D 60. E 18.

18 **Enem 2013** Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para 900 m^3. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de 500 m^3, cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente

A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a

A 2. B 4. C 5. D 8. E 9

19 Três amigos investiram 50, 60 e 90 mil reais na construção de uma casa, mas, quando ela ficou pronta, o local de construção havia se desvalorizado, e eles só conseguiram vendê-la por R$ 170.000,00. Então, dividiram o dinheiro da venda em partes diretamente proporcionais aos valores investidos. A maior dessas partes foi de:

A R$ 765.000,00
B R$ 85.000,00
C R$ 76.500,00
D R$ 8.500,00
E R$ 7.650,00

20 **PUC PR 2018** Considere as informações a seguir

Uma máquina automática produz um único tipo de peças, idênticas, de um determinado produto, operando sempre, por motivos de segurança, apenas e exatamente 12 horas a cada dia, ininterruptamente, todos os dias da semana, inclusive aos sábados, domingos e feriados. Essa máquina será substituída por outra, mais moderna, que tem a capacidade de produzir o quádruplo da quantidade de peças (do mesmo tipo) que produz a atual, em um mesmo período de tempo. A nova máquina vai operar, ininterruptamente, por 21 horas a cada dia, todos os dias da semana.

Durante quantos dias, no mínimo, a nova máquina precisará operar para produzir o triplo do que a antiga produz em uma semana?

A 1 dia.
B 3 dias.
C 4 dias.
D 5 dias.
E 6 dias.

Texto complementar

Grandezas de variação inversamente proporcional

Dizemos que duas grandezas têm variação inversamente proporcional quando existe uma constante real não nula tal que $\Delta y \cdot \Delta x = k$.

Representando por x_0 e y_0 os valores iniciais das grandezas *x* e *y*, da expressão anterior, tem-se que:

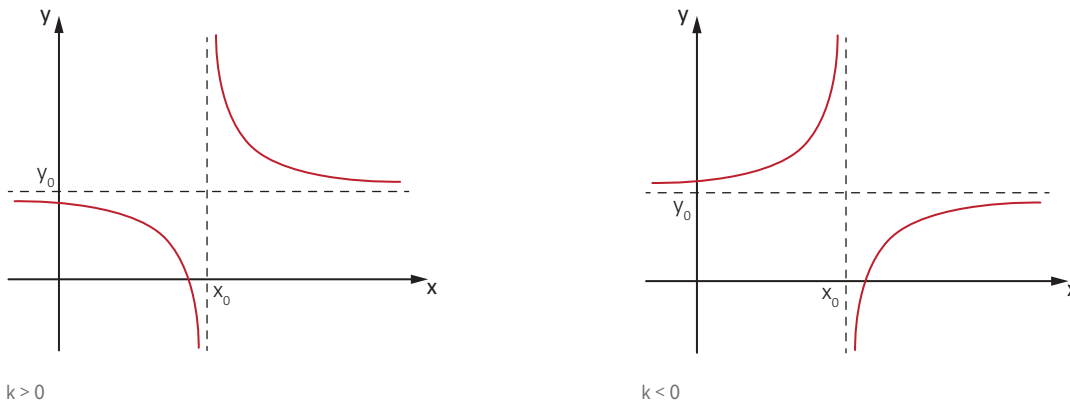
$$(y - y_0) \cdot (x - x_0) = k$$

No estudo da Geometria Analítica, relações desse tipo são equações de hipérboles equiláteras, com retas assíntotas paralelas aos eixos coordenados do sistema cartesiano.

As assíntotas de uma hipérbole são retas.

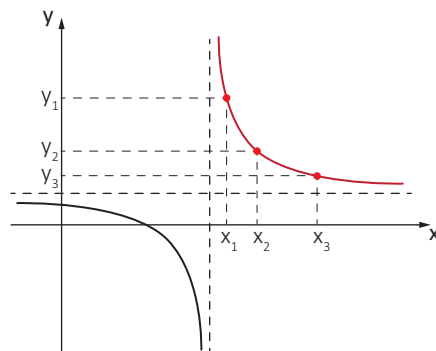
As figuras a seguir apresentam possíveis representações dessas curvas quando x_0 e y_0 são ambos positivos:

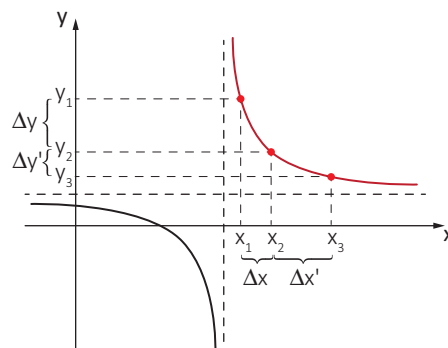
k > 0

k < 0

Para expressar essa relação na forma y = f(x), é necessário isolar a variável *y*. Assim:

$$(y - y_0) \cdot (x - x_0) = k \Leftrightarrow y - y_0 = \frac{k}{x - x_0} \Leftrightarrow y = y_0 + \frac{k}{x - x_0}$$

Em gráficos desse tipo é correto assumir a validade da regra de três inversa, desde que aplicada às variações das grandezas *x* e *y*.

Para isso é necessário identificar as coordenadas de três pontos de um mesmo ramo da hipérbole:

Então, a partir dos pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) calculam-se duas variações de cada grandeza, por exemplo:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad \Delta x' = x_3 - x_2 \qquad \Delta y = y_2 - y_1 \qquad \Delta y' = y_3 - y_2$$

Assim, finalmente pode-se expressar algebricamente a relação de proporcionalidade entre as variações das grandezas *x* e *y*:

$$\Delta x \cdot \Delta y = \Delta x' \cdot \Delta y'$$

Em certas condições, o quociente de duas funções polinomiais de primeiro grau cria relações equivalentes às funções, do tipo $y = y_0 + \frac{k}{x - x_0}$.

Considere as funções: $\begin{cases} f(x) = a \cdot x + b \\ g(x) = c \cdot x + d, \text{ com } c \neq 0 \end{cases}$.

Agora considere a seguinte função quociente de *f* e *g*:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}$$

Se $a \cdot d \neq b \cdot c$ então, existem parâmetros reais k, x_0 e y_0, com $k \neq 0$, que satisfazem a seguinte identidade:

$$y_0 + \frac{k}{x - x_0} \equiv \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}$$

$$\frac{(x - x_0) \cdot y_0 + k}{x - x_0} \equiv \frac{\frac{a \cdot x + b}{c}}{\frac{c \cdot x + d}{c}}$$

$$\frac{y_0 \cdot x - y_0 \cdot x_0 + k}{x - x_0} \equiv \frac{\frac{a}{c} \cdot x + \frac{b}{c}}{\frac{c}{c} \cdot x + \frac{d}{c}}$$

$$\frac{y_0 \cdot x + (k - y_0 \cdot x_0)}{x - x_0} \equiv \frac{\frac{a}{c} \cdot x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}}$$

Da última identidade, é possível deduzir as coordenadas das retas assíntotas:

$$\begin{cases} \text{Horizontal: } y_0 = \frac{a}{c} \\ \text{Vertical: } x_0 = -\frac{d}{c} \end{cases}.$$

Além disso, a constante de proporcionalidade *k* é tal que:

$$k - y_0 \cdot x_0 = \frac{b}{c}$$

Então, substituindo as expressões para y_0 e x_0, tem-se:

$$k - \frac{a}{c} \cdot \left(-\frac{d}{c}\right) = \frac{b}{c} \Leftrightarrow k = \frac{b}{c} - \frac{a \cdot d}{c^2} \Leftrightarrow k = \frac{b \cdot c - a \cdot d}{c^2}$$

Resumindo

Proporção direta

Duas grandezas X e Y são diretamente proporcionais se, e somente se, houver uma constante k positiva tal que:

$$\frac{Y}{X} = k$$

A relação entre duas grandezas diretamente proporcionais é representada graficamente pelos pontos de uma reta que passa pela origem do sistema cartesiano.

Proporção inversa

Duas grandezas X e Y são inversamente proporcionais se, e somente se, houver uma constante k positiva tal que:

$$X \cdot Y = k$$

A relação entre duas grandezas inversamente proporcionais é representada graficamente pelos pontos de uma hipérbole.

Regra de três composta

Se uma grandeza Y for diretamente proporcional às grandezas M e N, por exemplo, então existe uma constante real e positiva tal que:

$$Y = k \cdot M \cdot N$$

Se essa mesma grandeza Y for inversamente proporcional às grandezas P, Q e R, por exemplo, então existe outra constante real e positiva tal que:

$$Y = \frac{k}{P \cdot Q \cdot R}$$

Assim, para expressar uma grandeza Y que é diretamente proporcional às grandezas M, N,... e inversamente proporcional às grandezas P, Q, R,... deve-se obter uma constante $k > 0$ tal que:

$$Y = k \cdot \frac{M \cdot N \cdot}{P \cdot Q \cdot R \cdot ...}$$

Quer saber mais?

Sites

- Neste *site*, você poderá ver mais sobre o conteúdo de razões e descobrir ainda mais sobre esse assunto.

  Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/fundam/razoes.php>.

- Aqui, você encontrará um resumo sobre os principais tópicos de proporção. Leia, procure observar alguns exemplos e tente resolvê-los!

  Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/~mat1043/Proporcionalidade.pdf>.

- Nesta página, você encontrará uma série de exercícios básicos sobre proporções, ideais para fixar o conteúdo aprendido.

  Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~mfirer/diretas/proporcoes_diretas.html>.

Vídeo

- Neste vídeo, você poderá observar os processos aritméticos envolvidos na obtenção da constante de proporcionalidade Assista-o e descubra, também, os processos envolvidos em seu uso, de forma simples e rápida

  Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=5XJ7VF_O3Tc>.

Exercícios complementares

1 Se x, y e z são três números reais diretamente proporcionais aos números 2, 3 e 5, então podemos afirmar que esses mesmos números x, y e z são, nesta ordem, inversamente proporcionais aos números

A 25, 15 e 10
B 12, 18 e 30
C 15, 10 e 6
D 16, 18 e 20
E 50, 30 e 20

2 **Fuvest** Um automóvel, modelo *flex*, consome 34 litros de gasolina para percorrer 374 km Quando se opta pelo uso do álcool, o automóvel consome 37 litros deste combustível para percorrer 259 km Suponha que um litro de gasolina custe R$ 2,20. Qual deve ser o preço do litro do álcool para que o custo do quilômetro rodado por esse automóvel, usando somente gasolina ou somente álcool como combustível, seja o mesmo?

A R$ 1,00
B R$ 1,10
C R$ 1,20
D R$ 1,30
E R$ 1,40

3 **Uerj 2018** Quatro balões esféricos são preenchidos isotermicamente com igual número de mols de um gás ideal A temperatura do gás é a mesma nos balões, que apresentam as seguintes medidas de raio:

Balão	Raio
I	R
II	R/2
III	2R
IV	2R/3

A pressão do gás é maior no balão de número:

A I
B II
C III
D IV

4 **ESPM 2015** Sabe-se que uma grandeza A é inversamente proporcional ao quadrado de uma grandeza B e que, quando A vale 1, B vale 6. Pode-se afirmar que, quando A vale 4, a grandeza B vale:

A 1
B 1,5
C 3
D 4
E 4,5

5 **Enem 2012** José, Carlos e Paulo devem transportar em suas bicicletas uma certa quantidade de laranjas. Decidiram dividir o trajeto a ser percorrido em duas partes, sendo que ao final da primeira parte eles redistribuiriam a quantidade de laranjas que cada um carregava dependendo do cansaço de cada um. Na primeira parte do trajeto, José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 6 : 5 : 4, respectivamente. Na segunda parte do trajeto, José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 4 : 4 : 2, respectivamente.
Sabendo-se que um deles levou 50 laranjas a mais no segundo trajeto, qual a quantidade de laranjas que José, Carlos e Paulo, nessa ordem, transportaram na segunda parte do trajeto?

A 600, 550, 350
B 300, 300, 150
C 300, 250, 200
D 200, 200, 100
E 100, 100, 50

6 **Enem 2019** Em um jogo on line, cada jogador procura subir de nível e aumentar sua experiência, que são dois parâmetros importantes no jogo, dos quais dependem as forças de defesa e de ataque do participante A força de defesa de cada jogador é diretamente proporcional ao seu nível e ao quadrado de sua experiência, enquanto sua força de ataque é diretamente proporcional à sua experiência e ao quadrado do seu nível Nenhum jogador sabe o nível ou a experiência dos demais Os jogadores iniciam o jogo no nível 1 com experiência 1 e possuem força de ataque 2 e de defesa 1 Nesse jogo, cada participante se movimenta em uma cidade em busca de tesouros para aumentar sua experiência Quando dois deles se encontram, um deles pode desafiar o outro para um confronto, sendo o desafiante considerado o atacante. Compara-se então a força de ataque do desafiante com a força de defesa do desafiado e vence o confronto aquele cuja força for maior O vencedor do desafio aumenta seu nível em uma unidade Caso haja empate no confronto, ambos os jogadores aumentam seus níveis em uma unidade.
Durante um jogo, o jogador J_1, de nível 4 e experiência 5, irá atacar o jogador J_2, de nível 2 e experiência 6

O jogador J_1 venceu esse confronto porque a diferença entre sua força de ataque e a força de defesa de seu oponente era

A 112. **B** 88. **C** 60. **D** 28. **E** 24.

7 **Fuvest 2011** Uma geladeira é vendida em *n* parcelas iguais, sem juros. Caso se queira adquirir o produto, pagando-se 3 ou 5 parcelas a menos, ainda sem juros, o valor de cada parcela deve ser acrescido de R$ 60,00 ou de R$ 125,00, respectivamente. Com base nessas informações, conclui-se que o valor de *n* é igual a

A 13 **B** 14 **C** 15 **D** 16 **E** 17

8 **Enem 2012** Existem no mercado chuveiros elétricos de diferentes potências, que representam consumos e custos diversos. A potência (P) de um chuveiro elétrico é dada pelo produto entre sua resistência elétrica (R) e o quadrado da corrente elétrica (i) que por ele circula. O consumo de energia elétrica (E), por sua vez, é diretamente proporcional à potência do aparelho.

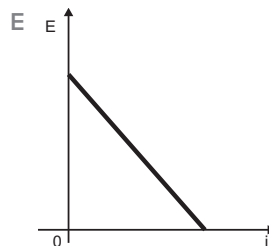
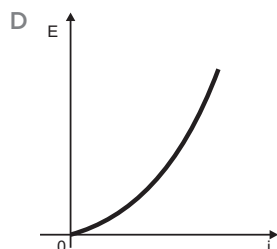
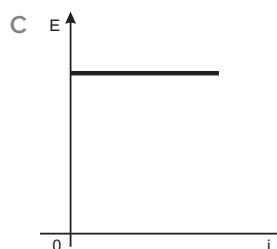
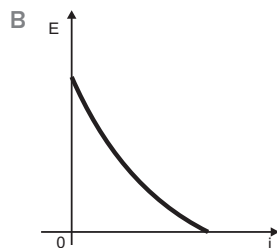
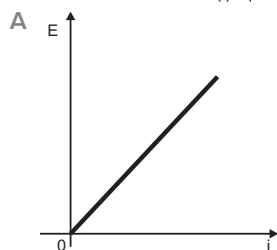
Considerando as características apresentadas, qual dos gráficos a seguir representa a relação entre a energia consumida (E) por um chuveiro elétrico e a corrente elétrica (i) que circula por ele?

A

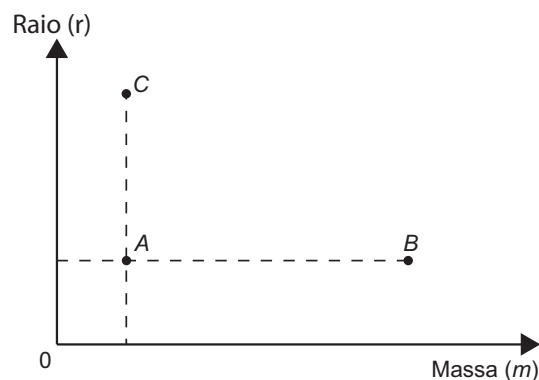
B

C

D

E

9 **Enem 2018** De acordo com a Lei Universal da Gravitação, proposta por Isaac Newton, a intensidade da força gravitacional F que a Terra exerce sobre um satélite em órbita circular é proporcional à massa *m* do satélite e inversamente proporcional ao quadrado do raio *r* da órbita, ou seja,

$$F = \frac{K \cdot m}{r^2}$$

No plano cartesiano, três satélites, A, B e C, estão representados, cada um, por um ponto (m, r) cujas coordenadas são, respectivamente, a massa do satélite e o raio da sua órbita em torno da Terra.

Com base nas posições relativas dos pontos no gráfico, deseja-se comparar as intensidades F_A, F_B e F_C da força gravitacional que a Terra exerce sobre os satélites A, B e C, respectivamente.

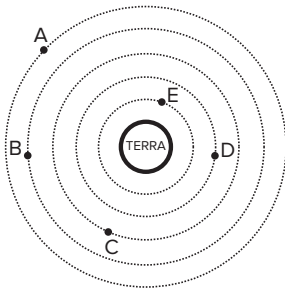
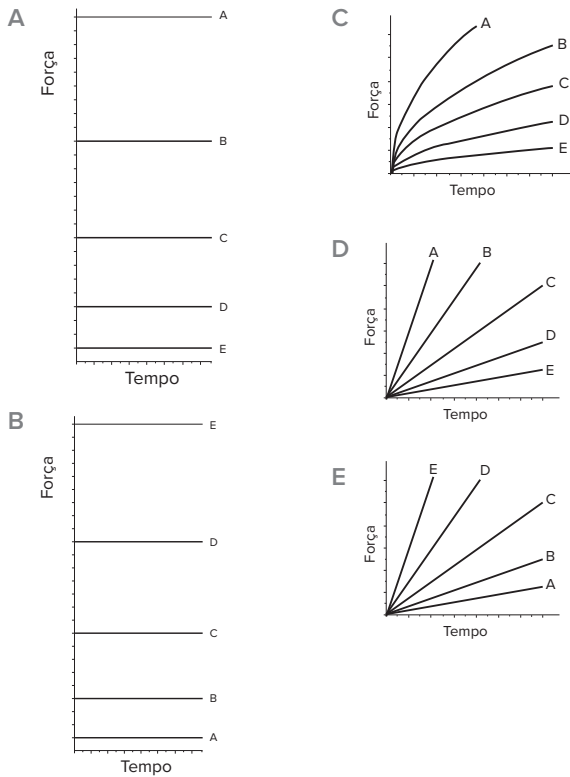
As intensidades F_A, F_B e F_C expressas no gráfico satisfazem a relação

A $F_C = F_A < F_B$
B $F_A = F_B < F_C$
C $F_A < F_B < F_C$
D $F_A < F_C < F_B$
E $F_C < F_A < F_B$

10 **Enem 2013** A Lei da Gravitação Universal, de Isaac Newton, estabelece a intensidade da força de atração entre duas massas. Ela é representada pela expressão:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

onde m_1 e m_2 correspondem às massas dos corpos, d à distância entre eles, G à constante universal da gravitação e F à força que um corpo exerce sobre o outro.

O esquema representa as trajetórias circulares de cinco satélites, de mesma massa, orbitando a Terra.

Qual gráfico expressa as intensidades das forças que a Terra exerce sobre cada satélite em função do tempo?

11 **Enem 2016** Para a construção de isolamento acústico numa parede cuja área mede 9 m^2, sabe-se que, se a fonte sonora estiver a 3 m do plano da parede, o custo é de R$ 500,00. Nesse tipo de isolamento, a espessura do material que reveste a parede é inversamente proporcional ao quadrado da distância até a fonte sonora, e o custo é diretamente proporcional ao volume do material do revestimento.

Uma expressão que fornece o custo para revestir uma parede de área A (em metro quadrado), situada a D metros da fonte sonora, é

A $\frac{500 \cdot 81}{A \cdot D^2}$

B $\frac{500 \cdot A}{D^2}$

C $\frac{500 \cdot D^2}{A}$

D $\frac{500 \cdot A \cdot D^2}{81}$

E $\frac{500 \cdot 3 \cdot D^2}{A}$

12 **Enem 2012** Dentre outros objetos de pesquisa, a Alometria estuda a relação entre medidas de diferentes partes do corpo humano. Por exemplo, segundo a Alometria, a área A da superfície corporal de uma pessoa relaciona-se com a sua massa *m* pela fórmula $A = k \cdot m^{\frac{2}{3}}$, em que k é uma constante positiva.

Se no período que vai da infância até a maioridade de um indivíduo sua massa é multiplicada por 8, por quanto será multiplicada a área da superfície corporal?

A $\sqrt[3]{16}$

B 4

C $\sqrt{24}$

D 8

E 64

13 **Fatec 2015** Uma caixa de suco de manga tem o formato de um bloco retangular com base quadrada de lado 0,7 dm. O suco contido nela é feito com a polpa de quatro mangas. Sabe-se que a polpa obtida de cada manga rende 0,245 litros de suco.

Bill Waterson. Calvin e Haroldo. Disponível em: <http://tinyurl.com/lwnyz8j>. Acesso em: 25.07.2014.

- Libra e onça, bem como quilograma, são unidades de medida de massa.
- A relação lida por Calvin no 1º quadrinho está correta.
- 1,0 kg é aproximadamente igual a 2,2 libras.

Considere que cada litro do suco de manga mencio nado tem massa igual a 1,1 kg.

Em uma caixa de suco que ainda não foi aberta, a massa total de suco, em onças, é aproximadamente igual a

A 37,95.

B 36,72.

C 35,24.

D 34,93.

E 33,86.

14 **FGV-SP 2013** Um poço cilíndrico circular reto, de profundidade 15 m e diâmetro 6 m, foi escavado por 18 trabalhadores em 25 dias. Admitindo-se sempre proporcionalidade direta ou inversa entre duas das três grandezas envolvidas no problema (volume escavado, número de trabalhadores e dias necessários para o serviço), para aumentar o diâmetro do poço já escavado em mais 2 m, e com 4 trabalhadores a menos, serão necessários e suficientes mais:

A 20 dias
B 21 dias
C 23 dias
D 24 dias
E 25 dias

Texto para as próximas duas questões.

No estudo da Física, a relação **P = U · i** envolve as seguintes grandezas:

- A potência elétrica, representada pela letra P e medida em watts;
- A diferença de potencial, ou voltagem, representada pela letra U e medida em volts;
- A intensidade da corrente elétrica, ou amperagem, representada pela letra i e medida em amperes.

15 Sobre a voltagem e a intensidade da corrente elétrica, é correto afirmar que são grandezas:

A diretamente proporcionais
B inversamente proporcionais
C idênticas, proporcionalmente
D sem nenhuma relação de proporção
E com relação de proporção, mas indefinida

16 Se um aparelho elétrico bivolt, de potência constante, ligado em uma tomada de 110 volts gera uma corrente elétrica de 6 ampères, o valor da intensidade da corrente elétrica que este mesmo aparelho produzirá se for ligado em uma tomada de 220 volts, será:

A 3 amperes.
B 6 amperes.
C 8 amperes.
D 10 amperes.
E 12 amperes.

17 Uma embarcação que partiu da Inglaterra com destino à África do Sul, percorreu sua trajetória numa média de 10 léguas a cada 3 dias.

Sabendo que uma légua equivale a 6,6 km, determine:

a) A velocidade média desta embarcação em quilômetros por hora.
b) A constante de proporcionalidade capaz de transformar os numerais que representam velocidades em léguas diárias nos numerais que representam velocidades em quilômetros por hora.

18 **Enem 2004** Comprimam-se todos os 4,5 bilhões de anos de tempo geológico em um só ano. Nesta escala, as rochas mais antigas reconhecidas datam de março Os seres vivos apareceram inicialmente nos mares, em maio As plantas e animais terrestres surgiram no final de novembro.

(Don L. Eicher, Tempo Geológico)

Meses	JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
(em milhões de anos)	4500	4125	3750	3375	3000	2625	2250	1875	1500	1125	750	375

Na escala de tempo acima, o sistema solar surgiu no início de janeiro e vivemos hoje à meia-noite de 31 de dezembro. Nessa mesma escala, Pedro Álvares Cabral chegou ao Brasil também no mês de dezembro, mais precisamente na:

A manhã do dia 01
B tarde do dia 10
C noite do dia 15
D tarde do dia 20
E noite do dia 31

19 **UEPG 2016** Em uma fábrica, 7 máquinas operando 3 horas por dia, durante 8 dias, produzem 60 peças.

Nesse contexto, assinale o que for correto.

01 Duplicando o número de máquinas e o número de horas trabalhadas por dia, a produção das mesmas 60 peças será realizada em 2 dias.
02 Para duplicar o número de peças produzidas, mantendo o mesmo tempo de operação, é necessário duplicar o número de máquinas.
04 Trabalhando com 3 máquinas a menos e operando 6 horas por dia, durante 7 dias, o número de peças produzidas será o mesmo.
08 Dez máquinas, operando 7 horas por dia, durante 4 dias, produzem o dobro do número de peças.

Soma:

20 **Enem 2017** O fisiologista inglês Archibald Vivian Hill propôs, em seus estudos, que a velocidade *v* de contração de um músculo ao ser submetido a um peso *p* é dada pela equação $(p + a)(v + b) = K$, com a, b e K constantes.
Um fisioterapeuta, com o intuito de maximizar o efeito benéfico dos exercícios que recomendaria a um de seus pacientes, quis estudar essa equação e a classificou desta forma:

Tipo de curva
Semirreta oblíqua
Semirreta horizontal
Ramo de parábola
Arco de circunferência
Ramo de hipérbole

O fisioterapeuta analisou a dependência entre *v* e *p* na equação de Hill e a classificou de acordo com sua representação geométrica no plano cartesiano, utilizando o par de coordenadas (p; v). Admita que $K > 0$.

Disponível em: http://rspb royalsocietypublishing.org. Acesso em: 14 jul. 2015 (adaptado).

O gráfico da equação que o fisioterapeuta utilizou para maximizar o efeito dos exercícios é do tipo

A semirreta oblíqua.
B semirreta horizontal.
C ramo de parábola.
D arco de circunferência.
E ramo de hipérbole.

FRENTE 2

CAPÍTULO

5

Sequências numéricas

Na convivência, o tempo não importa.
Se for um minuto, uma hora, uma vida.
O que importa é o que ficou deste minuto,
desta hora, desta vida...
Lembra que o que importa
é tudo que semeares colherás.
Por isso, marca a tua passagem,
deixa algo de ti,...
do teu minuto,
da tua hora,
do teu dia,
da tua vida.

Mario Quintana

As sequências ou progressões estão presentes no tempo, na natureza, nas ciências, até mesmo na literatura. Neste capítulo estudaremos alguns tópicos desse maravilhoso assunto.

Sequências e Progressões

Há inúmeras situações na Matemática, nas Ciências da Natureza, nas Ciências Humanas, no cotidiano, nas quais lidamos com conjuntos ordenados, finitos ou infinitos Esses conjuntos são chamados sequências

Observe os seguintes exemplos:

- sequência de números primos: (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,);
- sequência dos quadrados dos números naturais não nulos: (1, 4, 9, 16, 25, 36,);
- sequência dos anos em que ocorreram as Copas do Mundo: (1930, 1934, 1938, 1950, 1954, 1958, 1962, 1966, 1970, 1974, 1978, 1982, 1986, 1990, 1994, 1998, 2002, 2006, 2010, 2014, 2018);
- sequência de cotação diária do dólar em um mês.

De maneira mais formal, podemos definir sequência como uma n-upla ordenada cujos elementos são as imagens de funções aplicadas aos naturais, ou seja:

$$\left(f(1),\ f(2),\ f(3),\ ....\right),\ f:\mathbb{N}^* \to A$$

É comum adotarmos a notação $(a_1, a_2, a_3, ...)$, $a_k = f(k)$, $k \in \mathbb{N}^*$, onde a_k é o valor do termo da sequência que ocupa a posição *k*.

Podemos apresentar ou definir uma sequência basicamente de três maneiras: por enumeração, pela fórmula do termo geral ou por recorrência. Veremos a seguir como são essas formas.

Enumeração

Consiste em apresentar a sequência termo a termo. Essa forma é utilizada, normalmente, quando não há uma expressão definida para calcularmos os termos da sequência Por exemplo:

- Sequência de resultados no lançamento de um dado comum (processo aleatório):
  (2, 6, 1, 1, 2, 3, 5, 5, 5, 4, 6,)
- Sequência de números primos:
  (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,).
  (No caso dos números primos, não há fórmula que os gere, apenas há a definição)

Fórmula do Termo geral

Nesse caso, a função que permite calcular cada termo a partir de sua posição na sequência está bem definida a partir de uma sentença matemática fechada.

Por exemplo, na sequência dada por $a_n = f(n) = n^2 \quad n$, tem-se:

$$a_1 = 1^2 \quad 1 = 0$$
$$a_2 = 2^2 - 2 = 2$$
$$a_3 = 3^2 - 3 = 6$$
$$a_4 = 4^2 \quad 4 = 12$$
$$a_5 = 5^2 - 5 = 20$$
$$a_6 = 6^2 - 6 = 30$$

...

Assim, temos a sequência (0, 2, 6, 12, 30, ...).

Já na sequência dada por $b_n = tg\left(n \quad \frac{\pi}{12}\right)$ temos:

$$b_1 = tg\left(1 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = tg\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$$
$$b_2 = tg\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$b_3 = tg\left(3 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$
$$b_4 = tg\left(4 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$
$$b_5 = tg\left(5 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = tg\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 + \sqrt{3}$$

Assim, temos a sequência:

$$\left(2 - \sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ 1,\ \sqrt{3},\ 2 + \sqrt{3}, ...\right)$$

Sequência dada por recorrência ou recursão

Quando o cálculo de um termo da sequência depende de um ou mais termos anteriores, dizemos que a sequência é recursiva, ou dada por recursão.

Por exemplo, a sequência dada por $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = \frac{\left(a_{n \quad 1}\right)^2}{2} \end{cases}$, com $n \geq 2$, tem como termos:

$$a_2 = \frac{\left(a_{2 \quad 1}\right)^2}{2} = \frac{\left(a_1\right)^2}{2} = \frac{(4)^2}{2} = 8$$
$$a_3 = \frac{\left(a_{3 \quad 1}\right)^2}{2} = \frac{\left(a_2\right)^2}{2} = \frac{(8)^2}{2} = 32$$
$$a_4 = \frac{\left(a_{4-1}\right)^2}{2} = \frac{\left(a_3\right)^2}{2} = \frac{(32)^2}{2} = 512$$

...

Assim, a sequência é (4, 8, 32, 512, ...). Como cada termo depende de um termo anterior, dizemos que a sequência é uma recursão de 1ª ordem.

Outro exemplo é a sequência de Fibonacci, definida recursivamente da seguinte maneira:

$$\begin{cases} f_1 = f_2 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ com } n \geq 3 \end{cases}$$

Seus primeiros termos são:

$$f_3 = f_{3-1} + f_{3-2} = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2$$
$$f_4 = f_{4-1} + f_{4-2} = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3$$
$$f_5 = f_{5-1} + f_{5-2} = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5$$
$$f_6 = f_{6-1} + f_{6-2} = f_5 + f_4 = 5 + 3 = 8$$

...

A sequência de Fibonacci é, portanto, (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...).

Para algumas séries recursivas é também possível obter a fórmula do termo geral. Mais adiante, neste capítulo, veremos como fazer isso para a série de Fibonacci.

Progressão Aritmética

Uma **P**rogressão **A**ritmética (PA), é uma sequência onde cada termo, a partir do segundo, é obtido adicionando-se uma constante ao termo anterior. Em outras palavras, progressão aritmética é uma sequência onde a diferença entre dois termos consecutivos, a partir do segundo, é uma constante chamada de razão da PA.

São exemplos de progressões aritméticas:

- (2, 5, 8, 11, 14, 17, ...) é uma PA de razão $r = 3$. É uma PA crescente, ou seja, $a_{n+1} > a_n$, $n \geq 1$;
- (12, 10, 8, 6, 4, 2, 0, ...) é uma PA de razão $r = -2$. É uma PA decrescente, ou seja, $a_{n+1} < a_n$, $n \geq 1$;
- (3, 3, 3, 3, ...) é uma PA de razão $r = 0$. É uma PA cons tante, ou seja, $a_{n+1} = a_n$, $n \geq 1$

! Atenção

Podemos formalizar a definição de progressão aritmética do seguinte modo: uma PA de razão *r*, é uma sequência a_n, $n \in \mathbb{N}^*$, dada por:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

Podemos classificar as progressões aritméticas em:

$$\begin{cases} \text{Crescentes: } r > 0 \\ \text{Decrescentes: } r < 0 \\ \text{Constantes: } r = 0 \end{cases}$$

Termo geral da Progressão Aritmética

Uma abordagem interessante para entender uma progressão aritmética de termos reais é imaginar seus termos na reta dos números reais. Eles estarão igualmente espaçados e a distância entre dois termos consecutivos é igual ao módulo da razão. Podemos imaginar, então, que para obter-se um termo em função de outro termo realizam-se deslocamentos múltiplos da razão (como se a razão fosse o tamanho de um passo ou uma espécie de unidade de deslocamento). Observe que:

$$a_2 = a_1 + r \qquad a_{10} = a_1 + 9r$$
$$a_3 = a_1 + 2r \qquad a_{10} = a_6 + 4r$$
$$a_4 = a_1 + 3r \qquad a_8 = a_3 + 5r \Leftrightarrow a_3 = a_8 - 5r$$
$$a_6 = a_3 + 3r \qquad a_7 = a_4 + 3r \Leftrightarrow a_4 = a_7 \quad 3r$$

Os exemplos sugerem que para determinarmos um termo a_n a partir de um termo a_p, com $n > p$, devemos adicionar a a_p o número de razões igual à diferença de suas posições, ou seja:

$$a_n = a_p + (n - p) \cdot r$$

Em particular, se *p* igual a 1:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Vamos enunciar e demonstrar isso de maneira mais formal.

Seja a PA (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...) de razão *r* e termo geral dado por $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$. De maneira geral devemos ter:

$$a_n = a_p + (n - p) \cdot r$$

Demonstração:

Utilizando o princípio da indução finita observa se que para n = 2 tem-se, pela própria definição de PA:

$$a_2 = a_1 + r = a_1 + (2 - 1) \cdot r$$

Admita-se, por hipótese de indução, que, para algum *k* natural:

$$a_k = a_1 + (k - 1) \cdot r, \ k \geq 2$$

Pela definição de PA tem-se:

$$a_{k+1} = a_k + r$$
$$a_{k+1} = a_1 + (k \cdot 1) + r \quad r$$
$$a_{k+1} = a_1 + (k + 1 \cdot 1) \ r$$
$$a_{k+1} = a_1 + (k + 1 \cdot 1) \ r$$

Logo, para qualquer *n* natural, $n > 1$ tem-se:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Ainda:

$$a_n - a_p = \left(a_1 + (n - 1) \cdot r\right) - \left(a_1 + (p - 1) \cdot r\right)$$
$$a_n = a_p + \left(a_1 \quad a_1 \quad \left[(n \quad 1) \quad (p \quad 1)\right] \cdot r\right)$$
$$a_n = a_p \cdot (n \quad p) \ r$$
$$a_n = a_p + (n \cdot p) \ r$$

O termo geral da PA tem diversas utilizações, tais como, calcular um termo da PA conhecida sua posição, determi nar a razão conhecendo dois termos e suas posições ou determinar o número de termos da PA. Vejamos exemplos dessas aplicações na forma de exercícios.

Exercícios resolvidos

1 Seja a sequência (a_1, a_2, a_3, ...) uma progressão aritmética com $a_1 = 2$ e razão igual a 3. Determine o trigésimo primeiro termo dessa sequência

Resolução:

Seja r = 3 a razão da PA e a_{31} o termo desejado. Do termo geral temos:

$$a_{31} = a_1 + (31 \quad 1) \cdot r = 2 + 30 \cdot 3 = 92$$

Assim, o trigésimo primeiro termo da PA é 92.

FRENTE 2

2 Em uma progressão aritmética de razão 4, o quinto termo é igual a –3. Determine o primeiro e o vigésimo termo dessa progressão.

Resolução:

Do enunciado temos que r = 4 e que $a_5 = \ 3$. Assim:

$$a_1 = a_5 + (1 - 5) \cdot r = -3 + (-4) \cdot 4 = -3 - 16 = -19$$

$$a_{20} = a_5 + (20 \quad 5) \cdot r = \quad 3 + \quad 15 \quad 4 = \quad 3 + 60 = 57$$

Então, o primeiro e o quinto termos são, respectivamente, 19 e 57.

3 Em uma progressão aritmética, o primeiro termo é 10 e o vigésimo primeiro termo é 14. Determine a razão dessa PA.

Resolução:

Utilizando a fórmula do termo geral:

$$a_{21} = a_1 + (21 \cdot \quad 1) \quad r$$

$$14 = 10 + 20 \cdot r$$

$$14 \quad = 10 \quad \cdot 20 \quad r$$

$$r = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

A razão dessa PA é $\frac{1}{5}$.

4 Determine o número de múltiplos de 3 entre 100 e 400.

Resolução:

A sequência de múltiplos de 3 entre 100 e 400 é (102, 105, 108, ..., 399). É uma PA de *n* termos onde $a_1 = 102$, $a_n = 399$ e r = 3. Do termo geral podemos determinar o valor de *n*:

$$a_n = a_1 + (n \quad \cdot 1) \quad r$$

$$399 = 102 + (n \quad \cdot 1) \quad 3$$

$$n \quad 1 = \frac{399 \quad 102}{3}$$

$$n \quad 1 = \quad 99$$

$$n = 100$$

Logo, verificamos que existem 100 múltiplos de 3 entre 100 e 400.

5 Determine *x* de modo que (x, 3x + 1, 4x + 5) seja uma progressão aritmética.

Resolução:

Na PA (x, 3x + 1, 4x + 5) tem-se $a_1 = x$, $a_2 = 3x + 1$ e $a_3 = 4x + 5$. Assim:

$$a_2 \quad a_1 = a_3 \quad a_2 \quad r$$

$$(3x + 1) - x = (4x + 5) - (3x + 1)$$

$$3x + 1 = x \quad 4x \quad 5 \quad 3x \quad 1$$

$$2x + 1 = x + 4$$

$$2x - x = 4 - 1$$

$$x = 3$$

A PA em questão é (3, 3 · 3 + 1, 4 · 3 + 5) = (3, 10, 17), com razão igual a 7.

6 Determine a PA (a_1, a_2, a_3, ...) onde: $\begin{cases} a_3 + a_6 = 14 \\ a_5 + a_7 = 18 \end{cases}$.

Resolução:

Temos:

$$\begin{cases} a_3 + a_6 = 14 \\ a_5 + a_7 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + 2r) + (a_1 + 5r) = 14 \\ (a_1 + 4r) + (a_1 + 6r) = 18 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 7r = 14 & \text{(I)} \\ 2a_1 + 10r = 18 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da diferença (II) – (I) vem que: $3r = 4 \Leftrightarrow r = \frac{4}{3}$.
Substituindo em (I):

$$2a_1 + 7 \cdot \frac{4}{3} = 14 \Leftrightarrow 2a_1 = 14 - \frac{28}{3} \Leftrightarrow 2a_1 = \frac{14}{3} \Leftrightarrow a_1 = \frac{7}{3}$$

Portanto, a PA em questão tem $a_1 = \frac{7}{3}$ e $r = \frac{4}{3}$, sendo igual a $\left(\frac{7}{3}, \frac{11}{3}, \frac{15}{3}, \ldots\right)$.

Propriedades das Progressões Aritméticas

Propriedade 1: representações especiais

Em algumas situações podemos escrever as Progressões Aritméticas utilizando representações especiais, de forma simétrica em relação ao seu centro. Dessa maneira, facilitamos a solução de inúmeros problemas. As representações mais usuais são as seguintes:

- PA de 3 termos: (x – r, x, x + r).
- PA de 5 termos: (x – 2r, x – r, x, x + r, x + 2r).
- PA de 4 termos: (x – 3s, x – s, x + s, x + 3s), com 2s = r.

Propriedade 2

Em uma PA de três termos, o termo do meio é a média aritmética dos outros dois. Em símbolos:

$$(a, b, c) \text{ é uma PA} \Leftrightarrow b = \frac{a + c}{2}$$

Demonstração:

Se (a, b, c) é uma PA, então:

$$b = a \Leftrightarrow c \quad b \quad 2b \Leftrightarrow a \quad c \quad b \quad \frac{a + c}{2}$$

Observe nas progressões a seguir:

$$\begin{cases} (2, 5, 8, 11, 14, 17, 20) \Rightarrow 5 = \frac{2+8}{2}, \\ 11 = \frac{8+14}{2}, \quad 17 = \frac{14+20}{2} \\ (2 - \sqrt{2}, 2, 2 + \sqrt{2}) \Rightarrow 2 = \frac{(2-\sqrt{2}) + (2+\sqrt{2})}{2} \end{cases}$$

Uma PA com número ímpar de termos possui termo central, ou seja, um termo cujo número de termos antes e depois dele é o mesmo. As distâncias entre esse termo e o último e entre esse termo e o primeiro são iguais, pois o número de razões entre o primeiro termo e o central é igual ao número de razões entre o central e o último. Sendo *n* a posição do último termo e *k* a posição do termo central, temos:

$$\begin{cases} (1,\ k,\ n) \text{ é uma PA} \Rightarrow k = \dfrac{1+n}{2} \\ (a_1,\ a_k,\ a_n) \text{ é uma PA} \Rightarrow a_k = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \end{cases}$$

Como exemplo, seja a PA (1, 4, 7, ..., 91), de razão r = 3 e $\dfrac{91-1}{3}+1 = 31$ termos. Assim, o termo central dessa PA tem posição $\dfrac{1+31}{2} = 16$ e vale $a_{16} = \dfrac{1+91}{2} = 46$.

Propriedade 3

Em uma PA finita, a soma dos termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

Analisando de maneira informal, se tivermos dois termos equidistantes do primeiro e do último termo da PA, o número de razões que acrescentamos ao primeiro termo para obter um dos termos equidistantes é igual ao número de razões que subtraímos do último termo para obter o outro termo equidistante, de maneira que a soma dos dois termos é igual à soma dos extremos.

Uma demonstração mais formal seria:

Seja $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ uma PA de *n* termos e sejam a_{1+k} e a_{n-k} os termos equidistantes de a_1 e a_n, respectivamente. Dessa maneira, tem-se:

$$a_{1+k} + a_{n-k} = \left[a_1 + \left(1+k-1\right)\cdot r\right] + \left[a_n - \left(n-(n-k)\right)\cdot r\right] =$$

$$= \left[a_1 + k\cdot r\right] + \left[a_n - k\cdot r\right] = a_1 + a_n + k\cdot r - k\cdot r = a_1 + a_n$$

Observe os seguintes exemplos:

a) Na PA (2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30), tem-se:

6 + 26 = 2 + 30 = 32
10 + 22 = 2 + 30 = 32
14 + 18 = 2 + 30 = 32

b) Na PA (5, 8, 11, 14, 17, 20, 23), tem-se:

8 + 20 = 5 + 23 = 28
11 + 17 = 5 + 23 = 28
14 + 14 = 5 + 23 = 28

Note que, em progressões aritméticas com número ímpar de termos, o termo central equidista dos dois extremos, devendo ser somado a ele mesmo para o resultado ser igual à soma dos extremos.

Exercícios resolvidos

7 A sequência (a, 10, 2b + 1, 20) é uma PA. Determine os valores de *a* e *b*.

Resolução:

Como (a, 10, 2b + 1, 20) é uma PA, utilizando a propriedade da média aritmética tem-se:

$$2b+1 = \frac{10+20}{2} \Leftrightarrow 2b+1 = 15 \Leftrightarrow 2b = 14 \Leftrightarrow b = 7$$

$$10 = \frac{a+(2b+1)}{2} \Leftrightarrow 10 = \frac{a+(2\cdot 7+1)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 = \frac{a+15}{2} \Leftrightarrow a + 15 = 20 \Leftrightarrow a = 5$$

8 Obter uma PA de três termos cuja soma seja 24 e o produto dos três termos seja 440.

Resolução:

Seja (x – r, x, x + r) a PA. Do enunciado:

$$\begin{cases} (x - r) + x + (x + r) = 24 \quad (I) \\ (x \quad \cdot r) \cdot x \ (x \quad = r) \quad 440 \quad (II) \end{cases}$$

De (I): $(x - r) + x + (x + r) = 24 \Leftrightarrow 3x = 24 \Leftrightarrow x = 8$.

Substituindo em (II):

$$(8-r)\cdot 8 \cdot (8+r) = 440 \Leftrightarrow (8-r)\cdot(8+r) = 55 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 64 - r^2 = 55 \Leftrightarrow r^2 = 9 \Leftrightarrow r = \pm 3$$

Assim, temos duas progressões aritméticas como resposta: $\begin{cases} \text{se } r = 3 \text{ a PA será } (5,\ 8,\ 11) \\ \text{se } r = \quad 3 \text{ a PA será } (11,\ 8,\ 5) \end{cases}$.

9 Um triângulo retângulo tem as medidas dos lados em PA Prove que as medidas dos lados desse triângulo têm os lados proporcionais a 3, 4 e 5

Resolução:

Sejam (x r), x e (x + r) as medidas dos lados do triângulo, com r > 0. Como *x* necessariamente é um número positivo, a hipotenusa do triângulo é o lado de medida (x + r). Aplicando o teorema de Pitágoras temos:

$$(x+r)^2 = (x-r)^2 + x^2$$

$$\cancel{x^2} + 2xr + \cancel{r^2} = \cancel{x^2} \quad 2xr + \cancel{r^2} \quad x^2$$

$$x^2 \quad 4xr \quad 0$$

$$x\left(x \quad 4r\right) \quad 0$$

$$x = 4r$$

Assim, os lados do triangulo são x = 4r, (x r) = 3r e (x + r) = 5r, logo, podemos afirmar que as medidas dos lados do triângulo são proporcionais a 3, 4 e 5.

10 A soma de 4 termos consecutivos de uma PA é 14, enquanto o produto entre o primeiro e o último é –44. Escreva essa PA.

Resolução:

Seja a PA (x 3s, x s, x + s, x + 3s) onde r = 2s Das condições do problema temos:

1) $\left(x-3s\right) + \left(x-s\right) + \left(x+s\right) + \left(x+3s\right) = 14 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4x = 14 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$$

2) $\left(x \quad 3s\right)\cdot\left(x + 3s\right) = -44 \Leftrightarrow x^2 - 9s^2 = -44 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 9s^2 = -44 \Leftrightarrow 9s^2 = \frac{49}{4} + 44 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9s^2 = \frac{49+176}{4} \Leftrightarrow 9s^2 = \frac{225}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow s = \pm\frac{5}{2}$$

Temos duas progressões aritméticas satisfazendo o problema, uma com razão $r = 2 \cdot \frac{5}{2} = 5$ e primeiro termo $(x = 3s)\ \frac{7}{2}\ 3\ \frac{5}{2}\ \ 4$, e outra com razão $r = 2 \cdot \left(\ \frac{5}{2}\right) = \ 5$ e primeiro termo $(x = 3s)\ \frac{7}{2}\ 3 \left(\ \frac{5}{2}\right) = 11$.

Portanto, as progressões são (–4, 1, 6, 11) e (11, 6, 1, –4).

Soma dos *n* primeiros termos de uma PA

Conta-se uma história divertida a respeito do grande matemático Gauss (1777-1855), conhecido como o Príncipe da Matemática.

Ainda criança, talvez com 7 ou 8 anos, seu professor, para manter os alunos ocupados, mandou que somassem todos os números de 1 a 100. Para surpresa do professor, em poucos instantes, o pequeno Gauss apresentou a resposta correta, 5050.

Como pôde ter feito a conta tão rápido?

Provavelmente se valeu da propriedade da soma de termos equidistantes dos extremos de uma PA, em uma ideia similar à seguinte:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ \ + 97 + 98 + 99 + 100 =$$
$$= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + (4 + 97) + \ \ + (50 + 51) =$$
$$= 101 + 101 + 101 + 101 + ... + 101 = 50 \cdot 101 = 5050$$

Podemos tentar generalizar essa ideia para calcular a soma dos *n* primeiros termos (S_n) de qualquer progressão aritmética, mesmo as que têm número ímpar de termos com a seguinte variação:

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 97 + 98 + 99 + 100 \quad (I)$$
$$S_{100} = 100 + 99 + 98 + 97 + ... + 4 + 3 + 2 + 1 \quad (II)$$

Fazendo (I) + (II):

$$2S_{100} = 101 + 101 + 101 + 101 + ... + 101 + 101 + 101 + 101$$
$$2S_{100} = 101 \cdot 100 \Leftrightarrow S_{100} = \frac{(1 + 100) \cdot 100}{2} = 5050$$

Vamos utilizar o mesmo procedimento para a PA (3, 7, 11, 15, 19, 23, 27), que tem 7 termos:

$$S_7 = 3 + 7 + 11 + 15 + 19 + 23 + 27$$
$$S_7 = 27 + 23 + 19 + 15 + 11 + 7 + 3$$

Somando, temos:

$$2S_7 = 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30$$
$$2S_7 = 30 \cdot 7 \Leftrightarrow S_7 = \frac{210}{2} = \frac{(3 + 27) \cdot 7}{2} = 105$$

Generalizando para a PA (a_1, a_2, a_3, ..., a_n):

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ \ + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \quad (I)$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ \ + 3 + 2 + 1 \quad (II)$$

Somando (I) e (II):

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-1}) + ... +$$
$$+ (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n) +$$
$$+ (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$$

! Atenção

A soma dos *n* primeiros termos da PA (a_1, a_2, a_3, , a_n) é igual à metade do produto do número de termos pela soma do primeiro e último termos. Em símbolos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\ n}{2}$$

Exercícios resolvidos

11 Calcule a soma dos 20 primeiros termos da PA (2, 5, 8, 11, ...).

Resolução:

Temos $a_1 = 2$, $r = 3$ e $a_{20} = a_1 + 19r$, logo:

$$a_{20} = 2 + 19 \cdot 3 \Leftrightarrow \Leftrightarrow a_{20} = 2 + 57 = 59$$

A soma dos 20 primeiros termos é dada por:

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(2 + 59) \cdot 20}{2} = \frac{61 \cdot 20}{2} = 610$$

12 Calcule:

a) A soma dos *n* primeiros inteiros positivos.
b) A soma dos *n* primeiros ímpares positivos.
c) A soma dos *n* primeiros pares positivos.

Resolução:

a) A sequência dos *n* primeiros inteiros positivos (1, 2, 3, 4, 5, ..., n) consiste em uma PA de primeiro termo e razão 1. A soma dos *n* primeiros termos é dada por $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(1 + n) \cdot n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$.

b) A sequência dos *n* primeiros ímpares positivos (1, 3, 5, 7, 9, ...) consiste em uma PA de razão 2, $a_1 = 1$ e $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$.
A soma dos *n* primeiros termos é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(1 + (2n \cdot 1))\ n}{2} = \frac{(2n) \cdot n}{2} = n^2$$

Observe os exemplos: $1 + 3 = 4 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$, ...

c) A sequência dos *n* primeiros pares positivos (2, 4, 6, 8,) consiste em uma PA de razão 2, $a_1 = 2$ e $a_n = a_1 + (n \cdot 1) = r + 2\ (n = 1)\ 2 + 2 = 2n\ 2\ 2n$
A soma dos *n* primeiros termos é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(2 + 2n) \cdot n}{2} = \frac{2 \cdot (n + 1) \cdot n}{2} = n^2 + n$$

13 Determine a soma dos múltiplos de 3 ou múltiplos de 4 entre 1 e 1000.

Resolução:

Como os múltiplos de 12 são também múltiplos de 3 e de 4, devemos somar o valor da soma dos múltiplos de 3 com o valor da soma dos múltiplos de 4 e descontar o valor da soma dos múltiplos de 12 (pois se repetirão).

Múltiplos de 3:

Como $1000 = 3 \cdot 333 + 1$, a sequência (3, 6, 9, ..., 999) tem 333 termos e soma igual a $\frac{(3+999)\cdot 333}{2} = 166833$.

Múltiplos de 4:

Como $1000 = 4 \cdot 250$, a sequência (4, 8, 12, ..., 1000) tem 250 termos e soma igual a $\frac{(4+1000)\cdot 250}{2} = 125500$.

Múltiplos de 12:

Como $1000 = 12 \cdot 83 + 4 = 996 + 4$, a sequência (12, 24, ..., 996) tem 83 termos e soma $\frac{(12+996)\cdot 83}{2} = 41\,832$.

Assim, a soma pedida é igual a:

$$\text{Soma} = 166833 + 125500 \quad 41832 = 250501$$

14 Uma PA tem soma dos *n* primeiros termos dadas por $S_n = 3n^2 - 2n$. Determine a PA.

Resolução:

Tem-se:

$$\begin{cases} S_1 = a_1 = 3\cdot 1^2 \cdot 2 = 1 \quad 1 \\ S_2 = a_1 + a_2 \Leftrightarrow 3\cdot 2^2 - 2\cdot 2 = 1 + a_2 \Leftrightarrow a_2 = 7 \end{cases}$$

Assim, $r = a_2 \quad a_1 = 7 \quad 1 = 6$ e a PA é (1, 7, 13, 19, ...).

15 Prove que em uma PA com número ímpar de termos o termo central é a média aritmética de todos os termos.

Resolução:

Para *n* ímpar, seja $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ uma PA. Seu termo central tem posição $\frac{n+1}{2}$ e satisfaz $a_{\frac{n+1}{2}} = \frac{a_1 + a_n}{2}$.

A média aritmética *M* dos *n* termos da PA é dada por:

$$M = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \quad + a_n}{n} = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} =$$

$$= \frac{a_1 + a_n}{2} = a_{\frac{n+1}{2}}$$

Progressão Geométrica

Uma **P**rogressão **G**eométrica (PG), é uma sequência onde cada termo, a partir do segundo, é obtido pelo produto do termo anterior e uma constante, chamada de razão da PG (em geral representada pela letra *q*). Em outras palavras, progressão geométrica é uma sequência onde a razão entre dois termos consecutivos é uma constante.

São exemplos de progressões geométricas:

a) (2, 4, 8, 16, 32, 64, ...) é uma PG com 1º termo igual a 2 e razão $q = 2$. É uma PG crescente.

b) (192, 96, 48, 24, 12, 6, 3, ...) é uma PG com 1º termo igual a 192 e razão $q = \frac{1}{2}$. É uma PG decrescente.

c) (–1, 3, –9, 27, 81,) é uma PG com 1º termo igual a –1 e razão $q = 3$ É uma PG decrescente.

d) (–16, –8, 4, 2, –1,) é uma PG com 1º termo igual a –16 e razão $q = \frac{1}{2}$ É uma PG crescente.

e) (1, –2, 4, –8, 16, –32, 64, ...) é uma PG com 1º termo igual a 1 e razão $q = -2$. É uma PG oscilante ou alternante.

f) (3, 3, 3, 3, 3, ...) é uma PG de razão $q = 1$. É uma PG constante.

g) (3, 0, 0, 0, ...) é uma PG de razão $q = 0$. É chamada de PG degenerada.

Podemos formalizar a definição de PG da seguinte maneira: uma progressão geométrica de razão *q*, é uma sequência a_n, $n \in \mathbb{N}^*$, dada por:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

! Atenção

Podemos classificar as progressões geométricas em:

- Crescentes: ($a_1 > 0$ e $q > 1$) ou ($a_1 < 0$ e $0 < q < 1$).
- Decrescentes: ($a_1 > 0$ e $0 < q < 1$) ou ($a_1 < 0$ e $q > 1$).
- Alternantes ou oscilantes: $q < 0$.
- Constantes: $q = 1$
- Degeneradas: $q = 0$.

Termo geral da Progressão Geométrica

Para uma PG $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ de razão *q*, o deslocamento de um termo a outro se dá mediante sucessivas multiplicações ou divisões pela razão *q*. Observe os exemplos a seguir.

$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = a_1 \cdot q \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^3$$
$$a_{10} = a_1 \cdot q^9$$
$$a_6 = a_3 \quad q \quad q \quad q = a_3 \quad q^3$$
$$a_{10} = a_6 \quad q \quad q \quad q \quad q = a_6 \quad q^4$$
$$a_7 = a_4 \cdot q \cdot q \cdot q = a_4 \cdot q^3 \Leftrightarrow a_4 = \frac{a_7}{q^3} \Leftrightarrow a_4 = a_7 \cdot q^{-3}$$

Os exemplos sugerem que para determinarmos um termo a_n a partir de um termo a_p, com $n > p$, devemos mul tiplicar a_p por um número de razões igual à diferença de suas posições, ou seja:

$$a_n = a_p \cdot q^{n-p}$$

Em particular, se *p* igual a 1:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Vamos enunciar e demonstrar isso de maneira mais formal:

Seja a PG (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...) de razão *q*, seu termo geral é dado por $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

De maneira geral:

$$a_n = a_p \cdot q^{n-p}$$

Demonstração:

Utilizando o princípio da indução infinita, verifica-se que para n = 2 tem-se, pela própria definição de PG:

$$a_2 = a_1 \cdot q = a_1 \cdot q^{2-1}$$

Admita-se, por hipótese de Indução, que, para algum *k* natural:

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1}, \quad k \geq 2$$

Pela definição de PG tem-se:

$$a_{k+1} = a_k \cdot q$$
$$a_{k+1} = a_1 \cdot q^{k-1} \cdot q$$
$$a_{k+1} = a_1 \cdot q^{k-1+1}$$
$$a_{k+1} = a_1 \cdot q^{(k+1)-1}$$

Logo, para qualquer *n* natural, n > 1, tem-se:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Ainda:

$$a_n : a_p = \left(a_1 \cdot q^{n-1}\right) : \left(a_1 \cdot q^{p-1}\right)$$
$$a_n : a_p = q^{(n-1)-(p-1)}$$
$$a_n : a_p = q^{n-p}$$
$$a_n = a_p \cdot q^{n-p}$$

O termo geral da PG tem diversas utilizações, tais como calcular um termo da PG conhecida sua posição, determinar a razão conhecendo dois termos e suas posições, determinar o número de termos da PG.

Vejamos exemplos dessas aplicações na forma de exercícios resolvidos.

Exercícios resolvidos

16 A sequência (x + 1, x + 3, x + 4, ...) é uma PG. Determine o 4º termo dessa PG.

Resolução:

Se (x + 1, x + 3, x + 4, ...) é uma PG, então:

$$\frac{x+3}{x+1} = \frac{x+4}{x+3} \Leftrightarrow (x+3)^2 = (x+1)(x+4) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 + 5x + 4 \Leftrightarrow x = \quad 5$$

Assim a PG é (−4, −2, −1, ..), de razão $\frac{1}{2}$, e seu 4º termo é $(-1) \cdot \frac{1}{2} = \quad \frac{1}{2}$.

17 Obter o 6º e o 12º termos da PG $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, ...\right)$.

Resolução:

Na PG $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \quad\right)$ o 1º termo vale $\frac{1}{4}$ e a razão é q = 2. Assim:

$$a_6 = a_1 \cdot q^{6-1} = \frac{1}{4} \cdot 2^5 = \frac{1}{4} \cdot 32 = 8$$
$$a_{12} = a_1 \cdot q^{12-1} = \frac{1}{4} \cdot 2^{11} = \frac{1}{2^2} \cdot 2^{11} = 2^9 = 512 \text{ ou}$$
$$a_{12} = a_6 \cdot q^{12-6} = 8 \cdot 2^6 = 2^3 \cdot 2^6 = 2^9 = 512$$

18 Em uma PG de razão positiva, $a_5 = 5$ e $a_9 = 20$. Calcule o 13º termo dessa PG.

Resolução:

Sendo q > 0 a razão da PG, temos:

$$a_9 = a_5 \cdot q^{9 \quad 5} \Leftrightarrow 20 = 5 \cdot q^4 \Leftrightarrow q^4 = \frac{20}{5} = 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow q = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Desse modo:

$$a_{13} = a_9 \cdot q^{13-9} = 20 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^4 = 20 \cdot 4 = 80$$

19 Obter a PG que verifica as relações: $\begin{cases} a_2 + a_4 + a_6 = 10 \\ a_3 + a_5 + a_7 = 30 \end{cases}$

Resolução:

Tem-se:

$$a_3 + a_5 + a_7 = 30 \Leftrightarrow a_2 \cdot q + a_4 \cdot q + a_6 \cdot q = 30 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(a_2 + a_4 + a_6\right) \cdot q = 30 \Leftrightarrow 10q = 30 \Leftrightarrow q = 3$$
$$a_2 + a_4 + a_6 = 10 \Leftrightarrow a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^3 + a_1 \cdot q^5 = 10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a_1 \cdot \left(q + q^3 + q^5\right) = 10 \Leftrightarrow a_1 \cdot \left(3 + 3^3 + 3^5\right) = 10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 273a_1 = 10 \Leftrightarrow a_1 = \frac{10}{273}$$

Portanto, trata-se da PG de razão q = 3 e $a_1 = \frac{10}{273}$, ou seja, $\left(\frac{10}{273}, \frac{30}{273}, \frac{90}{273}, ...\right) = \left(\frac{10}{273}, \frac{10}{91}, \frac{30}{91}, ...\right)$.

20 Determine a(s) PG(s) em que o 1º termo vale 243 e o 5º termo vale 48.

Resolução:

Seja *q* a razão da PG procurada. Tem-se:

$$a_5 = a_1 \cdot q^{5 \quad 1} \Leftrightarrow 48 = 243 \cdot q^4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow q^4 = \frac{48}{243} = \frac{16}{81} \Leftrightarrow q = \pm \sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \pm \frac{2}{3}$$

Assim, existem duas PGs satisfazendo as condições do problema, que são:

$$\left(243, 162, 108, 72, 48, \quad\right), \text{ se } q = \frac{2}{3} \text{ e}$$
$$\left(243, \quad 162, 108, \quad 72, 48, ...\right), \text{ se } q \quad \frac{2}{3}$$

Propriedades das Progressões Geométricas

Propriedade 1: representações especiais

De maneira similar ao que foi feito para as PAs, fica mais fácil resolver alguns problemas se escrevermos as PGs de forma simétrica em relação ao centro. Assim, temos as seguintes representações especiais mais frequentemente utilizadas:

- PG de 3 termos: $\left(\frac{x}{q}, x, x \cdot q\right)$.
- PG de 5 termos: $\left(\frac{x}{q^2}, \frac{x}{q}, x, x \cdot q, x \cdot q^2\right)$.
- PG de 4 termos: $\left(\frac{x}{a^3}, \frac{x}{a}, x \cdot a, x \cdot a^3\right)$, $q = a^2$.

Propriedade 2

Se três termos formam uma PG, então, o quadrado do termo do meio é o produto dos outros dois.

Demonstração:

$$(a, b, c) \text{ é PG } \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow b^2 = a \cdot c$$

Se os três termos são positivos, o termo central é a média geométrica dos outros dois, ou seja:

$$b = \sqrt{a \cdot c}$$

Em progressões geométricas que têm número ímpar de termos, o primeiro termo, o termo central e o último termo formam, por sua vez, outra PG. Assim:

$$\left(a_{\frac{1+n}{2}}\right)^2 = a_1 \cdot a_n$$

Propriedade 3

Em uma PG finita, o produto dos termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

Demonstração:

Seja $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ uma PG de *n* termos e sejam a_{1+k} e a_{n-k} os termos equidistantes de a_1 e a_n, respectivamente. Dessa maneira, tem-se:

$$a_{1+k} \cdot a_{n-k} = \left(a_1 \cdot q^{1+k-1}\right) \cdot \left(a_n \cdot q^{(n-k)-n}\right) =$$

$$= a_1 \cdot a_n \cdot q^k \cdot q^{-k} = a_1 \cdot a_n \cdot q^{k-k} = a_1 \cdot a_n \cdot q^0 = a_1 \cdot a_n$$

Veja os exemplos a seguir:

a) Na PG $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16\right)$, tem-se:

$$\frac{1}{4} \cdot 16 = \frac{1}{2} \cdot 8 = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2 = 4$$

b) Na PG: $\left(\frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, 1, -3, 9, -27, 81, -243\right)$ tem-se:

$$\frac{1}{9} \cdot (-243) = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 81 = 1 \cdot (-27) = (-3) \cdot 9 = -27$$

Exercícios resolvidos

21 A soma de três números que formam uma PA crescente é 36. Determine esses números, sabendo que se somarmos 6 unidades ao último eles passam a formar uma PG.

Resolução:

Sejam os números que formam a PA $(x - r, x, x + r)$, temos:

$$(x - r) + x + (x + r) = 36 \Leftrightarrow x - r + x + x + r = 36 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x = 36 \Leftrightarrow x = 12$$

Assim, seja $(12 - r, 12, 12 + r)$ a PA, temos que $(12 - r, 12, 12 + r + 6) = (12 - r, 12, 18 + r)$ é uma PG, logo:

$$12^2 = (12 - r) \cdot (18 + r) \Leftrightarrow 144 = 216 - 6r - r^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r^2 + 6r - 72 = 0 \Leftrightarrow r = 6 \text{ ou } r = -12$$

Como $r > 0$, temos $r = 6$ e os números são 6, 12 e 18.

22 Determine três números em PG, sabendo que o produto vale 27 e a soma $\frac{21}{2}$

Resolução:

Podemos escrever a PG como $\left(\frac{x}{q}, x, x \cdot q\right)$. Assim, nas condições do enunciado:

$$\frac{x}{q} \cdot x \cdot (x \cdot q) = 27 \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = 3$$

Assim:

$$\frac{3}{q} + 3 + 3q = \frac{21}{2} \Leftrightarrow \frac{6 + 6q + 6q^2}{2q} = \frac{21q}{2q} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6q^2 + 15q \Leftrightarrow 6 = 0 \quad q = 2 \text{ ou } q \quad \frac{1}{2}$$

Temos então duas PGs possíveis:

$$\begin{cases} \text{para } q = 2: \left(\frac{3}{2}, 3, 6\right) \\ \text{para } q = \frac{1}{2}: \left(6, 3, \frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

23 Obter a PG de 4 termos em que a soma dos dois primeiros termos é 12 e a soma dos dois últimos é 300.

Resolução:

Do enunciado temos:

$$a_3 + a_4 = 300 \Leftrightarrow a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 = 300 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow q^2 \cdot \left(a_1 + a_1 \cdot q^1\right) = 300 \Leftrightarrow q^2 \cdot \left(a_1 + a_2\right) = 300 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow q^2 \cdot 12 = 300 \Leftrightarrow q^2 = 25 \Leftrightarrow q = \pm 5$$
$$a_1 + a_2 = 12 \Leftrightarrow a_1 + a_1 \cdot q = 12 \Leftrightarrow a_1 \cdot (1 + q) = 12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{se } q = 5 \Rightarrow a_1 \cdot (1 + 5) = 12 \Leftrightarrow a_1 = 2 \\ \text{se } q = \quad 5 \Rightarrow a_1 \cdot (1 \quad 5) = 12 \Leftrightarrow a_1 = \quad 3 \end{cases}$$

Assim, teremos duas respostas possíveis:

$$\begin{cases} \text{se } a_1 = 2 \text{ e } q = 5 \Rightarrow (2, 10, 50, 250) \\ \text{se } a_1 = \Rightarrow 3 \text{ e } q \quad 5 \quad (\quad 3, 15, \quad 75, 375) \end{cases}$$

FRENTE 2

Produto dos *n* primeiros termos de uma PG

Seja a PG (a_1, a_2, a_3, , a_n,) de razão q Se P_n é o produto dos n primeiros termos da PG, então tem se:

$$\left(P_n\right)^2 = \left(a_1 \cdot a_n\right)^n$$

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n \quad 1)}{2}}$$

Demonstração:

a) $P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n$ (I)

$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \ldots \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1$ (II)

Multiplicando (I) por (II):

$$\left(P_n\right)^2 = a_1 \cdot a_n \cdot a_2 \cdot a_{n-1} \cdot a_3 \cdot a_{n-2} \cdot \ldots \cdot a_2 \cdot a_{n-1} \cdot a_1 \cdot a_n$$

$$\left(P_n\right)^2 = a_1 \cdot a_n \cdot a_1 \cdot a_n \cdot a_1 \cdot a_n \cdot \ldots \cdot a_1 \cdot a_n \cdot a_1 \cdot a_n \cdot a_1 \cdot a_n$$

$$\left(P_n\right)^2 = \left(a_1 \cdot a_n\right) \cdot \left(a_1 \cdot a_n\right) \cdot \left(a_1 \cdot a_n\right) \cdot \ldots \cdot \left(a_1 \cdot a_n\right) \cdot \left(a_1 \cdot a_n\right) \cdot \left(a_1 \cdot a_n\right)$$

$$\left(P_n\right)^2 = \left(a_1 \cdot a_n\right)^n$$

b) $P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_n$

$P_n = a_1 \cdot \left(a_1 \cdot q\right) \cdot \left(a_1 \cdot q^2\right) \cdot \left(a_1 \cdot q^3\right) \cdot \ldots \cdot \left(a_1 \cdot q^{n-1}\right)$

$P_n = a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_1 \cdot q \cdot q^2 \cdot q^3 \cdot \ldots \cdot q^{n-1}$

$P_n = a_1^n \cdot q^{1+2+3+1+ \quad -}$

$P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{(1+n \quad 1)\,(n \quad 1)}{2}}$

$P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n \cdot (n-1)}{2}}$

Observe, por exemplo, como calcular o produto dos 12 primeiros termos da PG $\left(1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, \ldots\right)$.

A PG dada tem primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = \sqrt{2}$, logo:

$$P_{12} = a_1^{12} \cdot q^{\frac{12\,(12 \quad 1)}{2}} = 1^{12} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{66} = 1 \cdot \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{66} = 2^{33}$$

Soma dos *n* primeiros termos de uma PG

Seja a progressão geométrica (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...) de razão $q \neq 1$. Se S_n é a soma dos n primeiros termos da PG, então tem-se:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot \left(q^n - 1\right)}{q - 1}$$

Se $q = 1$, tem-se que $S_n = n \cdot a_1$.

Demonstração:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

$$q \cdot S_n = q \cdot \left(a_1 + a_2 + a_3 + \quad + \quad _{n-1} + \quad _n\right)$$

$$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \ldots + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q$$

Mas como $a_1 \cdot q = a_2$, $a_2 \cdot q = a_3$, $a_3 \cdot q = a_4$, ..., $a_{n-1} \cdot q = a_n$ e $a_n \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^n$, tem-se que:

$$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_1 \cdot q^n$$

Fazendo $q \cdot S_n \quad S_n$ teremos:

$q \cdot S_n - S_n = \left(a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_1 \cdot q^n\right) - \left(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n\right) q \cdot S_n - S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_1 \cdot q^n \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_{n \; 1} \quad a_n$

$$q \cdot S_n - S_n = a_1 \cdot q^n - a_1$$

$$S_n \cdot \left(q - 1\right) = a_1 \cdot \left(q^n - 1\right)$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot \left(q^n \quad 1\right)}{q - 1}$$

Para $q = 1$ tem-se que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 \cdot 1^{n-1} = a_1$, assim:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n =$$

$$= a_1 + a_1 + a_1 + \ldots + a_1 + a_1 = n \cdot a_1$$

Observe, por exemplo, como calcular a soma dos 8 primeiros termos da PG (2, 6, 18, 54, ...).

Na PG de primeiro termo $a_1 = 2$ e razão $q = 3$, temos:

$$S_8 = \frac{a_1 \cdot \left(q^8 - 1\right)}{q - 1} = \frac{2 \cdot \left(3^8 \quad 1\right)}{3 - 1} = \frac{2 \cdot \left(6561 - 1\right)}{2} = 6560$$

Soma dos termos de uma PG infinita

Vamos inicialmente entender o que vem a ser uma soma de infinitos termos.

Como exemplo, seja a PG infinita $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \quad\right)$ Efetuando-se a soma de alguns de seus termos, obtém-se:

$S_1 = a_1 = 1$ $\quad \left(2 \quad 1 \quad 1\right)$

$S_2 = a_1 + a_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ $\quad \left(2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\right)$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$ $\quad \left(2 \quad \frac{7}{4} \quad \frac{1}{4}\right)$

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$ $\quad \left(2 - \frac{15}{8} = \frac{1}{8}\right)$

Observa-se que, à medida que o número de termos da soma aumenta, o resultado da soma aproxima-se cada vez mais de 2. Nesse sentido, entende-se o resultado de uma soma infinita como o valor do qual a soma se aproxima (limite), à medida que aumentamos o número de termos, No exemplo anterior:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = \lim_{n \to \infty} S_n = 2$$

Algumas somas infinitas convergem para valores finitos, outras não se aproximam de nenhum valor (podem aumentar ou diminuir o valor indefinidamente, ou mesmo oscilar). Chamamos as somas que convergem para valores finitos de **convergentes**. As que não convergem, de divergentes. Veja, por exemplo, a soma $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$

O valor da soma S cresce à medida que o número de termos aumenta, sempre superando qualquer limite preestabelecido. Assim, se utilizarmos um número infinito de parcelas, o valor da soma "estoura" para infinito.

Podemos entender de maneira menos formal o que acontece com a convergência de séries da forma q^n. Se $-1 < q < 1$, temos que $\lim q^n = 0$ (q^n tende a 0). Se $q < -1$

ou $q \geq 1$, a série não converge, pois $\lim\limits_{n \to \infty} |q|^n = \infty$ (o módulo de q^n aumenta indefinidamente). Se $q = -1$ a série q^n oscila. Veja os seguintes exemplos:

a) $q = \frac{1}{2} : \left(\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4, \ldots\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$

Os valores da série tendem a zero.

b) $q = \ \frac{1}{2} : \left(\ \frac{1}{2}, \left(\ \frac{1}{2}\right)^2, \left(\ \frac{1}{2}\right)^3, \left(\ \frac{1}{2}\right)^4, \ \right) =$

$= \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$

Os valores da série tendem a zero.

c) $q = 2 : (2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ \ldots) = (2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \ldots)$

Os valores da série aumentam ilimitadamente.

d) $q = -2 : (-2,\ (-2)^2,\ (-2)^3,\ (-2)^4,\ \ldots) = (-2,\ 4,\ -8,\ 16,\ \ldots)$.

Os valores da série aumentam, em módulo, ilimitadamente.

e) $q = \ 1 : (\ 1,\ (\ 1)^2,\ (\ 1)^3,\ (\ 1)^4, \ )(\ 1,\ 1, \ \ 1,\ 1,\ \ldots)$

Os valores da série oscilam.

Voltando à soma dos termos de uma PG infinita, utili zando as análises anteriores, para PGs com razão entre 1 e 1 ($-1 < q < 1$), segue que:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots = \lim_{n \to \infty} S_n =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1 \cdot (0 - 1)}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q},$$

pois $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$ quando $-1 < q < 1$

Dessa maneira, verificamos que a soma S dos infinitos termos de uma PG de razão $-1 < q < 1$, converge para:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots = \frac{a_1}{1 - q}$$

Para progressões geométricas com razão *q*, tal que $|q| \geq 1$, a soma infinita não converge e não está definida

Observe alguns exemplos de somas infinitas de progressões geométricas:

a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

c) $2 + \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2} \ \ 1}{\sqrt{2}}} =$

$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{2 + \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 \ \ 1^2} = 2 + \sqrt{2}$

d) A soma $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$ não converge, pois $q = 2$ e $|q| = 2 > 1$.

e) A soma $1 \ \ 3 + 9 \ \ 27 + \ \ $ não converge, pois $q = \ \ 3$ e $|q| = 3 > 1$

Exercícios resolvidos

24 a) Calcular a soma:

$S = \log_2 2a + \log_2 4a + \log_2 8a ++ \ldots + \log_2 2^{10}a$

b) Determinar **a** se $S = 75$.

Resolução:

a) $S = \log_2 2a + \log_2 4a + \log_2 8a + \ldots + \log_2 2^{10}a$

$S = \log_2 (2a \cdot 4a \cdot 8a \ \cdot \ldots \cdot 2^{10}a)$

$S = \log_2 \left[(2a)^{10} \cdot 2^{\frac{10\ (10 \ \ 1)}{2}}\right]$

$S = \log_2 \left[a^{10} \cdot 2^{10 + 45}\right]$

$S = \log_2 a^{10} + \log_2 2^{55}$

$S = 10 \cdot \log_2 a + 55$

b) $S = 75 \Leftrightarrow 10 \cdot \log_2 a + 55 = 75 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2 a = \frac{75 \ \ 55}{10} \Leftrightarrow \log_2 a = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 2^2 = 4$

25 Em uma PG, o 1º termo é 1 e o 10º termo é 32 Calcule o produto dos dez primeiros termos dessa PG

Resolução:

Se $a_1 = 1$ e $a_{10} = 32 = 2^5$, o produto será:

$(P_{10})^2 = (a_1 \cdot a_{10})^{10} \Leftrightarrow (P_{10})^2 = (1 \cdot 2^5)^{10} = 2^{50} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P_{10} = \sqrt{2^{50}} \Leftrightarrow P_{10} = 2^{25}$

26 Determinar 11 números em PG tais que a soma dos dez primeiros é 3069 e a soma dos dez últimos é 6138.

Resolução:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + \ \ + a_9 + a_{10} = 3069 \\ a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{10} + a_{11} = 6138 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + \ \ + a_9 + a_{10} = 3069 \\ a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \ldots + a_9 \cdot q + a_{10} \cdot q = 6138 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + \ \ + a_9 + a_{10} = 3069 \\ q \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \ \ + a_9 + a_{10}) = 6138 \end{cases}$$

$$q \cdot 3069 = 6138$$

$$q = \frac{6138}{3069} = 2$$

Como a soma dos dez primeiros termos da PG é 3069, temos:

$S_{10} = \frac{a_1 \cdot (2^{10} - 1)}{2 \ \ 1} = 3069 \Leftrightarrow \frac{a_1 \cdot 1023}{1} = 3069 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1 = \frac{3069}{1023} = 3$

Portanto, os 11 termos da PG são: (3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536, 3072, ...).

27 Os extremos de uma progressão geométrica crescente são 1 e 243. Se a soma dos termos dessa progressão é 364, determine a razão e o número de termos dessa PG.

Resolução:

Se $a_1 = 1$ e $a_n = 243$, tem-se:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow 243 = 1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow 243 = \frac{q^n}{q^1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q^n = 243q \quad \text{(I)}$$

Sendo a soma dos termos dessa progressão igual a 364, então:

$$S_n = \frac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1} \Leftrightarrow 364 = \frac{1\left(243q - 1\right)}{q - 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 364q - 364 = 243q - 1 \Leftrightarrow 121q = 363 \Leftrightarrow q = 3$$

Substituindo $q = 3$ em (I):

$$3^n = 243 \cdot 3 \Leftrightarrow 3^n = 729 \Leftrightarrow 3^n = 3^6 \Leftrightarrow n = 6$$

Portanto, a razão da PG é 3 e seu número de termos é 6.

28 Um quadrado tem lados de medida **a**. Tomando os pontos médios dos lados, constrói se outro quadrado. Repetindo-se o processo, constrói-se uma sequência de quadrados. Calcule a soma das áreas dos dez pri meiros quadrados.

Resolução:

Ao tomarmos os pontos médios, construímos um quadrado com lados cuja razão com o lado do quadrado original é $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Assim, a razão entre as áreas desses quadrados é $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ e as áreas formam uma PG de razão $\frac{1}{2}$: $3^n = 729 \Leftrightarrow \left(a^2, \frac{a^2}{2}, \frac{a^2}{4}, \frac{a^2}{8}, \ldots\right)$.

Assim a soma das áreas dos dez primeiros quadrados é:

$$S_{10} = \frac{a_1 \cdot \left(q^{10} - 1\right)}{q - 1} = \frac{a^2 \cdot \left(\frac{1}{2^{10}} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{a^2 \cdot \left(\frac{1 - 2^{10}}{2^{10}}\right)}{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{a^2 \cdot \left(\frac{2^{10} - 1}{2^{10}}\right)}{\frac{1}{2}} = a^2 \cdot \left(\frac{2^{10} - 1}{2^{10}}\right) \cdot \frac{2}{1} = a^2 \cdot \left(\frac{2^{10} - 1}{2^9}\right) = \frac{1023}{512} a^2$$

29 Determine *x* na soma: $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \frac{x}{27} + \ldots = 30$.

Resolução:

No primeiro membro da equação, tem-se a soma de uma PG infinita de razão $\frac{1}{3}$, logo, a soma da PG converge e é dada por $\frac{x}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{x}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}x$. A equação dada é equivalente a: $\frac{3}{2}x = 30 \Leftrightarrow x = 20$.

30 Determine a fração geratriz da dízima 0,232323....

Resolução:

$$0{,}23232323\ldots = 0{,}23 + 0{,}0023 + 0{,}000023 +$$

$$+ 0{,}00000023 + \ldots = \frac{23}{100} + \frac{23}{10000} + \frac{23}{1000000} +$$

$$+ \frac{23}{100000000} +$$

A expressão corresponde à soma dos termos de uma PG infinita de primeiro termo $a_1 = \frac{23}{100}$ e razão $\frac{1}{100}$.

Assim: $S = \frac{23}{100} + \frac{23}{10\,000} + \frac{23}{1\,000\,000} + \frac{23}{100\,000\,000} +$

$$+ \ldots = \frac{\frac{23}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{23}{100} \cdot \frac{100}{99} = \frac{23}{99}.$$

Portanto, a fração geratriz da dízima 0,23232323 é $\frac{23}{99}$

31 A soma dos termos de ordem ímpar de uma PG infinita é 90 e a soma dos termos de ordem par é 60. Calcule o 1º termo.

Resolução:

Seja a PG $\left(a_1, a_1 \cdot q, a_1 \cdot q^2, a_1 \cdot q^3, a_1 \cdot q^4, a_1 \cdot q^5, \ldots\right)$, de razão *q*, com $-1 < q < 1$. A sequência formada pelos termos ímpares $\left(a_1, a_1 \cdot q^2, a_1 \cdot q^4, \ldots\right)$ e a formada pelos termos pares $\left(a_1 \cdot q, a_1 \cdot q^3, a_1 \cdot q^5, \ldots\right)$ são duas PGs infinitas de razão q^2. Do enunciado, sabe-se que:

$$\begin{cases} a_1 + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^4 + \ldots = 90 \\ a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^3 + a_1 \cdot q^5 + \ldots = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{1 - q^2} = 90 & \text{(I)} \\ \frac{a_1 \cdot q}{1 - q^2} = 60 & \text{(II)} \end{cases}$$

Dividindo-se (II) por (I) tem-se:

$$\frac{\frac{a_1 \cdot q}{1 - q^2}}{\frac{a_1}{1 - q^2}} = \frac{60}{90} \Leftrightarrow \frac{a_1 \cdot q}{1 - q^2} \cdot \frac{1 - q^2}{a_1} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow q = \frac{2}{3}$$

Substituindo o valor de q em (I) tem-se:

$$\frac{a_1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = 90 \Leftrightarrow \frac{a_1}{1 - \frac{4}{9}} = 90 \Leftrightarrow \frac{a_1}{\frac{5}{9}} = 90 \Leftrightarrow a_1 = \frac{5}{9} \cdot 90 = 50$$

32 Divide-se um segmento de comprimento *m* em três partes iguais e retira se a parte central; para cada um dos segmentos repete-se o processo, retirando-se suas partes centrais e assim sucessivamente Calcular a soma dos comprimentos retirados

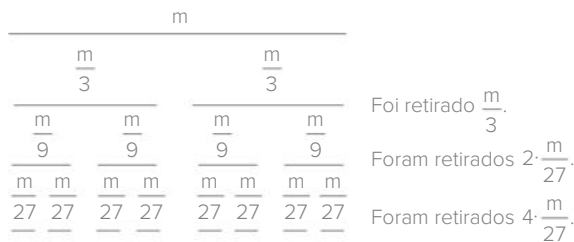
Resolução:

Do enunciado, podemos representar a situação como aparece na figura a seguir:

m

$\frac{m}{3}$ $\frac{m}{3}$ — Foi retirado $\frac{m}{3}$.

$\frac{m}{9}$ $\frac{m}{9}$ $\frac{m}{9}$ $\frac{m}{9}$ — Foram retirados $2 \cdot \frac{m}{27}$.

$\frac{m}{27}$ $\frac{m}{27}$ $\frac{m}{27}$ $\frac{m}{27}$ $\frac{m}{27}$ $\frac{m}{27}$ $\frac{m}{27}$ $\frac{m}{27}$ — Foram retirados $4 \cdot \frac{m}{27}$.

A sequência de comprimentos retirados forma a PG $\left(\frac{m}{3}, \frac{2m}{9}, \frac{4m}{27}, \ldots\right)$ de razão $q = \frac{2}{3}$.

A soma de todos os comprimentos retirados é dada por:

$$S = \frac{m}{3} + \frac{2m}{9} + \frac{4m}{27} + \ldots = \frac{\frac{m}{3}}{1 - \frac{2}{3}} \Leftrightarrow S = \frac{\frac{m}{3}}{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow S = m$$

33 Em um triângulo de perímetro 2p e área S, tomam-se os pontos médios dos lados e forma-se um novo triângulo. Repete-se o processo sucessivamente, criando-se uma sequência infinita de triângulos. Calcule:

a) a soma de todos os perímetros

b) a soma de todas as áreas.

Resolução:

a) Cada novo triângulo da sequência tem como lados as bases médias do triângulo anterior, sendo, portanto, semelhante ao triângulo anterior, com razão de semelhança igual a $\frac{1}{2}$. Assim, os perímetros formam a PG $\left(2p, p, \frac{p}{2}\right)$ de razão $q = \frac{1}{2}$ e a soma desses perímetros é dada por:

$$2p + p + \frac{p}{2} + \ldots = \frac{2p}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2p}{\frac{1}{2}} = 4p$$

b) A razão entre as áreas dos triângulos é $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.
Logo, a soma das áreas é dada por:

$$S + \frac{S}{4} + \frac{S}{16} + \ldots = \frac{S}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{S}{\frac{3}{4}} = \frac{4S}{3}$$

34 Em um plano cartesiano, um ponto material ocupa a posição (0, 2) e move-se 256 unidades de comprimento paralelamente ao eixo Ox, no sentido das abscissas positivas. A seguir, gira 90° no sentido anti-horário, deslocando-se $\frac{3}{4}$ do deslocamento anterior, ou seja, $\frac{3}{4} \cdot 256 = 192$ unidades de comprimento. O processo repete-se indefinidamente, ou seja, ao fim de cada deslocamento, o móvel gira 90° no sentido anti-horário e desloca-se $\frac{3}{4}$ do deslocamento anterior. Continuando o processo infinitamente, calcule para quais coordenadas o móvel converge.

Resolução:

Na direção do eixo Ox, a variação do valor das abscissas segue a sequência $(256, -144, 81, \ldots)$ que é uma PG de razão $q = -\frac{9}{16}$. Assim, o valor para o qual a abscissa converge é:

$$0 + 256 - 144 + 81 - \ldots = 0 + \frac{256}{1 - \left(-\frac{9}{16}\right)} = \frac{256}{\frac{25}{16}} = 256 \cdot \frac{16}{25} = \frac{4096}{25} = 163{,}84$$

Na direção do eixo Oy, a variação do valor das ordenadas segue a sequência $\left(-192, 108, -\frac{243}{4}, \ldots\right)$, que é uma PG de razão $q = -\frac{9}{16}$. Assim, o valor para o qual a ordenada converge é:

$$2 - 192 + 108 - \frac{243}{4} + \ldots = 2 + \frac{-192}{1 - \left(-\frac{9}{16}\right)} = 2 + \frac{(-192)}{\frac{25}{16}} =$$

$$= 2 - 192 \cdot \frac{16}{25} = 2 - \frac{3072}{25} = 2 - 122{,}88 = -120{,}88$$

Logo, o móvel converge para a posição (163,84; −120,88).

Outras sequências

PA de ordem *K*

O termo geral de uma progressão aritmética $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r = r \cdot n + a_1 - r$ é um polinômio de 1º grau em $\mathbb{N}$. Podemos generalizar essa ideia, chamando de PA de ordem *K*, uma sequência que tem como termo geral um polinômio de grau *k*.

Observe a seguinte fatoração:

$$(n+1)^k - n^k = [n + 1 - n] \cdot (n^{k-1} + n^{k-2} + n^{k-3} + \ldots + n + 1) =$$
$$= n^{k-1} + n^{k-2} + n^{k-3} + \ldots + n + 1$$

Como consequência, podemos construir, a partir de uma PA de ordem *K*, uma sequência cuja diferença de termos consecutivos da PA de ordem *K* $(b_n = a_{n+1} - a_n)$ também é uma PA, de ordem k − 1.

Note, por exemplo, na sequência de termo geral $a_n = n^2 + n$, a sequência de diferenças $b_n = a_{n+1} - a_n$, tem-se:

$$a_1 = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$
$$a_2 = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$$
$$a_3 = 3^2 + 3 = 9 + 3 = 12$$
$$a_4 = 4^2 + 4 = 16 + 4 = 20$$
$$a_5 = 5^2 + 5 = 25 + 5 = 30$$
$$a_6 = 6^2 + 6 = 36 + 6 = 42$$
$$\ldots$$

Assim, $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots) = (2, 6, 12, 20, 30, 42, \ldots)$.
Como $b_n = a_{n+1} - a_n$, temos:

$$b_1 = a_{1+1} - a_1 = a_2 - a_1 = 6 - 2 = 4$$
$$b_2 = a_{2+1} - a_2 = a_3 - a_2 = 12 - 6 = 6$$
$$b_3 = a_{3+1} - a_3 = a_4 - a_3 = 20 - 12 = 8$$
$$b_4 = a_{4+1} - a_4 = a_5 - a_4 = 30 - 20 = 10$$
$$b_5 = a_{5+1} - a_5 = a_6 - a_5 = 42 - 30 = 12$$
$$\ldots$$

FRENTE 2

Logo, $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, ...) = (4, 6, 8, 10, 12, ...)$.

Observe que a sequência de diferenças $b_n = a_{n+1} - a_n$, é uma PA, o que é uma consequência de $a_n = n^2 + n$ ser uma PA de ordem 2.

Veja agora, por exemplo, que a soma dos *n* pri meiros quadrados de números naturais, dada por $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$, satisfaz $S_n \quad S_{n-1} \quad n^2$, ou seja, é um polinômio de grau 2. Logo S_n é um polinômio de grau 3, com termo independente nulo (a soma dos zero primeiros termos é nula). Assim:

$$S_n = a_3 \cdot n^3 + a_2 \cdot n^2 + a_1 \cdot n$$

$$S_1 = 1^2 \Leftrightarrow a_3 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow a_3 + a_2 + a_1 = 1$$

$$S_2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5 \Leftrightarrow a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2 = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 = 5$$

$$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 41 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_3 \cdot 3^3 + a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3 = 14 \Leftrightarrow 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 = 14$$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} a_3 + a_2 + a_1 = 1 \\ 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 = 5 \\ 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 = 14 \end{cases}$, obtemos $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{1}{2}$ e $a_3 = \frac{1}{6}$ Assim:

$$S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$$

Progressões aritmético-geométrica (PAG)

As progressões aritmético-geométricas são sequências da forma $c_n = a_n \cdot b_n$, onde a_n é uma PA e b_n é uma PG. Por exemplo, a sequência $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \frac{9}{16}, \frac{11}{32}, ...\right)$ é formada pela multiplicação de cada elemento a_i da PA $(3, 5, 7, 9, 11, \quad)$ pelo respectivo elemento b_i da PG $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, ...\right)$.

Um problema típico de PAG é o do cálculo da soma de seus termos Uma técnica interessante para resolver esse problema consiste em multiplicar a soma pela razão da PG e, em seguida, subtrair da soma o produto obtido

Observe, como exemplo, o cálculo da soma da PAG dada acima, ou seja, $S = \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \frac{9}{16} + \frac{11}{32} +$

Tem-se $S = \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \frac{9}{16} + \frac{11}{32} + ...$ e o produto de S pela razão da PG será $\frac{1}{2}S = \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \frac{9}{32} + \frac{11}{64} +$ A diferença entre essas somas é igual a:

$$S - \frac{1}{2}S = \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \frac{9}{16} + ...\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \frac{9}{32} + ...\right)$$

$$\frac{2S - S}{2} = \frac{3}{2} + \left(\frac{5}{4} \quad \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{7}{8} \quad \frac{5}{8}\right) + \left(\frac{9}{16} \quad \frac{7}{16}\right) + \left(\frac{11}{32} \quad \frac{9}{32}\right) +$$

$$\frac{S}{2} = \frac{3}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{8} + \frac{2}{16} + \frac{2}{32} + ... = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...$$

$$\frac{S}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow S = 5$$

Sequência de Fibonacci

Como vimos no início deste capítulo, a sequência de Fibonacci é um exemplo de sequência recursiva. Essa sequência recebeu o nome do matemático italiano Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, que a utilizou para descrever, no ano de 1202, o crescimento de uma população de coelhos. Tal sequência já era, no entanto, conhecida na antiguidade. Pode-se definir a sequência de Fibonacci da seguinte maneira:

$$\begin{cases} f_1 = f_2 = 1 \\ f_k = f_{k-1} + f_{k-2}, \quad k \geq 3 \end{cases}$$

Seus primeiros elementos são (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,).

A série de Fibonacci aparece em muitos problemas da Matemática e tem aplicações em outras ciências A frequên cia com que aparece em fenômenos naturais lhe rendeu uma certa fama. Boa parte dessa fama está relacionada ao seguinte fenômeno: a razão entre dois termos consecutivos se aproxima da razão áurea $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}61803399\right)$ à medi da que cresce o valor de *n* Veja os seguintes exemplos:

$$\frac{f_8}{f_7} = \frac{21}{13} \cong 1{,}61538461$$

$$\frac{f_9}{f_8} = \frac{34}{21} \cong 1{,}61904762$$

$$\frac{f_{10}}{f_9} = \frac{55}{34} \cong 1{,}61764706$$

$$\frac{f_{11}}{f_{10}} = \frac{89}{55} \cong 1{,}61818182$$

$$\frac{f_{12}}{f_{11}} = \frac{144}{89} \cong 1{,}61797753$$

$$\frac{f_{13}}{f_{12}} = \frac{233}{144} \cong 1{,}61805556$$

Admitindo que a razão $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ converge, ou seja, que $\lim_{n \to \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = r$, com $r \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \Leftrightarrow \frac{f_n}{f_{n-1}} = 1 + \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} \qquad (I)$$

Quando $n \to \infty$ verifica-se que a conjectura é confirmada:

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = 1 + \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} \Leftrightarrow r = 1 + \frac{1}{r} \Leftrightarrow r^2 \quad r = 1 \Leftrightarrow 0 = r \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Ainda sobre a equação $r^2 - r - 1 = 0$, que tem as raízes $r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, pode-se afirmar que $r^2 = r + 1$, onde, se substituirmos *r* por $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, tem-se:

$$\begin{cases} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = f_n \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + f_{n-1} \quad \text{(i)} \\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = f_n \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + f_{n-1} \quad \text{(ii)} \end{cases}$$

Fazendo (i) (ii):

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = f_n \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - f_n \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = f_n \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = f_n\left[\sqrt{5}\right]$$

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

A relação acima é a fórmula do termo geral da sequência de Fibonacci.

Uma aplicação interessante é a espiral de Fibonacci, representada na figura a seguir. Observe que a partir dos dois quadrados de lado 1, cada novo quadrado tem lado igual à soma dos lados dos dois anteriores. Assim, os lados do quadrado formam a sequência de Fibonacci. Os ramos da espiral são arcos de um quarto de circunferência, centradas no canto de cada quadrado. A razão entre um raio de arco e o raio anterior tende à razão áurea.

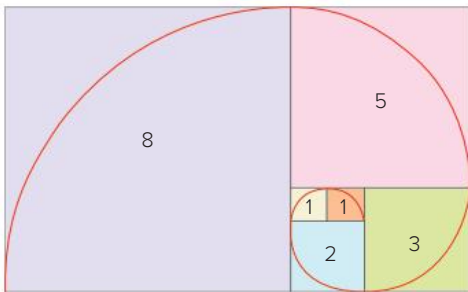



Fig 1 Espiral de Fibonacci

A espiral de Fibonacci aparece em várias situações na natureza, como conchas ou padrões de pétalas.

andersphoto/Shutterstock.com

Sabine Hortebusch/Shutterstock.com

Akira3288/Shutterstock.com

ThomasLENNE/Shutterstock.com

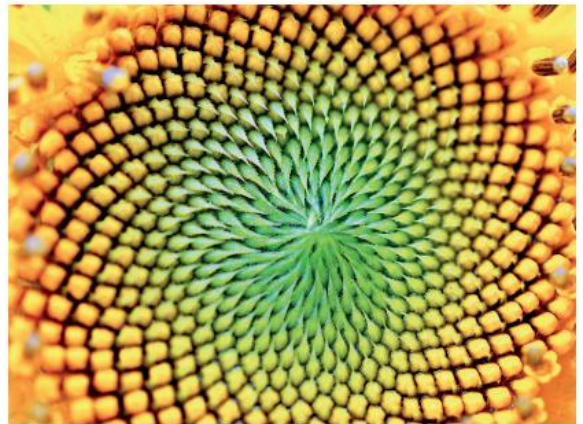



Fig. 2 Sequência de Fibonacci na natureza

Outra curiosa aparição da sequência de Fibonacci ocorre no triângulo de Pascal Veja figura a seguir:

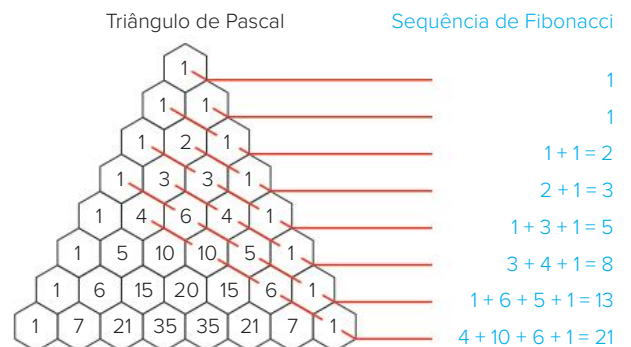



Fig. 3 Triangulo de Pascal e sequência de Fibonacci

Revisando

1 Determine o 31º termo da PA de primeiro termo $\frac{3}{2}$ e razão $\frac{1}{2}$.

2 **Enem 2018** A prefeitura de um pequeno município do interior decide colocar postes para iluminação ao longo de uma estrada retilínea, que inicia em uma praça central e termina numa fazenda na zona rural. Como a praça já possui iluminação, o primeiro poste será colocado a 80 metros da praça, o segundo, a 100 metros, o terceiro, a 120 metros, e assim sucessivamente, mantendo-se sempre uma distância de vinte metros entre os postes, até que o último poste seja colocado a uma distância de 1380 metros da praça.
Se a prefeitura pode pagar, no máximo, R$ 8.000,00 por poste colocado, o maior valor que poderá gastar com a colocação desses postes é

A R$ 512.000,00.
B R$ 520.000,00.
C R$ 528.000,00.
D R$ 552.000,00.
E R$ 584.000,00.

3 Uma concessionária vende um carro financiado em dois anos, com parcelas mensais assim definidas: a primeira de R$ 1.000,00 e as demais decrescerão R$ 20,00 ao mês. Ao final do financiamento esse carro terá custado ao comprador

A R$ 18.480,00.
B R$ 18.240,00.
C R$ 18.000,00.
D R$ 17.760,00.
E R$ 17.520,00.

4 De uma progressão aritmética a_n de razão *r*, sabe-se que $a_8 = 16$ e $a_{14} = 4$. Seja S_n a soma dos *n* primeiros termos de a_n, o menor valor de *n*, de modo que $S_n = 220$, é

A 12 **B** 11 **C** 14 **D** 16 **E** 18

5 **FMP 2019** Uma progressão geométrica tem o seu primeiro termo e sua razão iguais a $\frac{1}{2}$. O quinto termo dessa progressão é uma fração que, se escrita em forma percentual, será

A 6,25%. **B** 31,25%. **C** 3,125%. **D** 32%. **E** 2,5%.

6 **FMP 2018** Para $n \geq 1$ a expressão $a_n = 3n + 5$ é o termo geral de uma progressão aritmética. Para $n \geq 1$, considere a sequência cujo termo geral é dado por $b_n = 2^{a_n}$. A sequência de termo geral b_n é uma progressão geométrica cuja razão é

A 256 **B** 16 **C** 3 **D** 6 **E** 8

7 **Famerp 2017** Em 1996, 25% da energia produzida por um país era obtida de usinas hidrelétricas Em 2016, essa produção passou a ser de 40%. Admitindo se que de 25%, em 1996, para 40%, em 2016, o crescimento anual da porcentagem foi geométrico, é correto afirmar que o fator constante de crescimento anual foi igual a

A $\sqrt[20]{6{,}25}$ **B** $\log_{1{,}6} 20$ **C** $\log_{20} 6{,}25$ **D** $\log_{20} 1{,}6$ **E** $\sqrt[20]{1{,}6}$

FRENTE 2

8 **Mackenzie 2019** Se o quarto termo de uma progressão geométrica é 2, então o produto dos seus 7 primeiros termos é igual a

A 108.
B 128.
C 148.
D 168.
E 188.

9 **ESPM-SP 2017** Na progressão geométrica (1, 2, 4, 8, ...), sendo a_n o n-ésimo termo e S_n a soma dos *n* primeiros termos, podemos concluir que:

A $S_n = 2 \cdot a_n$
B $S_n = a_n + 1$
C $S_n = a_{n+1} + 1$
D $S_n = a_{n+1} \quad 1$
E $S_n = 2 \cdot a_{n+1}$

10 **Mackenzie 2017** Se $a_1, a_2, ..., a_{10}$ é uma sequência de números inteiros tal que $a_1 = 1$, para $n > 1$, $a_{n+1} - a_n = 3^n$ o valor de a_{10} é igual a

A 29524
B 88572
C 265719
D 9840
E 3279

Exercícios propostos

1 **Ifal 2018** Determine o 2017º termo da Progressão Aritmética cujo 1º termo é 4 e cuja razão é 2.

A 4032.
B 4034.
C 4036.
D 4038.
E 4040.

2 **Enem Libras 2017** A figura ilustra uma sequência de formas geométricas formadas por palitos, segundo uma certa regra.

Continuando a sequência, segundo essa mesma regra, quantos palitos serão necessários para construir o décimo termo da sequência?

A 30
B 39
C 40
D 43
E 57

3 **IFCE 2016** Numa progressão aritmética de razão 3, o sexto termo vale 54. O septuagésimo sexto termo dessa sequência é o número

A 284.
B 264.
C 318.
D 162.
E 228.

4 Unesp 2017 A figura indica o empilhamento de três cadeiras idênticas e perfeitamente encaixadas umas nas outras, sendo *h* a altura da pilha em relação ao chão.

(www.habto.com. Adaptado.)

A altura, em relação ao chão, de uma pilha de *n* cadeiras perfeitamente encaixadas umas nas outras, será igual a 1,4 m se *n* for igual a

A 14 B 17 C 13 D 15 E 18.

5 CP2 2019 Davi é uma criança que adora brincar com sequências numéricas. Seu pai, professor de Matemática, propôs ao menino que escrevesse em seu caderno uma sequência numérica crescente, com os números naturais menores do que 100, no formato de uma tabela com 25 linhas e 4 colunas, mas sem mostrar para ele como ficou. Temos a seguir as primeiras linhas dessa tabela:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
⋮			

Depois de pronta a tabela, o pai pediu ao filho que pensasse num número natural menor do que 100 e lhe informasse apenas a linha e a coluna que ele ocupava nessa tabela.
Se Davi disse a seu pai que o número estava representado na 15ª linha e 3ª coluna da tabela, então o menino pensou no número

A 64. B 62. C 60. D 58.

6 Uerj 2017 Considere a matriz $A_{n \times 9}$ de nove colunas com números inteiros consecutivos, escrita a seguir.

$$A_{n\times 9} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 28 & 29 & 30 & 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Se o número 18109 é um elemento da última linha, linha de ordem *n*, o número de linhas dessa matriz é:

A 2011 B 2012 C 2013 D 2014

7 UPF 2017 Seja a_n uma sequência de números reais cujo termo geral é $a_n = \frac{1}{4} - n,\ n \in \mathbb{N}$ Qual das afirmações seguintes é **verdadeira**?

A a_n é uma progressão aritmética de razão –1.

B a_n é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$.

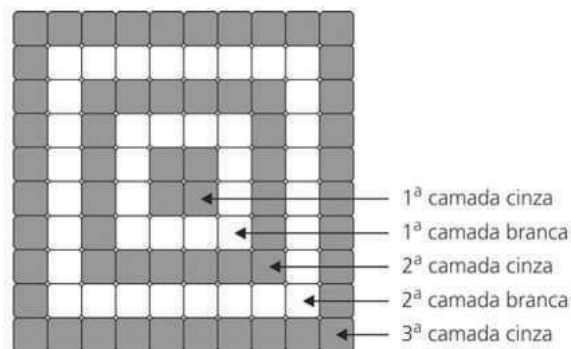
C a_n é uma progressão geométrica de razão 4.

D a_n não é uma progressão (nem geométrica, nem aritmética).

E a_n é simultaneamente uma progressão aritmética e geométrica.

8 FICSAE 2016 Suponha que, em certo país, observou-se que o número de exames por imagem, em milhões por ano, havia crescido segundo os termos de uma progressão aritmética de razão 6, chegando a 94 milhões/ano, ao final de 10 anos. Nessas condições, o aumento percentual do número de tais exames, desde o ano da observação até ao final do período considerado, foi de

A 130%. C 136%.
B 135%. D 138%.

9 Unicamp 2011 No centro de um mosaico formado apenas por pequenos ladrilhos, um artista colocou 4 ladrilhos cinza. Em torno dos ladrilhos centrais, o artista colocou uma camada de ladrilhos brancos, seguida por uma camada de ladrilhos cinza, e assim sucessivamente, alternando camadas de ladrilhos brancos e cinza, como ilustra a figura a seguir, que mostra apenas a parte central do mosaico. Observando a figura, podemos concluir que a 10ª camada de ladrilhos cinza contém

A 76 ladrilhos
B 156 ladrilhos.
C 112 ladrilhos.
D 148 ladrilhos

10 Unicamp 2020 Considere que (a, b, 3, c) é uma progressão aritmética de números reais, e que a soma de seus elementos é igual a 8. O produto dos elementos dessa progressão é igual a

A 30. C 15.
B 10. D –20.

FRENTE 2

11 Unicamp 2014 O perímetro de um triângulo retângulo é igual a 6,0 m e as medidas dos lados estão em progressão aritmética (PA). A área desse triângulo é igual a

A $1{,}5\ m^2$.
C $2{,}0\ m^2$.
B $3{,}0\ m^2$.
D $3{,}5\ m^2$.

12 Mackenzie 2018 Se A, B, C e D são termos consecutivos de uma progressão aritmética e $C^2 - B^2 \neq 0$, então o valor de $\dfrac{D^2 - A^2}{C^2 - B^2}$ é

A 0
C 3
E 7
B 1
D 5

13 EEAR 2017 Considere esses quatro valores x, y, 3x e 2y em PA crescente. Se a soma dos extremos é 20, então o terceiro termo é

A 9
B 12
C 5
D 18

14 PUC-Rio 2017 Os números 10, *x*, *y*, *z*, 70 estão em progressão aritmética (nesta ordem). Quanto vale a soma $x + y + z$?

A 80
C 100
E 120
B 90
D 110

15 Unicamp 2015 Se $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{13})$ é uma progressão aritmética (PA) cuja soma dos termos é 78, então α_7 é igual a

A 6.
C 8.
B 7.
D 9.

16 Uece 2019 Se $a_1, a_2, a_3,\ \ , a_7$ são os ângulos internos de um heptágono convexo e se as medidas destes ângulos formam, nesta ordem, uma progressão aritmética, então, a medida, em graus, do ângulo a_4 é um número

A menor do que 128.
B entre 128 e 129
C entre 129 e 130
D maior do que 130

17 Unifesp Uma pessoa resolveu fazer sua caminhada matinal passando a percorrer, a cada dia, 100 metros mais do que no dia anterior. Ao completar o 21º dia de caminhada, observou ter percorrido, nesse dia, 6000 metros. A distância total percorrida nos 21 dias foi de:

A 125500 m.
D 87500 m.
B 105000 m.
E 80000 m.
C 90000 m.

18 Uerj 2017 Um fisioterapeuta elaborou o seguinte plano de treinos diários para o condicionamento de um maratonista que se recupera de uma contusão:

- primeiro dia corrida de 6 km;
- dias subsequentes acréscimo de 2 km à corrida de cada dia imediatamente anterior.

O último dia de treino será aquele em que o atleta correr 42 km.

O total percorrido pelo atleta nesse treinamento, do primeiro ao último dia, em quilômetros, corresponde a:

A 414
C 456
B 438
D 484

19 Unesp 2016 A figura indica o padrão de uma sequência de grades, feitas com vigas idênticas, que estão dispostas em posição horizontal e vertical. Cada viga tem 0,5 m de comprimento. O padrão da sequência se mantém até a última grade, que é feita com o total de 136,5 metros lineares de vigas.

O comprimento do total de vigas necessárias para fazer a sequência completa de grades, em metros, foi de

A 4877.
C 4726.
E 5162.
B 4640.
D 5195.

20 Unesp 2013 A soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por $3n^2\ \ 2n$, onde *n* é um número natural Para essa progressão, o primeiro termo e a razão são, respectivamente,

A 7 e 1.
C 6 e 1.
E 6 e 7.
B 1 e 6.
D 1 e 7.

21 EsPCEx 2018 Uma fábrica de tratores agrícolas, que começou a produzir em 2010, estabeleceu como meta produzir 20000 tratores até o final do ano de 2025 O gráfico abaixo mostra as quantidades de tratores produzidos no período 2010-2017.

Admitindo que a quantidade de tratores produzidos evolua nos anos seguintes segundo a mesma razão de crescimento do período 2010-2017, é possível concluir que a meta prevista

A deverá ser atingida, sendo superada em 80 tratores
B deverá ser atingida, sendo superada em 150 tratores.
C não deverá ser atingida, pois serão produzidos 1850 tratores a menos.
D não deverá ser atingida, pois serão produzidos 150 tratores a menos
E não deverá ser atingida, pois serão produzidos 80 tratores a menos.

22 UEPG 2019 A função $f(n+1)=\dfrac{3f(n)+2}{3}$, para $n \geq 1$, está definida de forma recursiva. Considerando que $f(1) = 7$, assinale o que for correto.

01 O valor de $f(121)$ é 87.

02 $\big(f(1), f(2), f(3), f(4), ...\big)$ definem uma progressão aritmética de razão não inteira.

04 $f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(37) = 703$.

08 A soma dos algarismos de $f(901)$ é um número primo.

Soma:

23 FGV-SP 2018 Os termos de uma sequência são definidos recursivamente por $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = 2 + a_{n-1} \end{cases}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ Sendo assim, a soma dos *n* primeiros termos dessa sequência será dada pela expressão

A $7n \quad 2$

B $3,5n^2 \quad 3,5n + 5$.

C $n^2 \quad 17n + 60$

D $n^2 + 4n$

E $2n + 3$

24 Mackenzie 2019 Se $1 + 4 + 7 + 10 + ... + N = 925$, então o valor de N é igual a

A 69

B 71

C 73

D 75

E 77

25 Unesp Um fazendeiro plantou 3960 árvores em sua propriedade no período de 24 meses. A plantação foi feita mês a mês, em progressão aritmética. No primeiro mês foram plantadas *x* árvores, no mês seguinte $(x + r)$ árvores, $r > 0$, e assim sucessivamente, sempre plantando no mês seguinte *r* árvores a mais do que no mês anterior. Sabendo-se que ao término do décimo quinto mês do início do plantio ainda restavam 2160 árvores para serem plantadas, o número de árvores plantadas no primeiro mês foi:

A 50.

B 75.

C 100.

D 150.

E 165.

26 Unesp 2018 A figura mostra cinco retângulos justapostos de uma sequência Todos os retângulos possuem mesma altura, igual a 1 cm

Sabendo que 1 m^2 equivale a 10000 cm^2 e que a sequência é constituída por 100 retângulos, a figura formada tem área igual a

A 2,5 m^2

B 4 m^2

C 5 m^2

D 2 m^2

E 4,5 m^2

27 FICSAE 2017 Dois estatísticos estão em uma sala e a média de suas idades é 37 anos. Um terceiro estatístico entra na sala e a média das idades dessas três pessoas passa a ser 39 anos Um quarto estatístico entra na sala e a média passa a ser 41 anos. Esse processo continua e a cada estatístico que entra na sala, a média das idades de todos eles aumenta em 2 anos. O número de estatísticos que agora estão na sala, sabendo que o último a entrar tem 83 anos, é

A 13.

B 5.

C 17.

D 19.

28 Unifesp "Números triangulares" são números que podem ser representados por pontos arranjados na forma de triângulos equiláteros. É conveniente definir 1 como o primeiro número triangular. Apresentamos a seguir os primeiros números triangulares.

Se T_n representa o n-ésimo número triangular, então $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, e assim por diante. Dado que T_n satisfaz a relação $T_n = T_{n-1} + n$, para $n = 2, 3, 4, ...$, pode-se deduzir que T_{100} é igual a

A 5050.

B 4950.

C 2187

D 1458.

E 729

29 Acafe 2018 Uma famosa rede de supermercados resolve fazer uma grande promoção de determinado produto. Para tanto, resolve organizar os produtos de maneira a formar pilhas em uma sequência, conforme indica a figura a seguir Cada cubo, na figura, corresponde a um produto.

Pretende-se continuar construindo a sequência até a vigésima quarta pilha de produtos. Quantos produtos serão necessários para formar a **última** pilha de produtos dessa sequência?

A 360

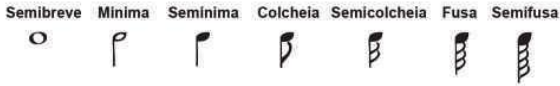
B 240

C 320

D 300

30 Enem PPL 2018 Na música, usam se sinais gráficos chamados figuras de duração para indicar por quanto tempo se deve emitir determinado som.

As figuras de duração usadas atualmente são: semibreve, mínima, semínima, colcheia, semicolcheia, fusa e semifusa.

Essas figuras não possuem um valor (tempo) fixo. Elas são proporcionais entre si. A duração de uma semi breve é equivalente à de duas mínimas, a duração de uma mínima é equivalente à de duas semínimas, a duração de uma semínima equivale à de duas colcheias e assim por diante, seguindo a ordem dada.
Considere que a semibreve tem a duração de tempo de uma unidade.

Disponível em: www.portaledumusicalcp2.mus.br. Acesso em: 11 nov. 2013 (adaptado).

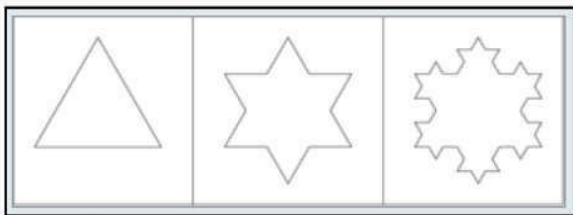
A sequência que indica a duração de tempo de uma mínima, de uma semínima, de uma colcheia, de uma semicolcheia, de uma fusa e de uma semifusa é

A 2, 4, 8, 16, 32, 64
B 1, 2, 4, 8, 16, 32
C $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$
D $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}$
E $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$

31 UPE 2018 A população inicial de uma colônia de bactérias, que cresce 40% a cada hora, é de 8 10^5 bactérias Qual é o número aproximado de bactérias dessa colônia ao final de 16 horas?

Considere $(1{,}4)^{16} = 218$.

A $1{,}7 \cdot 10^8$
B $2{,}2 \cdot 10^5$
C $1{,}8 \cdot 10^6$
D $3{,}4 \cdot 10^8$
E $4{,}6 \cdot 10^5$

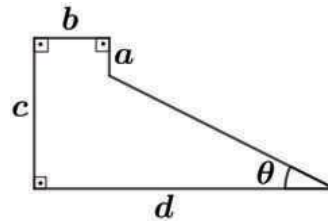
32 UFJF 2018 O fractal denominado floco de neve de Koch é obtido partindo-se de um triângulo equilátero. Divi de-se cada lado desse triângulo em 3 segmentos de mesmo comprimento, desenha-se um novo triângulo equilátero a partir do segmento do meio e retira-se a sua base, conforme figura abaixo. Esse processo ocorre indefinidamente para obter o floco de neve.

Fonte: disponível em <goo.gl/MfBH7V>

Qual o número de lados da sétima figura, isto é, após ocorrer 6 vezes esse processo?

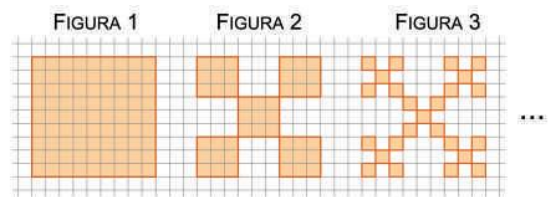
A 1024
B 3072
C 4096
D 7048
E 12288

33 Enem 2018 Torneios de tênis, em geral, são disputados em sistema de eliminatória simples Nesse sistema, são disputadas partidas entre dois competidores, com a eliminação do perdedor e promoção do vencedor para a fase seguinte. Dessa forma, se na 1ª fase o torneio conta com 2n competidores, então na 2ª fase restarão *n* competidores, e assim sucessivamente até a partida final.
Em um torneio de tênis, disputado nesse sistema, participam 128 tenistas.
Para se definir o campeão desse torneio, o número de partidas necessárias é dado por

A 2×128
B $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$
C $128 + 64 + 32 + 16 + 8 \;\; 4 + 2 + 1$
D $128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$
E $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$

34 Unicamp 2019 A figura a seguir exibe um pentágono em que quatro lados consecutivos têm comprimentos *a*, *b*, *c* e *d*.

Se a sequência (*a*, *b*, *c*, *d*) é uma progressão geométrica de razão $q > 1$, então $\tan\theta$ é igual a

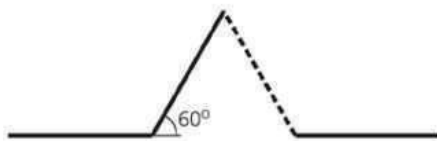
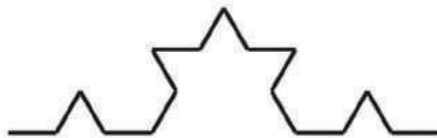
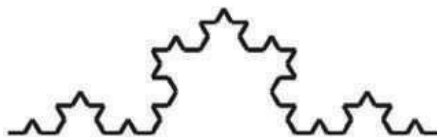
A $\frac{1}{\theta}$
B q.
C q^2
D $\sqrt{\theta}$.

35 Unesp 2018 A sequência de figuras, desenhadas em uma malha quadriculada, indica as três primeiras eta pas de formação de um fractal. Cada quadradinho dessa malha tem área de 1 cm^2.

Dado que as áreas das figuras, seguindo o padrão descrito por esse fractal, formam uma progressão geométrica, a área da figura 5, em cm^2, será igual a

A $\frac{625}{81}$
B $\frac{640}{81}$
C $\frac{125}{27}$
D $\frac{605}{81}$
E $\frac{215}{27}$

36 **Fuvest 2019** Forma-se uma pilha de folhas de papel, em que cada folha tem 0,1 mm de espessura. A pilha é formada da seguinte maneira: coloca-se uma folha na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já houverem sido colocadas anteriormente. Depois de 33 dessas operações, a altura da pilha terá a ordem de grandeza

A da altura de um poste.
B da altura de um prédio de 30 andares.
C do comprimento da Av. Paulista.
D da distância da cidade de São Paulo (SP) à cidade do Rio de Janeiro (RJ).
E do diâmetro da Terra.

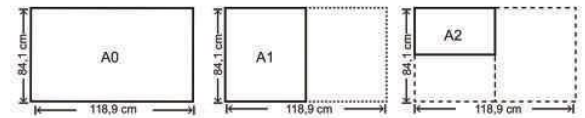
37 **Unicamp 2012** Para construir uma curva "floco de neve", divide-se um segmento de reta (Figura 1) em três partes iguais. Em seguida, o segmento central sofre uma rotação de 60º, e acrescenta-se um novo segmento de mesmo comprimento dos demais, como o que aparece tracejado na Figura 2. Nas etapas seguintes, o mesmo procedimento é aplicado a cada segmento da linha poligonal, como está ilustrado nas Figuras 3 e 4.

Se o segmento inicial mede 1 cm, o comprimento da curva obtida na sexta figura é igual a

A $\left(\frac{6!}{4!3!}\right)$ cm

B $\left(\frac{5!}{4!3!}\right)$ cm

C $\left(\frac{4}{3}\right)^5$ cm

D $\left(\frac{4}{3}\right)^6$ cm

38 **Enem PPL 2016** O padrão internacional ISO 216 define os tamanhos de papel utilizados em quase todos os países, com exceção dos EUA e Canadá. O formato-base é uma folha retangular de papel, chamada de A0, cujas dimensões são 84,1 cm × 118,9 cm. A partir de então, dobra-se a folha ao meio, sempre no lado maior, obtendo os demais formatos, conforme o número de dobraduras. Observe a figura: A1 tem o formato da folha A0 dobrada ao meio uma vez, A2 tem o formato da folha A0 dobrada ao meio duas vezes, e assim sucessivamente.

Disponível em: http://pt.wikipedia.org.
Acesso em: 4 abr. 2012 (adaptado).

Quantas folhas de tamanho A8 são obtidas a partir de uma folha A0?

A 8
B 16
C 64
D 128
E 256

39 **Unesp 2012** O artigo *Uma estrada, muitas florestas* relata parte do trabalho de reflorestamento neces sário após a construção do trecho sul do Rodoanel da cidade de São Paulo

O engenheiro agrônomo Maycon de Oliveira mostra uma das árvores, um fumo-bravo, que ele e sua equipe plantaram em novembro de 2009. Nesse tempo, a árvore cresceu - está com quase 2,5 metros -, floresceu, frutificou e lançou sementes que germinaram e formaram descendentes [ ] perto da árvore principal O fumo-bravo [ ] é uma espécie de árvore pioneira, que cresce rapidamente, fazendo sombra para as espécies de árvores de crescimento mais lento, mas de vida mais longa.

(Pesquisa FAPESP, janeiro de 2012. Adaptado.)

(w3.ufsm.br/herbarioflorestal)

Considerando que a referida árvore foi plantada em 1º de novembro de 2009 com uma altura de 1 dm e que em 31 de outubro de 2011 sua altura era de 2,5 m e admitindo ainda que suas alturas, ao final de cada ano de plantio, nesta fase de crescimento, formem uma progressão geométrica, a razão deste crescimento, no período de dois anos, foi de

A 0,5.
B $5 \times 10^{-1/2}$
C 5
D $5 \times 10^{1/2}$
E 50

FRENTE 2

40 Enem Libras 2017 Atualmente, a massa de uma mulher é 100 kg. Ela deseja diminuir, a cada mês, 3% da massa que possuía no mês anterior. Suponha que ela cumpra sua meta.

A sua massa, em quilograma, daqui a dois meses será

A 91,00.
B 94,00.
C 94,09.
D 94,33.
E 96,91.

41 Unicamp 2018 Dois anos atrás certo carro valia R$ 50.000,00 e atualmente vale R$ 32.000,00. Supondo que o valor do carro decresça a uma taxa anual constante, daqui a um ano o valor do carro será igual a

A R$ 25.600,00.
B R$ 24.400,00.
C R$ 23.000,00.
D R$ 18.000,00.

42 FGV 2017 Certo capital foi aplicado em regime de juros compostos Nos quatro primeiros meses, a taxa foi de 1% ao mês e, nos quatro meses seguintes, a taxa foi de 2% ao mês Sabendo-se que, após os oito meses de aplicação, o montante resgatado foi de R$ 65.536,00, então o capital aplicado, em reais, foi aproximadamente igual a

Dado: $65536 = 2^{16}$.

A $3{,}66^8$.
B $3{,}72^8$.
C $3{,}78^8$.
D $3{,}88^8$.
E $3{,}96^8$.

43 Unicamp 2020 Tendo em vista que *a* e *b* são números reais positivos, $a \neq b$, considere a função $f(x) = ab^x$, definida para todo número real *x*. Logo, f(2) é igual a

A $\sqrt{f(1)f(3)}$.
B $\frac{f(3)}{f(0)}$
C $f(0)f(1)$.
D $f(0)^3$

44 FGV-SP 2013 Se uma pessoa faz hoje uma aplicação financeira a juros compostos, daqui a 10 anos o montante M será o dobro do capital aplicado C.

Utilize a tabela abaixo.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
2^x	1	1,0718	1,1487	1,2311	1,3195

Qual é a taxa anual de juros?

A 6,88%
B 6,98%
C 7,08%
D 7,18%
E 7,28%

45 FGV-SP 2016 Três números formam uma progressão geométrica. A média aritmética dos dois primeiros é 6, e a do segundo com o terceiro é 18. Sendo assim, a soma dos termos dessa progressão é igual a

A 18.
B 36.
C 39.
D 42.
E 48.

46 Fuvest 2015 Dadas as sequências $a_n = n^2 + 4n + 4$, $b_n = 2^{n^2}$, $c_n = a_{n+1} - a_n$ e $d_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, definidas para valores inteiros positivos de *n*, considere as seguintes afirmações:

I. a_n é uma progressão geométrica;
II. b_n é uma progressão geométrica;
III. c_n é uma progressão aritmética;
IV. d_n é uma progressão geométrica.

São verdadeiras apenas

A I, II e III.
B I, II e IV
C I e III.
D II e IV.
E III e IV.

47 UEG 2017 A sequência numérica c_n é definida como $c_n = a_n \cdot b_n$, com $n \in \mathbb{N}$, em que a_n e b_n são progressões aritmética e geométrica, respectivamente. Sabendo-se que $a_5 = b_5 = 10$ e as razões de a_n e b_n são iguais a 3, o termo c_8 é igual a

A 100
B 520
C 1350
D 3800
E 5130

48 Mackenzie 2015 Se os números 3, A e B, nessa ordem, estão em progressão aritmética e os números 3, A   6 e B, nessa ordem, estão em progressão geométrica, então o valor de A é

A 12
B 15
C 18
D 21
E 24

49 Fuvest Os números a_1, a_2, a_3 formam uma progressão aritmética de razão *r*, de tal modo que $a_1 + 3$, $a_2 - 3$, $a_3 - 3$ estejam em progressão geométrica. Dado ainda que $a_1 > 0$ e $a_2 = 2$, conclui-se que *r* é igual a

A $3+\sqrt{3}$
B $3+\frac{\sqrt{3}}{2}$
C $3+\frac{\sqrt{3}}{4}$
D $3 \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$
E $3 \quad \sqrt{3}$

50 FGV 2011 A sequência de termos positivos (a_1, a_2, a_3,..., a_n, ...) é uma progressão geométrica de razão igual a *q*. Podemos afirmar que a sequência (log a_1, log a_2, log a_3, ..., log a_n, ...) é:

A Uma progressão aritmética de razão *q*.
B Uma progressão geométrica de razão *q*.
C Uma progressão aritmética de razão log *q*.
D Uma progressão geométrica de razão log *q*.
E Uma progressão aritmética de razão (log a_1 – log q).

51 Mackenzie 2011 O lado, a altura e a área de um triân gulo equilátero inscrito em um círculo formam, nesta ordem, uma progressão geométrica. A área do círculo é igual a

A 2π
B $3\sqrt{3}\pi$
C π
D 3π
E $\sqrt{3}\pi$

52 Fuvest Sabe-se sobre a progressão geométrica a_1, a_2, a_3, ... que $a_1 > 0$ e $a_6 = -9\sqrt{3}$. Além disso, a progressão geométrica a_1, a_5, a_9, ... tem razão igual a 9. Nessas condições, o produto $a_2 \cdot a_7$ vale

A $-27\sqrt{3}$
B $3\sqrt{3}$
C $-\sqrt{3}$
D $3\sqrt{3}$
E $27\sqrt{3}$

53 USF 2018 Considere uma progressão aritmética crescente de cinco termos, na qual o produto do primeiro com o quinto termo é 45, e a soma dos outros três termos é 27. Dado que o segundo e quarto termos dessa progressão aritmética são, respectivamente, o primeiro e o segundo termos de uma progressão geométrica, é possível afirmar, corretamente, que o décimo termo da progressão geométrica assim definida vale

A 12288.
B 30.
C 6144.
D 60
E 3072.

54 Uece 2017 O produto dos termos da progressão geométrica cujo primeiro termo, a razão e o último termo são respectivamente iguais a –1, –2 e 32 é igual a

A 32768
B 1024.
C –64328
D –6432.

55 UEL 2018 Em uma população totalmente suscetível a uma doença infecciosa, o número de novas infecções C(n), no instante de tempo *n*, cresce em progressão geométrica de razão $q > 0$. Isto é, $C(n) = c_0 \cdot q^n$, onde *n* é expresso em uma certa unidade de medida e C_0 é a quantidade de infectados no instante inicial $n = 0$. A seguir, é apresentada uma tabela com exemplos.

Doença	*q*	Unidade de medida
Sarampo	15	4
Difteria	6	4
SARS	5	10
Influenza (cepa pandêmica de 1918)	3	7
Ebola (surto de 2014)	2	2

(Adaptado de: <https://en.wikipedia.org/wiki/Basic_reproduction_number>. Acesso em: 25 maio 2017.)

Suponha que uma cidade totalmente suscetível, na Europa medieval, tenha sido tomada pela Peste Negra, que se iniciou com $C_0 = 15$ infectados
Considerando que, em 8 dias, a soma de infectados desde o início da infestação totalizou 195 pessoas e que a unidade de medida seja de 4 dias, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a razão *q*

A 2
B 3
C 5
D 6
E 10

56 ESPM-SP 2017 Na progressão geométrica (1, 2, 4, 8, ...), sendo a_n o n-ésimo termo e S_n a soma dos *n* primeiros termos, podemos concluir que:

A $S_n = 2 \cdot a_n$
B $S_n = a_n + 1$
C $S_n = a_{n+1} + 1$
D $S_n = a_{n+1} - 1$
E $S_n = 2 \cdot a_{n+1}$

57 Fuvest 2020 O *Floco de Neve de Kock* (ou *Estrela de Koch*) é uma construção geométrica recursiva cujos primeiros passos se desenvolvem da seguinte forma:

Passo 0: começa se com um triângulo equilátero de lados de medida 1.	
Passo 1: divide-se cada lado do triângulo do Passo 0 em 3 segmentos iguais e constrói-se um triângulo equilátero com base em cada segmento do meio.	
Passo 3: repete-se o procedimento descrito no Passo 1 em cada lado da figura obtida no passo anterior.	

Os passos seguintes (Passo 3, Passo 4, Passo 5, ...) seguem o mesmo procedimento descrito no Passo 1, em cada lado da figura obtida no passo anterior. Considerando os passos descritos e os próximos passos, responda:

a) Qual é o número de lados da figura no Passo 3?
b) Qual é o perímetro da figura no Passo 5?
c) A partir de qual Passo o número de lados da figura supera 6000000000000 (seis trilhões)?

Note e adote: $\log_{10} 2 \cong 0{,}301$.

58 EBMSP 2016 (Adapt.)

A figura ilustra a árvore genealógica de uma pessoa composta pelos pais, quatro avós, oito bisavós e assim por diante. Considerando-se 15 gerações de antepassados, pode-se estimar o número de ancestrais dessa pessoa em, aproximadamente,

A 2^{10}.
B 15^3.
C $2 \cdot 15^3$.
D $15 \cdot 2^{10}$.
E 2^{16}.

59 PUC-PR 2017 Leia o texto a seguir.

A lenda do jogo de xadrez

A lenda conta que um rei hindu teve o conhecimento de um jogo que é composto de 32 peças, no qual o objeti vo é capturar a peça mais importante, o rei do adversário, através de um sábio brâmane, chamado Sessa, que queria lhe tirar da depressão que o abatera depois da morte de seu filho Após algumas partidas jogadas, a satisfação do rei foi tamanha que deu o direito ao brâmane de escolher o que ele quisesse no reino como premiação Sessa fez en tão um pedido inusitado: um tabuleiro com grãos de trigo que, na primeira casa tivesse um grão, na segunda, dois, na terceira, quatro, dobrando sempre até a casa de núme ro 64 e somando todos os valores encontrados ao final O rei mandou então os algebristas de seu reino fazerem os cálculos

A respeito dessa situação, julgue os itens a seguir

I A sequência proposta por Sessa: 1 grão na primei ra casa, na segunda dois, na terceira quatro etc É uma progressão aritmética de razão 2

II. A sequência proposta por Sessa: 1 grão na primeira casa, na segunda dois, na terceira quatro etc. É uma progressão geométrica de razão 2.

III. A soma dos termos da progressão vale 2^{64}.

IV A soma dos termos da progressão vale 2 080

Assinale a alternativa **CORRETA**.

A Somente I é correta.
B Somente III é correta.
C Somente IV é correta.
D Somente II é correta.
E Todas estão corretas.

60 ESPM-SP 2019 (Adapt.) Seja $S = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ uma sequência de números naturais em que:

$a_1 = 1$

$a_2 = 1$

$$a_n = \begin{cases} a_{n-2} + a_{n-1}, \text{ se } a_{n-2} = a_{n-1} \\ \text{maior entre } \{a_{n-2}, a_{n-1}\}, \text{ se } a_{n-2} \neq a_{n-1} \end{cases}, \text{ para } n > 2.$$

A soma dos 50 primeiros termos dessa sequência é igual a:

A $2^{26} - 2$
B $2^{51} - 2$
C $2^{100} - 2$
D $2^{50} - 1$
E 2^{50}

61 Udesc 2019 O objetivo de um concurso era criar o ser vivo matemático mais curioso. O vencedor, batizado por seus criadores de *Punctorum Grande*, possuía as seguintes características: no seu nascimento ele era composto apenas por um ponto, e após 40 minutos duas hastes saíam deste ponto com um novo ponto em cada extremidade. Após mais 40 minutos, outras duas hastes, com um novo ponto em cada, saíam de cada um dos pontos existentes e assim sucessivamente a cada 40 minutos.

O número de pontos que esse ser vivo tinha após cinco horas e vinte minutos do seu nascimento, era:

A 6561
B 255
C 2187
D 4347
E 64

62 IFBA 2018 Numa avaliação com 100 questões, a pontuação de cada questão foi atribuída de acordo com uma progressão geométrica de razão 2 da seguinte forma: a primeira questão valia 1 ponto, a segunda questão valia 2 pontos, a terceira questão valia 4, a quarta questão valia 8 pontos e assim por diante. A nota máxima com a qual um aluno pode ficar é o somatório dos pontos de todas as questões. Uma pessoa, ao fazer esta avaliação, verificou que acertou todas as questões de numeração múltiplos de três maiores que 20 e menores que 40 e também acertou as questões de numeração múltiplos de cinco maiores que 31 e menores que 51. Que pontuação este estudante fez na prova?

A $\dfrac{2^{34}(2^{20}-1)}{2^5 \quad 1}$

B $\dfrac{2^{20}(2^{21}-1)}{2^3-1}$

C $\dfrac{2^{20}(2^{21}-1)}{2^3} + \dfrac{2^{34}(2^{20}-1)}{2^5}$

D $\dfrac{2^{20}(2^{21} \quad 1)}{2^3-1} + \dfrac{2^{34}(2^{20} \quad 1)}{2^5-1}$

E $\dfrac{2^{20}(2^{21} \quad 1)}{2^3 \quad 1} - \dfrac{2^{34}(2^{20} \quad 1)}{2^5 \quad 1}$

63 Unesp 2011 Após o nascimento do filho, o pai comprometeu-se a depositar mensalmente, em uma caderneta de poupança, os valores de R$ 1,00, R$ 2,00, R$ 4,00 e assim sucessivamente, até o mês em que o valor do depósito atingisse R$ 2.048,00. No mês seguinte o pai recomeçaria os depósitos como de início e assim o faria até o 21º aniversário do filho. Não tendo ocorrido falha de depósito ao longo do período, e sabendo-se que $2^{10} = 1024$, o montante total dos depósitos, em reais, feitos em caderneta de poupança foi de

A 42.947,50.
B 49.142,00.
C 57.330,00.
D 85.995,00.
E 114.660,00.

64 Unioeste 2018 (Adapt.) A Figura 1 apresenta uma sequência de figuras de bonecos com corpo e pernas no formato retangular e cabeça circular. As dimensões do primeiro boneco são apresentadas na Figura 2 (Na Figura 2, *r* é o raio do círculo). Sabe-se que cada uma das medidas do n-ésimo boneco é igual à metade da medida correspondente do (n – 1)-ésimo boneco.

Figura 1

Figura 2

Assim, se A_1 é a área do primeiro boneco, então é CORRETO afirmar que a soma das áreas dos 30 primeiros bonecos é

A $\frac{A_1}{3}\left(\frac{4^{30}\ \ 1}{4^{29}}\right)$.
B $A_1\left(\frac{4^{30}\ \ 1}{4^{29}}\right)$.
C $\frac{A_1}{4}\left(\frac{2^{30}\ \ 1}{2^{29}}\right)$.
D $\frac{A_1}{2}\left(\frac{4^{30}\ \ 1}{4^{29}}\right)$.
E $A_1\left(\frac{2^{30}\ \ 1}{2^{29}}\right)$.

65 **UFSM 2011** A natureza tem sua própria maneira de manter o equilíbrio. Se uma comunidade fica grande demais, é, muitas vezes, reduzida por falta de comida, por predadores, seca, doença ou incêndios.
Uma certa reserva florestal sofreu um incêndio. Na primeira hora, teve 1 km^2 de sua área queimado e, a cada hora subsequente, foi destruído pelo fogo o triplo da área em relação à hora anterior. Supondo que esse processo se mantenha, quantos km^2 da reserva serão queimados decorridas *k* horas do início do incêndio?

A $\frac{3^k - 1}{2}$
B 3^k.
C 3^{k-1}
D $\frac{3^k}{2}$.
E $\frac{3^{k+1} - 1}{2}$

66 **Unesp** Desejo ter, para minha aposentadoria, 1 milhão de reais. Para isso, faço uma aplicação financeira, que rende 1% de juros ao mês, já descontados o imposto de renda e as taxas bancárias recorrentes
Se desejo me aposentar após 30 anos com aplicações mensais fixas e ininterruptas nesse investimento, o valor aproximado, em reais, que devo disponibilizar mensalmente é:
Dado: $1{,}01^{361} \cong 36$

A 290,00.
B 286,00.
C 282,00.
D 278,00.
E 274,00.

67 **FGV-SP 2012** As raízes da equação $\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \frac{9}{8}$ têm soma igual a:

A –3
B –2
C –1
D 0
E 1

68 **Ibmec-RJ 2010** Sendo *x* e *y* números reais positivos, é correto afirmar que

$$\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{x\sqrt{y\ldots\ldots}}}}$$

é igual a:

A $x^{1/3}y^{2/3}$
B $x^{2/3}y^{1/3}$
C $x^{2/3}y^{2/3}$
D $x^{1/4}y^{1/4}$
E $x^{1/4}y^{2/3}$

69 **Unemat** Lança-se uma bola, verticalmente de cima para baixo, da altura de 4 metros. Após cada choque com o solo, ela recupera apenas $\frac{1}{2}$ da altura anterior.
A soma de todos os deslocamentos (medidos verticalmente) efetuados pela bola até o momento de repouso é:

A 12 m
B 6 m
C 8 m
D 4 m
E 16 m

70 **Unesp 2013** Uma partícula em movimento descreve sua trajetória sobre semicircunferências traçadas a partir de um ponto P_0, localizado em uma reta horizontal *r*, com deslocamento sempre no sentido horário. A figura mostra a trajetória da partícula, até o ponto P_3, em *r*. Na figura, O, O_1 e O_2 são os centros das três primeiras semicircunferências traçadas e R, $\frac{R}{2}$, $\frac{R}{4}$ seus respectivos raios.

A trajetória resultante do movimento da partícula será obtida repetindo-se esse comportamento indefinidamente, sendo o centro e o raio da n-ésima semicircunferência dados por O_n e $R_n = \frac{R}{2^n}$, respectivamente, até o ponto P_n, também em *r*. Nessas condições, o comprimento da trajetória descrita pela partícula, em função do raio R, quando *n* tender ao infinito, será igual a

A $2^2 \cdot \pi \cdot R$.
B $2^3 \cdot \pi \cdot R$.
C $2^n \cdot \pi \cdot R$.
D $\left(\frac{7}{4}\right) \cdot \pi \cdot R$.
E $2 \cdot \pi \cdot R$.

71 **FGV-SP** Um círculo é inscrito em um quadrado de lado *m*. Em seguida, um novo quadrado é inscrito nesse círculo, e um novo círculo é inscrito nesse quadrado, e assim sucessivamente. A soma das áreas dos infinitos círculos descritos nesse processo é igual a

A $\frac{\pi m^2}{2}$.
B $\frac{3\pi m^2}{8}$.
C $\frac{\pi m^2}{3}$.
D $\frac{\pi m^2}{4}$.
E $\frac{\pi m^2}{8}$.

72 ESPM-SP 2017 A figura abaixo representa parte do gráfico da função $f(x) = \frac{16}{2^x}$, fora de escala.

A soma das áreas dos infinitos retângulos assinalados é igual a:

A 16 B 8 C 24 D 32 E 12

73 Uefs 2016

Se infinitos quadrados, cujas áreas formam uma progressão geométrica decrescente de razão *q*, pudessem ser empilhados, como na figura, e o quadrado da base tivesse uma área de 1 m^2, a altura da pilha, em m, seria

A $\frac{1}{1-q}$

B $\frac{1 \quad q}{1 \quad \sqrt{q}}$

C $\frac{1-\sqrt{q}}{1-q}$

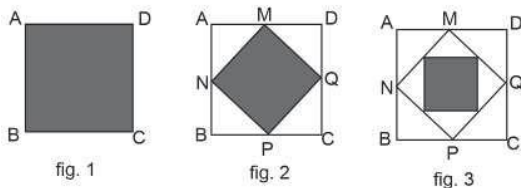
D $\frac{1+\sqrt{q}}{1-q}$

E infinita

74 IFSP 2011 Observe a sequência de figuras

fig. 1

fig. 2

fig. 3

ABCD é um quadrado, cujo lado mede *x* cm. Ligando os pontos médios dos lados desse quadrado, obtém-se o quadrado MNPQ. Realizando esse procedimento indefinidamente, a soma das áreas de todos os quadrados sombreados dessa sequência é igual a $64\sqrt{2}$ cm^2. A área do quadrado sombreado da décima figura dessa sequência, em centímetros quadrados, é igual a

A $\frac{\sqrt{2}}{16}$. B $\frac{\sqrt{2}}{4}$. C $\sqrt{2}$. D $4\sqrt{2}$. E $8\sqrt{2}$.

75 Uece 2017 Para $x \neq 0$, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$, a soma infinita $1 + tgx + tg^2x + tg^3x + \quad +$ é igual a

A $\frac{senx}{cosx \quad senx}$

B $\frac{cosx}{cosx + senx}$.

C $\frac{senx}{cosx + senx}$

D $\frac{cosx}{cosx - senx}$.

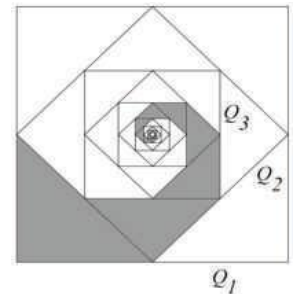
76 Uece 2019 Considerando a progressão geométrica $(x_n)_{n = 1, 2, 3, ...}$, cujo primeiro termo é igual a sen(t) e a razão igual a cos^2(t), sendo $0 < t < \frac{\pi}{2}$, é correto afirmar que a soma (infinita) de todos os termos dessa pro gressão é igual a

A cossec(t).

B sen (t).

C tg(t).

D cotg(t).

77 UFRGS 2017 Na figura a seguir, encontram-se representados quadrados de maneira que o maior quadrado (Q_1) tem lado 1 O quadrado Q_2 está construído com vértices nos pontos médios dos lados de Q_1; o quadrado Q_3 está construído com vértices nos pontos médios dos lados de Q_2 e, assim, sucessiva e infinitamente.

A soma das áreas da sequência infinita de triângulos sombreados na figura é

A $\frac{1}{2}$. B $\frac{1}{4}$. C $\frac{1}{8}$. D $\frac{1}{16}$. E $\frac{1}{32}$.

78 UFF Com o objetivo de criticar os processos infini tos, utilizados em demonstrações matemáticas de sua época, o filósofo Zenão de Eleia (século V a.C.) propôs o paradoxo de Aquiles e a tartaruga, um dos paradoxos mais famosos do mundo matemático.

Fonte: http://culturaclassica.blogspot.com/2008/05/aquiles-ainda-corre-os-paradoxos-de.html

Existem vários enunciados do paradoxo de Zenão O escritor argentino Jorge Luis Borges o apresenta da seguinte maneira:

Aquiles, símbolo de rapidez, tem de alcançar a tartaruga, símbolo de morosidade. Aquiles corre dez vezes mais rápido que a tartaruga e lhe dá dez metros de vantagem. Aquiles corre esses dez metros, a tartaruga corre um; Aquiles corre esse metro, a tartaruga corre um decímetro; Aquiles corre esse decímetro, a tartaruga corre um centímetro; Aquiles corre esse centímetro, a tartaruga um milímetro; Aquiles corre esse milímetro, a tartaruga um décimo de milímetro, e assim infinitamente, de modo que Aquiles pode correr para sempre, sem alcançá-la.

Fazendo a conversão para metros, a distância percor rida por Aquiles nessa fábula é igual a

$$d = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + ... = 10 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n.$$

É correto afirmar que:

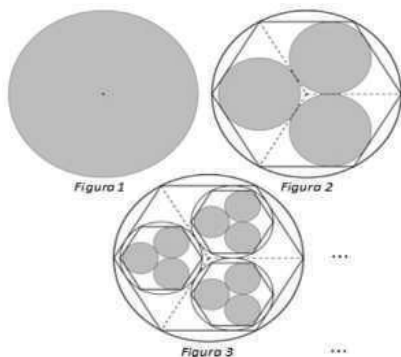
A $d = +\infty$

B $d = 11,11$

C $d = \frac{91}{9}$

D $d = 12$

E $d = \frac{100}{9}$

79 **PUC-PR 2018** Considere, a seguir, os esboços das três primeiras figuras de uma sequência com infinitas construções geométricas.

O círculo da Figura 1 tem 7 dm^2 de área. Cada um dos três círculos destacados na Figura 2 está inscri to em um dos losangos congruentes que compõem o hexágono regular que, por sua vez, é circunscrito por um círculo equivalente ao da figura anterior. A partir desses três círculos destacados na Figura 2, e exatamente da mesma forma com que foram cons truídos, foram obtidos os círculos em destaque na Figura 3.

Seguindo indefinidamente com esse padrão de construção, o limite da soma de todas as áreas som-breadas nas infinitas figuras dessa sequência será, em decímetros quadrados, igual a

A 13,15.

B 14.

C 16.

D 14π.

E 21π.

80 **PUC-PR 2017** Determine o valor de E sendo $E = \sum_{0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n}$.

A 5

B 5,5

C 6,0

D 6,5

E 7

Texto complementar

O Princípio da Indução

Elon Lages Lima

Introdução

O Princípio da Indução é um eficiente instrumento para a demonstração de fatos referentes aos números naturais. Por isso deve-se adquirir prática em sua utilização. Por outro lado, é importante também conhecer seu significado e sua posição dentro do arcabouço da Matemática. Entender o Princípio da Indução é praticamente o mesmo que entender os números naturais ( )

O Princípio da Indução diz o seguinte:

Princípio da Indução: Seja *P* uma propriedade referente a números naturais. Se 1 goza de *P* e se, além disso, o fato de o número natural *n* gozar de *P* implica que seu sucessor *s(n)* também goza, então todos os números naturais gozam da propriedade *P*.

Para ver que o Princípio da Indução é verdadeiro (uma vez admitidos os *axiomas de Peano*) basta observar que, dada a propriedade *P* cumprindo as condições estipuladas no enunciado do Princípio, o conjunto *X* dos números na turais que gozam da propriedade *P* contém o número 1 e é indutivo. Logo $X = \mathbb{N}$, isto é, todo número natural goza da propriedade *P*. As propriedades básicas dos números naturais são *P* por indução. (...)

Nas demonstrações por indução, a hipótese de que a propriedade *P* é válida para o número natural *n* (da qual deve decorrer que *P* vale também para *s(n)*) chama-se hipótese de indução. (...)

Teorema: (Princípio da Indução Generalizado.) Seja *P* uma propriedade referente a números naturais, cumprindo as seguintes condições:

(1) O número natural a goza da propriedade *P*;

(2) Se um número natural *n* goza da propriedade *P* então seu sucessor $n + 1$ também goza de *P*.

Então todos os números naturais maiores do que ou iguais a *a* gozam da propriedade *P*.

Exemplo 2. Vejamos uma situação simples onde se emprega o Princípio da Indução Generalizado. Trata-se de provar que $2n + 1 < 2^n$, para todo $n \geq 3$. Esta afirmação, (que é falsa para $n = 1$ ou $n = 2$), vale quando $n = 3$. Supondo-a válida para um certo $n \geq 3$, mostremos que daí decorre sua validez para $n + 1$. Com efeito, $2(n+1)+1 = (2n+1)+2 < 2^n + 2 < 2^{n} + 2^n = 2^{n+1}$. (Na primeira desigualdade, usamos a hipótese de indução.)

Exemplo 3. Usando a desigualdade $2n + 1 < 2^n$, que acabamos de provar para $n \geq 3$, podemos demonstrar que $n^2 < 2^n$ para todo $n \geq 5$, empregando nova-mente o Princípio da Indução Generalizado. Com efeito, vale $5^2 < 2^5$ pois $25 < 32$. Supondo válida a desigualdade $n^2 < 2^n$ para um certo valor de $n \geq 5$, daí segue-se que $(n + 1)^2 = n^2 + + 2n + 1 < 2^n + 2n + 1$ (pela hipótese de indução) $< 2^n + 2^n$ (pelo exemplo anterior) $= 2^{n+1}$. Portanto $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$. Pelo Princípio de Indução Generalizado, segue-se que *P(n)* vale para todo $n \geq 5$. Evidentemente, a desigualdade $n^2 < 2^n$ é falsa para $n = 1, 2, 3, 4$.

( )

Segundo Princípio da Indução

Em algumas situações, ao tentarmos fazer uma demons-tração por indução, na passagem de *n* para $n + 1$, sentimos necessidade de admitir que a proposição valha não apenas para *n* e sim para todos os números naturais menores do que ou iguais a *n* A justificativa de um raciocínio desse tipo se encontra no

Teorema 9: (Segundo Princípio da Indução.) Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto com a seguinte propriedade:

(I) Dado $n \in \mathbb{N}$, se todos os números naturais menores do que *n* pertencem a *X*, então $n \in X$.

O segundo Princípio da Indução afirma que um conjun-to $X \subset \mathbb{N}$ com a propriedade (I) coincide com $\mathbb{N}$

Demonstração: Com efeito, supondo, por absurdo, que $X \neq \mathbb{N}$, isto é, que $\mathbb{N} \quad X \neq \varnothing$, seja n o menor elemento do conjunto $\mathbb{N} - X$, ou seja, o menor número natural que não pertence a X. Isto quer dizer que todos os números naturais menores do que n pertencem a X. Mas então, pela propriedade (I), n pertence a X, uma contradição. Segue-se que $\mathbb{N} - X = \varnothing$ e $X = \mathbb{N}$.

Obs.: Se um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ goza da propriedade (I), para que um número natural n não pertencesse a X seria necessário que existisse algum número natural $r < n$ tal que $r \notin X$. Em particular, se $n = 1$, como não existe número natural menor do que 1, a hipótese $1 \notin X$ não pode ser cumprida Noutras palavras, (I) já contém implicitamente a afirmação de que $1 \in X$. Assim, ao utilizar o Segundo Princípio da Indução, não é preciso estipular que X contém o número 1.

Toda propriedade P que se refira a números naturais define um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$, a saber, o conjunto dos números naturais que gozam da propriedade P. (E reciprocamente, todo conjunto $X \subset \mathbb{N}$ define uma propriedade referente a números naturais, a saber, a propriedade de pertencer a X.) Deste modo, "propriedade" e "conjunto" são noções equivalentes. Por isso, é natural que o Segundo Princípio da Indução possua a formulação seguinte, onde ele aparece como o

Teorema 10: (Segundo método de demonstração por indução.) Seja P uma propriedade referente a números naturais. Dado $n \in \mathbb{N}$, se a validade de P para todo número natural menor do que n implicar que P é verdadeira para n, então P é verdadeira para todos os números naturais.

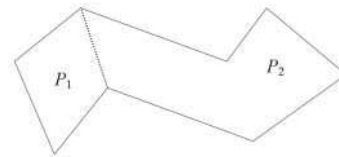
Demonstração: Com efeito, nas condições do enunciado, o conjunto X dos números naturais que gozam da propriedade P satisfaz a condição (I) do Segundo Princípio da Indução, logo $X = \mathbb{N}$ e P vale para todos os números naturais

Aplicaremos agora o Segundo Princípio da Indução para demonstrar um fato geométrico. No exemplo a seguir, usamos os números naturais como instrumento de contagem, isto é, como números cardinais, pois empregamos expressões do tipo um polígono de n lados". (...)

Sabe-se que, traçando diagonais internas que não se cortam, pode-se decompor qualquer polígono em triângulos justapostos Isto é evidente quando o polígono é convexo: basta fixar um vértice e traçar as diagonais a partir dele. Se o polígono não é convexo, a prova requer mais cuidados. (...)

O leitor pode experimentar com um polígono não-convexo e verificar que há muitas maneiras diferentes de decompô-lo em triângulos justapostos mediante diagonais internas. Mas vale o resultado seguinte, no qual usaremos o Segundo Princípio da Indução.

Exemplo 4. Qualquer que seja a maneira de decompor um polígono P, de n lados, em triângulos justapostos por meio de diagonais internas que não se intersectam, o número de diagonais utilizadas é sempre $n \quad 3$.

Com efeito, dado n, suponhamos que a proposição acima seja verdadeira para todo polígono com menos de n lados. Seja então dada uma decomposição do polígono P, de n lados, em triângulos justapostos, mediante diagonais internas. Fixemos uma dessas diagonais. Ela decompõe P como reunião de dois polígonos justapostos P_1, de n_1 lados, e P_2, de n_2 lados, onde $n_1 < n$ e $n_2 < n$, logo a proposição vale para os polígonos P_1 e P_2. Evidentemente, $n_1 + n_2 = n + 2$.

As d diagonais que efetuam a decomposição de P se agrupam assim: $n_1 - 3$ delas decompõem P_1, $n_2 - 3$ decompõem P_2 e uma foi usada para separar P_1 de P_2. Portanto $d = n_1 - 3 + n_2 - 3 + 1 = n_1 + n_2 - 5$. Como $n_1 + n_2 = n + 2$, resulta que $d = n - 3$. Isto completa a demonstração. (...)

O texto corresponde a trechos do artigo O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO, do professor Elon Lages Lima, extraído da revista *Eureka* nº 3

Disponível em: https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka3.pdf. Acesso em 22 abr. 2020.

Resumindo

Progressão aritmética (PA)

Definição: $a_{n+1} = a_n + r$, com $n \in \mathbb{N}^*$

Termo geral:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \begin{cases} a_n - \text{termo qualquer} \\ a_1 - \text{primeiro termo} \\ r - \text{razão} \\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Propriedades:

1. Representações especiais

PA de 3 termos: $(x \quad r, x, x \quad r)$

PA de 5 termos: $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$

PA de 4 termos: $(x - 3s, x - s, x + s, x + 3s)$, onde $2s = r$

2. Se (a, b, c) é uma PA, então $b = \dfrac{a+c}{2}$.

3. Em uma PA finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, a soma de termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos, ou seja, $a_{1+k} + a_{n-k} = a_1 + a_n$.

Soma dos n primeiros termos: $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

Progressão Geométrica (PG)

Definição: $a_{n+1} = a_n \cdot q$, com $n \in \mathbb{N}^*$

Termo geral: $a_n = a_1 \cdot q^{n \quad 1} \begin{cases} a_n - \text{termo qualquer} \\ a_1 - \text{primeiro termo} \\ q \quad \text{razão} \\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Propriedades:

1. Representações especiais

PG de 3 termos: $\left(\dfrac{x}{q}, x, x \cdot q\right)$

PG de 5 termos: $\left(\dfrac{x}{q^2}, \dfrac{x}{q}, x, x \cdot q, x \cdot q^2\right)$

PG de 4 termos: $\left(\dfrac{x}{a^3}, \dfrac{x}{a}, x \quad a, x \quad a^3\right)$, onde $a^2 = q$

2. Se (a, b, c) é uma PG, então $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} \Leftrightarrow b^2 = a \cdot c$.

3. Em uma PG finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, o produto de termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos, ou seja, $a_{1+k} \cdot a_{n \quad k} = a_1 \cdot a_n$.

Produto dos n primeiros termos: $(P_n)^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$ ou $P_n = a_1^{\,n} \cdot q^{\frac{n(n \quad 1)}{2}}$

Soma dos n primeiros termos: $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q \quad 1}$

Soma dos termos de uma PG infinita (convergente): $S_\infty = \dfrac{a_1}{1 \quad q}$, com $|q| < 1$

Quer saber mais?

Sites

- Conheça um dos quebra-cabeças matemáticos mais famosos do mundo no artigo da revista *Eureka* nº 11, p. 17, *A Torre de Hanói*, de Carlos Yuzo Shine.
  Disponível em: <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka11.pdf>.
- Aprofunde seus conhecimentos com o artigo *Séries formais*, de Eduardo Tengan, na revista *Eureka*, nº 11, p 34.
  Disponível em: <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka11.pdf>.
- Leia sobre recorrência no artigo da revista *Eureka* nº 9, página 33, *Equações de Recorrência* de Hector Soza Pollman da Universidade Católica do Norte, Antofagasta, Chile.
  Disponível em: <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka9.pdf>.

Exercícios complementares

1 PUC-RS 2017 A distribuição de pontos em cada uma das figuras abaixo segue um padrão de construção.

Figura 1

Figura 2

Figura 3

Seguindo esse mesmo padrão, a soma dos pontos distribuídos em todas as figuras até a Figura 30 será igual a

A 61
B 183
C 210
D 930
E 960

2 Esc. Naval 2014 O quinto termo da progressão aritméti ca $3 \quad x; \quad x; \sqrt{9 \quad x}; \ldots, x \in \mathbb{R}$ é

A 7
B 10
C -2
D $-\sqrt{14}$
E -18

3 UPF 2017 A quantidade de números inteiros situados entre 1 e 48000 inclusive que não são divisíveis por 2, nem por 3, nem por 5, é igual a

A 4800
B 9600
C 12800
D 16000
E 18200

4 EPCar 2018 Constrói se um monumento em formato de pirâmide utilizando se blocos cúbicos:

Para a formação piramidal os blocos são dispostos em uma sequência de camadas, sendo que na última camada, no topo da pirâmide, haverá um único bloco, como mostra a figura a seguir.

Na disposição total, foram utilizados 378 blocos, do topo à base da pirâmide.
Havendo necessidade de acrescentar uma nova camada de blocos abaixo da base da pirâmide, obedecendo à sequência já estabelecida, serão gastos x blocos nesta camada.
A quantidade total de divisores positivos do número x é igual a

A 2
B 3
C 4
D 5

5 Uece 2019 Considerando a progressão aritmética (x_n), cujo primeiro termo x_1 é igual a $\frac{\pi}{4}$ e a razão é igual a $\frac{\pi}{2}$, pode-se definir, para cada inteiro positivo n, a soma $S_n = \text{sen}(x_1) + \text{sen}(x_2) + \text{sen}(x_3) + \ldots + \text{sen}(x_n)$.
Nessas condições, S_{2019} é igual a

A $\frac{\sqrt{2}}{2}$
B $\sqrt{2}$
C 0
D $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

6 **Unicamp** Considere o conjunto $S = \{n \in \mathbb{N}: 20 \leq n \leq 500\}$.

a) Quantos elementos de S são múltiplos de 3 e de 7?

b) Escolhendo-se ao acaso um elemento de S, qual a probabilidade de o mesmo ser um múltiplo de 3 ou de 7?

7 **Unicamp 2017** Sabendo que a e b são números reais, considere o polinômio cúbico $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$.

a) Mostre que, se *r* é uma raiz de p(x), então $\frac{1}{r}$ é uma raiz do polinômio $q(x) = x^3 + bx^2 + ax + 1$.

b) Determine os valores de *a* e *b* para os quais a sequência [p(–1), p(0), p(1)] é uma progressão aritmética (PA), cuja razão é igual a p(2).

8 **EsPCEx 2016** João e Maria iniciam juntos uma corrida, partindo de um mesmo ponto. João corre uniformemente 8 km por hora e Maria corre 6 km na primeira hora e acelera o passo de modo a correr mais $\frac{1}{2}$ km cada hora que se segue. Assinale a alternativa correspondente ao número de horas corridas para que Maria alcance João.

A 3 **B** 5 **C** 9 **D** 10 **E** 11

9 **FGV-RJ 2016** A famosa "pane dos seis minutos", ocorrida no jogo Alemanha 7 × 1 Brasil, é descrita a seguir:

O segundo gol foi aos 23 minutos, o terceiro aos 24 minutos, o quarto aos 26 minutos e o quinto aos 29 minutos.

Se essa pane tivesse se estendido até o final da partida (90 minutos no total) mantendo o padrão observado de aumentar sempre um minuto, a partir do segundo gol, nos intervalos entre gols consecutivos, o número de gols que a Alemanha teria marcado no Brasil seria igual a

A 13 **B** 25 **C** 7 **D** 11 **E** 45

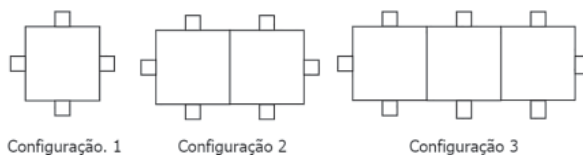
10 **FGV-SP 2017** Na tabela de 8 colunas e infinitas linhas numeradas, indicada na figura, podemos formar infinitos quadrados coloridos 3 × 3, como mostra um exemplo.

LINHAS	COLUNAS							
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	9	10	11	12	13	14	15	16
3	17	18	19	20	21	22	23	24
4	25	26	27	28	29	30	31	32
5	33	34	35	36	37	38	39	40
6	41	42	43	44	45	46	47	48
7	49	50	51	52	53	54	55	56
8	57	58	59	60	61	62	63	64
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Nessa tabela, o quadrado colorido 3 × 3 cuja soma dos 9 elementos é igual a 4806 ocupa três linhas, sendo uma delas a linha

A 71.
B 67.
C 53.
D 49.
E 41

11 **CP2** Observe, na figura a seguir, o número de mesas e o número máximo de lugares disponíveis em cada configuração.

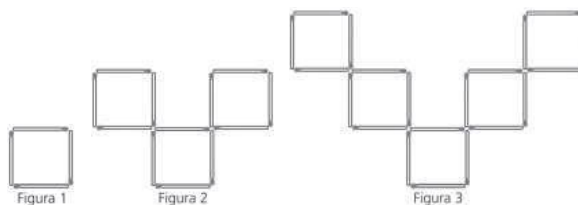
Configuração. 1 Configuração 2 Configuração 3

Considere que a sequência de configurações continue, segundo o padrão apresentado.

a) Complete a tabela a seguir.

Configuração	Número de mesas	Número de lugares
1		
2		
3		
4		
5		
n		

b) Quantos lugares, no máximo, estarão disponíveis em uma configuração com 100 mesas?

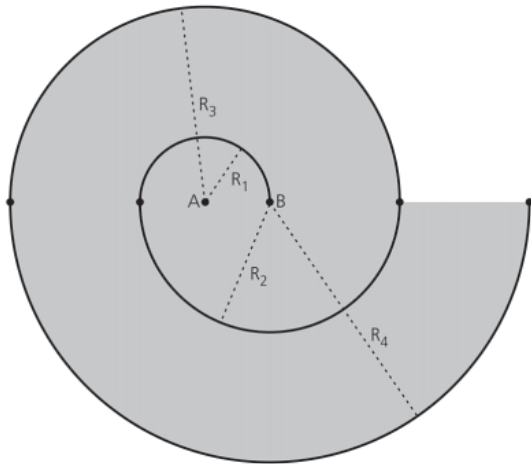
12 **Unicamp** Considere a sucessão de figuras apresentada a seguir Observe que cada figura é formada por um conjunto de palitos de fósforo.

Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) Suponha que essas figuras representam os três primeiros termos de uma sucessão de figuras que seguem a mesma lei de formação Suponha também que F_1, F_2 e F_3 indiquem, respectivamente, o número de palitos usados para produzir as figuras 1, 2 e 3, e que o número de fósforos utilizados para formar a figura *n* seja F_n. Calcule F_{10} e escreva a expressão geral de F_n.

b) Determine o número de fósforos necessários para que seja possível exibir concomitantemente todas as primeiras 50 figuras.

13 **IFCE 2016** O valor da soma $1+1^2+2+2^2+3+3^2+ \ldots +$ $+ 50 + 50^2$ é

A 44200.
B 40200.
C 42440
D 44020.
E 42040

14 **Unicamp 2012** Uma curva em formato espiral, composta por arcos de circunferência, pode ser construída a partir de dois pontos A e B, que se alternam como centros dos arcos. Esses arcos, por sua vez, são semicircunferências que concordam sequencialmente nos pontos de transição, como ilustra a figura a seguir, na qual supomos que a distância entre A e B mede 1 cm.

a) Determine a área da região destacada na figura.
b) Determine o comprimento da curva composta pelos primeiros 20 arcos de circunferência.

15 **Fuvest** Em uma progressão aritmética $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ a soma dos *n* primeiros termos é dada por $S_n = bn^2 + n$, sendo *b* um número real. Sabendo-se que $a_3 = 7$, determine:

a) o valor de *b* e a razão da progressão aritmética.
b) o 20º termo da progressão.
c) a soma dos 20 primeiros termos da progressão.

16 **Fuvest 2012** Considere uma progressão aritmética cujos três primeiros termos são dados por $a_1 = 1+x$, $a_2 = 6x$ e $a_3 = 2x^2 + 4$, em que *x* é um número real.

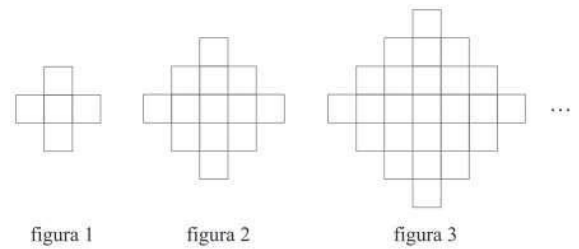
a) Determine os possíveis valores de *x*
b) Calcule a soma dos 100 primeiros termos da progressão aritmética correspondente ao menor valor de *x* encontrado no item a.

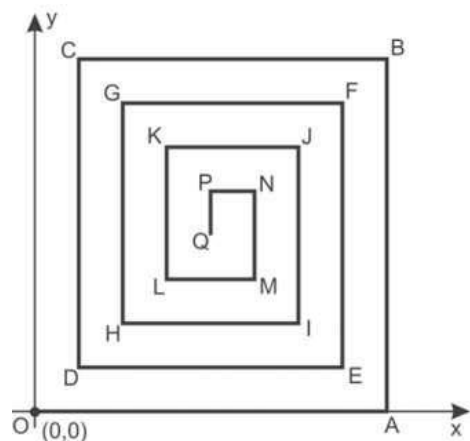
17 **Unifesp 2011** Progressão aritmética é uma sequência de números tal que a diferença entre cada um desses termos (a partir do segundo) e o seu antecessor é constante Essa diferença constante é chamada "razão da progressão aritmética" e usualmente indicada por *r*

a) Considere uma PA genérica finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ de razão *r*, na qual *n* é par. Determine a fórmula da soma dos termos de índice par dessa PA, em função de a_1, *n* e *r*.
b) Qual a quantidade mínima de termos para que a soma dos termos da PA (224, 220, 216, ...) seja positiva?

18 **UFF** A soma dos *n* primeiros termos da sequência de números reais $a_1, a_2, \quad , an, \quad$ é $\frac{n^2}{3}$, para todo inteiro positivo *n*.

a) Verifique se a sequência é uma progressão geométrica ou uma progressão aritmética ou nenhuma das duas. Justifique sua resposta
b) Calcule o milésimo termo da sequência.

19 **UFSCar** Observe o padrão de formação das figuras numeradas.

a) Sabendo-se que as figuras 1, 2 e 3 são formadas, respectivamente, por 5, 13 e 25 quadrados de área 1 cm^2, calcule a área da figura 10 da sequência indicada.
b) Seja *x* o número da figura *x*, e f(x) o número de quadrados de 1 cm^2 que compõem essa mesma figura. Em relação à função *f*, determine sua lei de formação e seus conjuntos domínio e imagem.

20 **EPCar 2019** Considere, no plano cartesiano, a figura abaixo, em que os segmentos horizontais são paralelos ao eixo $\overleftrightarrow{Ox}$ e os segmentos verticais são paralelos ao eixo $\overleftrightarrow{Oy}$

Sabe-se que:

- os comprimentos de segmentos consecutivos da poligonal, que começa na origem O(0, 0) e termina em Q, formam uma progressão aritmética decrescente de razão **r** e primeiro termo a_1, em que $\left(-\frac{1}{15} < r < 0\right)$;

- dois comprimentos consecutivos da poligonal são sempre perpendiculares;
- $\overline{OA} = a_1$, $\overline{AB} = a_2$, $\overline{BC} = a_3$, e, assim sucessivamente, até $\overline{PQ} = a_{16}$.

Suponha que uma formiga parta da origem O(0, 0), e percorra a trajetória descrita pela poligonal até chegar ao ponto Q.

Com base nas informações acima, analise as proposições abaixo.

I Se $a_1 = 1$ e $r = \frac{1}{16}$, então a distância **d** percorrida pela formiga até chegar ao ponto Q é tal que $\mathbf{d} = \frac{17}{2} a_1$.

II. Quando a formiga estiver na posição do ponto L(x, y) então $x = -6r$.

III. Se $a_1 = 1$, então de A até C, a formiga percorrerá a distância $\mathbf{d} = 2 + 3r$.

Quanto a veracidade das proposições, tem-se

A apenas uma delas é verdadeira.
B apenas duas são verdadeiras.
C todas são verdadeiras.
D nenhuma delas é verdadeira.

21 UEPG 2017 Um agricultor plantou vários limoeiros, formando uma fila, em linha reta, com 87 metros de comprimento e distando 3 metros um do outro. Ali nhado exatamente com os limoeiros, havia um galpão que será utilizado como depósito, situado a 20 metros de distância do primeiro limoeiro. Para fazer a colhei ta, o agricultor partiu do galpão e, margeando sempre os limoeiros, colheu os frutos do primeiro e levou-os, ao galpão; em seguida, colheu os frutos do segundo, levando-os para o galpão; e, assim, sucessivamente, até colher e armazenar os frutos do último limoeiro. Pelo que foi exposto e considerando que o agricultor anda 60 metros por minuto, gasta 10 minutos para colher os frutos de cada limoeiro, e mais 6 minutos para armazená los no galpão, assinale o que for correto

01 O agricultor plantou o 12º limoeiro a 56 metros do galpão
02 O agricultor, para realizar toda a tarefa de colheita e armazenamento, gastou pouco mais que 9 horas.
04 O agricultor plantou 29 pés de limão
08 Quando o agricultor fez a colheita dos frutos do 10º limoeiro, tinha passado oito vezes pelo 5º limoeiro.
16 O agricultor, ao completar a tarefa de colheita e armazenamento dos frutos de todos os limoeiros, tinha andado 3810 metros.

Soma: ▭

22 Uece 2019 Considere a soma dos números inteiros ímpares positivos agrupados do seguinte modo:

1 + (3 + 5) + (7 + 9 + 11) + (13 + 15 + 17 + 19) + + (21 + 23 + 25 + 27 + 29) + ...

O grupo de ordem *n* é formado pela soma de *n* intei ros positivos ímpares e consecutivos. Assim, pode-se afirmar corretamente que a soma dos números que compõem o décimo primeiro grupo é igual a

A 1223. B 1331. C 1113. D 1431.

23 FGV-RJ 2017 Os números naturais, a partir do 1, foram escritos em ordem e arrumados em duas colunas, A e B, como no quadro a seguir:

	A	B
Linha 1	1	2
Linha 2	3, 4	5, 6
Linha 3	7, 8, 9	10, 11, 12
Linha 4	13, 14, 15, 16	17, 18, 19, 20
Linha 5	21, 22, 23, 24, 25	26, 27, 28, 29, 30
Linha ..	–	–

Na linha *n*, o conjunto dos elementos da coluna A será representado por L_{nA}, e o da coluna B, por L_{nB}.

a) Mostre que o último elemento de L_{nA} é um quadrado perfeito.
b) Calcule a soma dos elementos de L_{10B}

24 EsPCEx 2014 Os números naturais ímpares são dispostos como mostra o quadro

1ª linha	1					
2ª linha	3	5				
3ª linha	7	9	11			
4ª linha	13	15	17	19		
5ª linha	21	23	25	27	29	
...	...	...	...	...	...	...

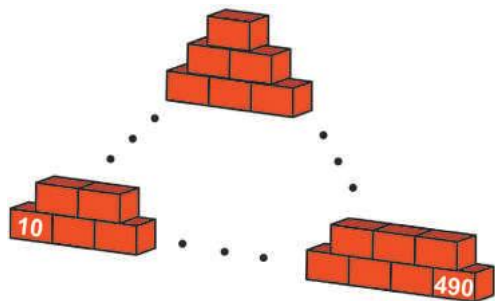
O primeiro elemento da 43ª linha, na horizontal, é:

A 807
B 1007
C 1307
D 1507
E 1807

25 Unicamp 2014 Dizemos que uma sequência de números reais não nulos $(a_1, a_2, a_3, a_4,...)$ é uma progressão harmônica se a sequência dos inversos $\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, ...\right)$ é uma progressão aritmética (PA).

a) Dada a progressão harmônica $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, ...\right)$, encontre o seu sexto termo.
b) Sejam *a*, *b* e *c* termos consecutivos de uma progressão harmônica. Verifique que $b = \frac{2ac}{a+c}$.

26 UFRJ Uma parede triangular de tijolos foi construída da seguinte forma. Na base foram dispostos 100 tijolos, na camada seguinte, 99 tijolos, e assim sucessivamente até restar 1 tijolo na última camada, como mostra a figura Os tijolos da base foram numerados de acordo com uma progressão aritmética, tendo o primeiro tijolo recebido o número 10, e o último, o número 490. Cada tijolo das camadas superiores recebeu um número

igual à média aritmética dos números dos dois tijolos que o sustentam.

Determine a soma dos números escritos nos tijolos.

27 **FGV-SP 2011** Seja (a_1, a_2, a_3, ...) uma sequência com as seguintes propriedades:

I $a_1 = 1$

II. $a_{2n} = n \cdot a_n$, para qualquer *n* inteiro positivo.

III. $a_{2n+1} = 2$, para qualquer *n* inteiro positivo.

a) Indique os 16 primeiros termos dessa sequência.

b) Calcule o valor de $a_{2^{50}}$.

28 **Unesp 2013** A sequência dos números n_1, n_2, n_3, , n_i, está definida por $\begin{cases} n_1 = 3 \\ n_{i+1} = \dfrac{n_i \quad 1}{n_i + 2} \end{cases}$, para cada inteiro positivo *i*.

Determine o valor de n_{2013}.

29 **Fuvest 2018** Considere a sequência $a_1 = 6$, $a_2 = 4$, $a_3 = 1$, $a_4 = 2$ e $a_n = a_{n-4}$, para $n \geq 5$.

Defina $S_n^k = a_n + a_{n+1} + ... + a_{n+k}$ para $k \geq 0$, isto é, S_n^k é a soma de k + 1 termos consecutivos da sequência começando do n-ésimo, por exemplo, $S_2^1 = 4 + 1 = 5$.

a) Encontre *n* e *k* tal que $S_n^k = 20$.

b) Para cada inteiro *j*, $1 \leq j \leq 12$, encontre *n* e *k* tal que $S_n^k = j$.

c) Mostre que, para qualquer inteiro *j*, $j \geq 1$, existem inteiros $n \geq 1$ e $k \geq 0$ tais que $S_n^k = j$.

30 **UFRJ** Uma pessoa pode subir uma escada da seguinte forma: a cada degrau, ou ela passa ao degrau seguinte ou galga dois degraus de uma só vez, pulando um degrau intermediário. A exceção dessa regra ocorre se a pessoa estiver no penúltimo degrau, quando ela só tem a opção de passar ao último degrau.

Seja P_n o número de modos diferentes que a pessoa tem de subir uma escada de *n* degraus, dessa maneira:

a) Calcule P_7.

b) Determine n tal que $P_n = 987$.

31 **ITA 2012** Sabe-se que (x + 2y, 3x − 5y, 8x − 2y, 11x 7y + 2z) é uma progressão aritmética com o último termo igual a −127. Então, o produto xyz é igual a

A −60.
B −30.
C 0.
D 30.
E 60.

32 **IME 2015** A soma dos termos de uma progressão aritmética é 244. O primeiro termo, a razão e o número de termos formam, nessa ordem, outra progressão aritmética de razão 1. Determine a razão da primeira progressão aritmética.

A 7
B 8
C 9
D 10
E 11

33 **IME 2014** Em uma progressão aritmética crescente, a soma de três termos consecutivos é S_1 e a soma de seus quadrados é S_2.

Sabe-se que os dois maiores desses três termos são raízes da equação $x^2 - S_1 \cdot x + \left(S_2 - \frac{1}{2}\right) = 0$.

A razão desta PA é

A $\frac{1}{6}$
B $\frac{\sqrt{6}}{6}$
C $\sqrt{6}$
D $\frac{\sqrt{6}}{3}$
E 1

34 **IME** Seja $S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + ... + 79^2$. O valor de S satisfaz:

A $S < 7 \times 10^4$
B $7 \times 10^4 \leq S < 8 \times 10^4$
C $8 \times 10^4 \leq S < 9 \times 10^4$
D $9 \times 10^4 \leq S < 10^5$
E $S \geq 10^5$

35 **ITA** Considere a progressão aritmética (a_1, a_2, ..., a_{50}) de razão *d*. Se $\sum_{n=1}^{10} a_n = 10 + 25d$ e $\sum_{n=1}^{50} a_n = 4550$, então $d - a_1$ é igual a

A 3.
B 6.
C 9.
D 11.
E 14.

36 **Enem 2018** Um quebra-cabeça consiste em recobrir um quadrado com triângulos retângulos isósceles, como ilustra a figura.

Uma artesã confecciona um quebra-cabeça como o descrito, de tal modo que a menor das peças é um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2 cm.

O quebra-cabeça, quando montado, resultará em um quadrado cuja medida do lado, em centímetro, é

A 14
B 12
C $7\sqrt{2}$
D $6 + 4\sqrt{2}$
E $6 + 2\sqrt{2}$

37 **ESPM-RJ 2018** A sequência S = (sen 60°, 1 + sen 30°, 3cos30°) é:

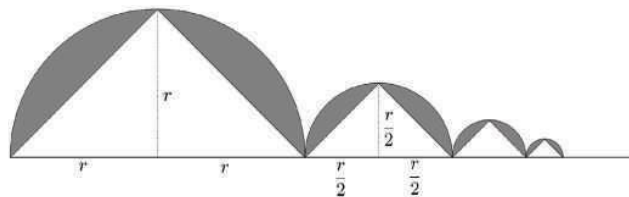
A uma PA de razão tg 30°.
B uma PG de razão sen 60°.
C uma PA de razão tg 45°.
D uma PA de razão 1 + sen 60°.
E uma PG de razão tg 60°.

38 **PUC-PR 2018** Considere os dados a seguir.
Mirosmar Egeu adora construir veleiros em miniatura de madeira, ele fez um esboço de seu barco e definiu as medidas de uma das velas que tem a forma de um triângulo retângulo, cujos lados estão em progressão geométrica com razão q > 1, conforme a figura. O cateto menor mede $x = \sqrt{\sqrt{5}-1}$ metros, o cateto maior mede *y* e a hipotenusa, *z*. O valor de *y* em metros é

A $\sqrt{2}$.
B $\sqrt{3}$.
C $\sqrt{5}$.
D $\sqrt{5}-1$.
E $\sqrt{5}+1$.

39 **USF 2018** Considere uma progressão aritmética crescente de cinco termos, na qual o produto do primeiro com o quinto termo é 45, e a soma dos outros três termos é 27. Dado que o segundo e quarto termos dessa progressão aritmética são, respectivamente, o primeiro e o segundo termos de uma progressão geométrica, é possível afirmar, corretamente, que o décimo termo da progressão geométrica assim defi nida vale

A 12288.
B 30.
C 6144.
D 60.
E 3072.

40 **Unioeste 2013** A figura abaixo é uma construção geométrica feita da seguinte forma: considere *r* um número real positivo qualquer. Usando a reta de apoio, a primeira semicircunferência foi construída com raio *r*, o triângulo inscrito nesta semicircunferência possui base 2r e altura *r*. A área da região entre a primeira semicircunferência e o triângulo inscrito chamaremos de A_1. A segunda semicircunferência foi construída de modo a ter um ponto em comum com a primeira semicircunferência e este ponto pertence a reta de apoio. O raio da segunda semicircunferência é $\frac{r}{2}$
O triângulo inscrito na segunda semicircunferência possui base $\frac{2r}{2}$ e altura $\frac{r}{2}$. A área da região entre a segunda semicircunferência e o triângulo inscrito chamaremos de A_2. As próximas construções seguem o mesmo padrão, ou seja, o raio de uma semicircunferência é sempre a metade do raio da anterior e todas as semi circunferências possuem um triângulo inscrito conforme a construção acima. Denotamos por A_n a área entre a n ésima semicircunferência e o respectivo triângulo ins crito. Com base na figura e nas informações acima, é correto afirmar que

A $(A_1, A_2, A_3, ..., A_n)$ é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.
B $(A_1, A_2, A_3, ..., A_n)$ é uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$.
C A sequência $(A_1, A_2, A_3, ..., A_n)$ não é uma progressão geométrica e também não é uma progressão aritmética.
D $A_n = \frac{\pi r^2}{2^{2n-1}}$.
E $A_n = \frac{(\pi \quad 2)r^2}{2^{2n-1}}$.

41 **UPF 2017** A Esponja de Menger é construída a partir de um cubo, por meio do seguinte processo recursivo:

1. Tome um cubo qualquer.	**2.** Divida cada face do cubo em 9 quadrados. Desse modo, o cubo inicial fica subdividido em cubos menores.
3. Remova o cubo localizado no meio de cada face e o cubo central Esse é o primeiro nível da Esponja de Menger.	**4.** Repita os passos 2 e 3 para cada um dos cubos restantes do nível anterior Assim, obtém--se o segundo nível da Esponja.
5. A Esponja de Menger é o limite desse processo depois de um número infinito de iterações.	

(imagem disponível em: http://www.epsilones.com/paginas/curvas/curvas-035-esponja-menger.html. Acesso em 10 abr. 2017)

Sobre a Esponja de Menger e seu contexto, considere as seguintes afirmações.

I. Se *n* é o número de iterações realizadas no cubo inicial, o número de cubos restantes na enésima interação é 20^n.

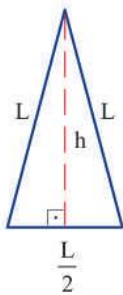
II. O número de cubos obtidos em cada etapa do processo de construção da Esponja de Menger é 20n, sendo *n* o número de interações.

III. A área da Esponja de Menger é obtida por meio de um processo recursivo, sendo que, em cada face, a área de cada quadrado é $\frac{1}{9}$ da área do quadrado obtido no nível anterior.

IV. O fato de que o processo de construção da Es ponja de Menger é recursivo e dispõe de um número infinito de procedimentos a serem execu tados faz com que o volume dela seja zero.

Está correto apenas o que se afirma em

A I e III. **B** II e III **C** II e IV. **D** I, III e IV **E** II, III e IV.

42 Unesp 2011 Considere um triângulo isósceles de lados medindo L, $\frac{L}{2}$ e L centímetros. Seja *h* a medida da altura relativa ao lado de medida $\frac{L}{2}$. Se L, *h* e a área desse triângulo formam, nessa ordem, uma progressão geométrica, determine a medida do lado L do triângulo.

43 UEPG 2018 Sobre progressão aritmética e geométrica, assinale o que for correto.

01 Sendo (3x 2, x 1, 2x + 3) uma PA, então $x = \frac{3}{7}$

02 Em uma PG, o 1º termo vale $\frac{3}{125}$, o último termo vale 1875 e a razão é 5. Então, essa PG tem 8 termos.

04 A equação x + 4x + 16x + ... + 1024x = 1365 tem como solução x = 1.

08 Em uma PA, o 5º termo vale 10 e o 10º termo vale 5. Então o 1º termo é 14 e a razão é –1.

Soma:

44 Udesc 2017 O número de termos da PG $\left(a, b, \frac{10}{27}, c, \frac{2}{9}, ..., \frac{2}{25}, d, e\right)$ é igual a:

A 9 **B** 10 **C** 8 **D** 11 **E** 12

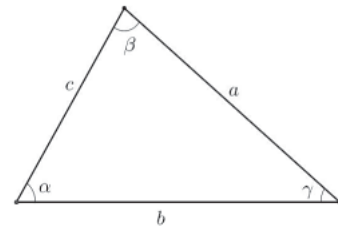
45 PUC-SP 2017 Considere a progressão aritmética (3, a_2, a_3, ...) crescente, de razão *r*, e a progressão geométrica (b_1, b_2, b_3, 3, ...) decrescente, de razão *q*, de modo que $a_3 = b_3$ e r = 3q. O valor de b_2 é igual a

A a_6 **B** a_7 **C** a_8 **D** **E** a_9

46 Unifesp 2017 Em um experimento, uma população inicial de 100 bactérias dobra a cada 3 horas. Sendo *y* o número de bactérias após *x* horas, segue que $y = 100 \cdot 2^{\frac{x}{3}}$.

a) Depois de um certo número de horas a partir do início do experimento, a população de bactérias atingiu 1677721600 Calcule esse número de ho ras. (dado: $1677721600 = 256^3$)

b) Sabendo-se que da 45ª para a 48ª hora o número de bactérias aumentou de $100 \cdot 2^k$, calcule o valor de *k*

47 Unicamp 2016 Considere o triângulo exibido na figura abaixo, com lados de comprimentos *a*, *b* e *c* e ângulos α, β e γ.

a) Suponha que a sequência (α, β, γ) é uma progressão aritmética (PA). Determine a medida do ângulo β.

b) Suponha que a sequência (a, b, c) é uma progressão geométrica (PG) de razão $q = \sqrt{2}$. Determine o valor de tan β.

48 Unicamp 2015 Seja (a, b, c, d) uma progressão geométrica (PG) de números reais, com razão q ≠ 0 e a ≠ 0.

a) Mostre que $x = -\frac{1}{q}$ é uma raiz do polinômio cúbico $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$.

b) Sejam *e* e *f* números reais quaisquer e considere o sistema linear nas variáveis *x* e *y*, $\begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ Determine para que valores da razão *q* esse tem solução única

49 Unifesp 2013 A sequência (12, a, b), denominada S_1, e a sequência (c, d, e), denominada S_2, são progressões aritméticas formadas por números reais

a) Somando 1 ao segundo termo e 5 ao terceiro termo de S_1, a nova sequência de três números reais passa a ser uma progressão geométrica crescente Calcule a razão dessa PG.

b) Aplicando a função trigonométrica seno aos três termos de S_2, a nova sequência que se forma tem soma dos três termos igual a zero, e termo do meio diferente de zero. Determine a razão *r* de S_2, para o caso em que $\frac{\pi}{2} < r < \pi$.

50 Fuvest A soma dos cinco primeiros termos de uma PG, de razão negativa, é $\frac{1}{2}$. Além disso, a diferença entre o sétimo termo e o segundo termo da PG é igual a 3 Nessas condições, determine:

a) A razão da PG

b) A soma dos três primeiros termos da PG.

51 **Uerj 2017** Em uma atividade nas olimpíadas de matemática de uma escola, os alunos largaram, no sentido do solo, uma pequena bola de uma altura de 12 m. Eles observaram que, cada vez que a bola toca o solo, ela sobe e atinge 50% da altura máxima da queda imediatamente anterior.
Calcule a distância total, em metros, percorrida na ver tical pela bola ao tocar o solo pela oitava vez.

52 **Unesp** Devido ao aquecimento das águas, a ocorrência de furacões das categorias 4 e 5 os mais intensos da escala Saffir-Simpson – dobrou nos últimos 35 anos (Veja, 21 06 2006). Seja *x* o número de furacões dessas categorias, ocorridos no período 1971-2005. Vamos supor que a quantidade de furacões a cada 35 anos continue dobrando em relação aos 35 anos anteriores, isto é, de 2006 a 2040 ocorrerão 2x furacões, de 2041 a 2075 ocorrerão 4x furacões, e assim por diante. Baseado nesta suposição, determine, em função de *x*, o número total de furacões que terão ocorrido no período de 1971 a 2320.

53 **Unicamp 2011** No mês corrente, uma empresa registrou uma receita de R$ 600 mil e uma despesa de R$ 800 mil. A empresa estuda, agora, alternativas para voltar a ter lucro.

a) Primeiramente, assuma que a receita não variará nos próximos meses, e que as despesas serão reduzidas, mensalmente, em exatos R$ 45 mil Escreva a expressão do termo geral da progressão aritmética que fornece o valor da despesa em função de *n*, o número de meses transcorridos, considerando como mês inicial o corrente. Calcule em quantos meses a despesa será menor que a receita.

b) Suponha, agora, que a receita aumentará 10% a cada mês, ou seja, que a receita obedecerá a uma progressão geométrica (PG) de razão 11/10. Nesse caso, escreva a expressão do termo geral dessa PG em função de *n*, o número de meses transcorridos, considerando como mês inicial o corrente. Determine qual será a receita acumulada em 10 meses. Se necessário, use $1{,}1^2 = 1{,}21$; $1{,}1^3 \cong 1{,}33$ e $1{,}1^5 \cong 1{,}61$.

54 **Fuvest 2019** Resolva os três itens abaixo.

a) O primeiro termo de uma progressão geométrica de razão positiva é 5, e o terceiro termo é 45. Calcule a soma dos 6 primeiros termos dessa progressão.

b) Calcule a soma dos números inteiros positivos menores do que 112 e não divisíveis por 4.

c) A soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética é $n(2n + 1)$, qualquer que seja $n \geq 1$. Encontre o vigésimo termo dessa progressão

55 **Unicamp 2018** Considere a sequência de números reais $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ tal que (a_1, a_2, a_3) é uma progressão geométrica e (a_3, a_4, a_5) é uma progressão aritmética, ambas com a mesma razão *w*

a) Determine a sequência no caso em que $a_3 = 3$ e $w = 2$

b) Determine todas as sequências tais que $a_1 = 1$ e $a_5 = 8$.

56 **UFJF 2018** Sejam a_1, a_2, a_3, a_4 os quatros primeiros termos de uma progressão geométrica de termos positivos, tais que a_3, a_4 e $a_4 - 7a_3 + 16a_2$ são os três primeiros termos de uma progressão aritmética, respectivamente.

a) Sabendo-se que $a_1 + a_3 + a_4 = 91$, calcule a razão e os quatros primeiros termos da progressão geométrica.

b) Calcule a soma do sexto até o décimo termo da progressão geométrica.

57 **Fuvest 2015** Um “alfabeto minimalista” é constituído por apenas dois símbolos, representados por * e #. Uma palavra de comprimento *n*, $n \geq 1$, é formada por *n* escolhas sucessivas de um desses dois símbolos. Por exemplo, # é uma palavra de comprimento 1 e #**# é uma palavra de comprimento 4.
Usando esse alfabeto minimalista,

a) quantas palavras de comprimento menor do que 6 podem ser formadas?

b) qual é o menor valor de N para o qual é possível formar 1000000 de palavras de tamanho menor ou igual a N?

58 **Efomm 2018 (Adapt.)** Resolvendo $1 + i + i^2 + \dots + i^n$, com $n = 4k + 1$ e $k \in \mathbb{Z}$ (números inteiros), obtemos

A i^n
B $1 + i^{n+1}$
C 1
D $1 + i^2$
E $1 + i$

59 **FGV-SP 2014**

a) Um sábio da Antiguidade propôs o seguinte pro blema aos seus discípulos:
“Uma rã parte da borda de uma lagoa circular de 7,5 metros de raio e se movimenta saltando em linha reta até o centro. Em cada salto, avança a metade do que avançou no salto anterior. No primeiro salto avança 4 metros. Em quantos saltos chega ao centro?”

b) O mesmo sábio faz a seguinte afirmação em rela ção à situação do tem a:
“Se o primeiro salto da rã é de 3 metros, ela não chega ao centro.”
Justifique a afirmação.

60 **EPCar 2016** Considere as expressões:

$A = 26^2 + 24^2 \quad 23^2 \quad 21^2 + 20^2 \quad 18^2 \quad \dots \quad 5^2 \quad 3^2$ e

$B = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[16]{2} \dots$

O valor de $\frac{A}{B}$ é um número compreendido entre

A 117 e 120
B 114 e 117
C 111 e 114
D 108 e 111

61 **Unesp 2015** Para cada *n* natural, seja o número

$$K_n = \underbrace{\sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \cdot (\dots) \cdot \sqrt{3}}}}}_{\text{n vezes}} - \underbrace{\sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot (\dots) \cdot \sqrt{2}}}}}_{\text{n vezes}}.$$

Se $n \to +\infty$, para que valor se aproxima K_n?

62 **Unesp 2011** Divide-se, inicialmente, um quadrado de lado com medida unitária em 9 quadrados iguais, traçando se dois pares de retas paralelas aos lados. Em seguida, remove-se o quadrado central. Repete-se este processo de divisão, para os quadrados restantes, *n* vezes.

Observe o processo para as duas primeiras divisões:

Quantos quadrados restarão após as *n* divisões sucessivas do quadrado inicial e qual a soma das áreas dos quadrados removidos, quando *n* cresce indefinidamente?

63 **Fuvest 2014** Considere o triângulo equilátero ΔA_0OB_0 de lado 7 cm.

a) Sendo A_1 o ponto médio do segmento $\overline{A_0B_0}$, e B_1 o ponto simétrico de A_1 em relação à reta determinada por O e B_0, determine o comprimento de $\overline{OB_1}$.

b) Repetindo a construção do item a), tomando agora como ponto de partida o triângulo ΔA_1OB_1, pode-se obter o triângulo ΔA_2OB_2 tal que A_2 é o ponto médio do segmento $\overline{A_1B_1}$, e B_2 o ponto simétrico de A_2 em relação à reta determinada por O e B_1. Repetindo mais uma vez o procedimento, obtém-se o triângulo ΔA_3OB_3. Assim, sucessivamente, pode-se construir uma sequência de triângulos ΔA_nOB_n tais que, para todo $n \geq 1$, A_n é o ponto médio de $\overline{A_{n-1}B_{n-1}}$, e B_n, o ponto simétrico de A_n em relação à reta determinada por O e B_{n-1}, conforme figura a seguir.

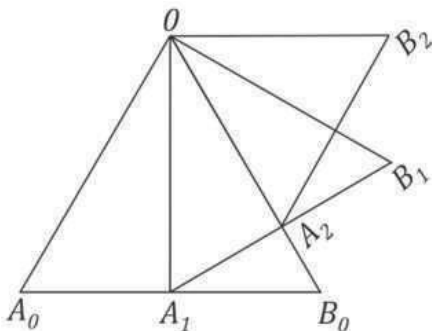



Figura obtida após aplicar o procedimento duas vezes.

Denotando por a_n, para $n \geq 1$, o comprimento do segmento $\overline{A_{n-1}A_n}$, verifique que $a_1, a_2, a_3, \ldots$ é uma progressão geométrica. Determine sua razão.

c) Determine, em função de n, uma expressão para o comprimento da linha poligonal $A_0A_1A_2 \ldots A_n, n \geq 1$.

64 **EsPCEx 2017** A sequência $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$, onde $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_2 = \frac{5}{2}$, $a_3 = \frac{9}{2}$, ..., $a_{10} = \frac{1025}{2}$ é de tal forma que para cada $n \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ temos que $a_n = b_n + c_n$, onde $(b_1, b_2, \ldots, b_{10})$ é uma PG com $b_1 \neq 0$ e de razão $q \neq \pm 1$ e $(c_1, c_2, \ldots, c_{10})$ é uma PA constante.

Podemos afirmar que $a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}$ é igual a

A 98
B 172
C 260
D 516
E 1028

65 **Esc. Naval 2015** A soma dos três primeiros termos de uma PG crescente vale 13 e a soma dos seus quadrados 91. Justapondo-se esses termos, obtém-se um número de três algarismos. Pode-se afirmar que o resto da divisão desse número pelo inteiro 23 vale

A 1
B 4
C 8
D 9
E 11

66 **ITA 2017** Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ Suponha que a, b, c, d formem, nesta ordem, uma progressão geométrica e que $a, \frac{b}{2}, \frac{c}{4}, d$ 140 formem, nesta ordem, uma progressão aritmética. Então, o valor de d - b é

A –140.
B –120.
C 0.
D 120.
E 140.

67 **ITA 2015** Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ a sequência definida da seguinte forma: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$. Considere as afirmações a seguir:

I. Existem três termos consecutivos, a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, que, nesta ordem, formam uma progressão geométrica.

II. a_7 é um número primo.

III. Se *n* é múltiplo de 3, então a_n é par.

É (são) verdadeira(s)

A apenas II
B apenas I e II
C apenas I e III
D apenas II e III
E I, II e III

68 **IME 2013** Entre os números 3 e 192 insere-se igual número de termos de uma progressão aritmética e de uma progressão geométrica com razão *r* e *q*, respectivamente, onde *r* e *q* são números inteiros. O número 3 e o número 192 participam destas duas progressões. Sabe-se que o terceiro termo de $\left(1 + \frac{1}{q}\right)^8$, em potências crescentes de $\frac{1}{q}$, é $\frac{r}{9q}$ O segundo termo da progressão aritmética é

A 12
B 48
C 66
D 99
E 129

69 **IME 2017** Sejam uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ )$ e uma progressão geométrica $(b_1, b_2, b_3, b_4, \ )$ de termos inteiros, de razão *r* e razão *q*, respectivamente, onde *r* e *q* são inteiros positivos, com $q > 2$ e $b_1 > 0$ Sabe-se, também, que $a_1 + b_2 = 3$, $a_4 + b_3 = 26$ O valor de b_1 é:

A 1
B 2
C 3
D 4
E 5

70 IME 2016 Sabendo-se que os números reais positivos a, b e c formam uma progressão geométrica e $\log\left(\frac{5c}{a}\right)$, $\log\left(\frac{3b}{5c}\right)$ e $\log\left(\frac{a}{3b}\right)$ formam uma progressão aritmética, ambas nessa ordem, então se pode afirmar que a, b e c

A formam os lados de um triângulo obtusângulo.
B formam os lados de um triângulo acutângulo não equilátero.
C formam os lados de um triângulo equilátero.
D formam os lados de um triângulo retângulo.
E não podem formar os lados de um triângulo.

71 ITA 2011 Considere a equação algébrica $\sum_{k=1}^{3}\left(x-a_k\right)^{4-k}=0$

Sabendo que x = 0 é uma das raízes e que (a_1, a_2, a_3) é uma progressão geométrica com $a_1 = 2$ e soma 6, pode-se afirmar que

A a soma de todas as raízes é 5.
B o produto de todas as raízes é 21.
C a única raiz real é maior que zero.
D a soma das raízes não reais é 10.
E todas as raízes são reais.

72 IME Seja $f(x)=|3 \quad \log(x)|$, $x\in\mathbb{R}$ Sendo *n* um número inteiro positivo, a desigualdade $\left|\frac{f(x)}{4}\right|+\left|\frac{2f(x)}{12}\right|+\left|\frac{4f(x)}{36}\right|+ \quad +\left|\frac{2^n \ {}^3f(x)}{3^{n-1}}\right|+ \quad \le \frac{9}{4}$ somente é possível se:

Obs.: log representa a função logarítmica na base 10.

A $0\le x\le 10^6$
B $10^{-6}\le x\le 10^8$
C $10^3\le x\le 10^6$
D $10^0\le x\le 10^6$
E $10^{-6}\le x\le 10^6$

73 ITA 2017 Sejam A = {1, 2, ..., 29, 30} o conjunto dos números inteiros de 1 a 30 e (a_1, a_2, a_3) uma progressão geométrica crescente com elementos de A e razão $q > 1$.

a) Determine todas as progressões geométricas (a_1, a_2, a_3) de razão $q=\frac{3}{2}$.

b) Escreva $q=\frac{m}{n}$, com $m, n\in\mathbb{Z}$ e mdc(m, n) = 1 Determine o maior valor possível para *n*

74 ITA 2015 Sabe-se que 1, B, C, D e E são cinco números reais que satisfazem às propriedades:

I. B, C, D, E são dois a dois distintos;
II. os números 1, B, C, e os números 1, C, E, estão, nesta ordem, em progressão aritmética;
III. os números B, C, D, E, estão, nesta ordem, em progressão geométrica.

Determine B, C, D, E

75 ITA A progressão geométrica infinita $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ tem razão $r < 0$. Sabe-se que a progressão infinita $(a_1, a_6, ..., a_{5n+1}, ...)$ tem soma 8 e a progressão infinita $(a_5, a_{10}, ..., a_{5n}, ...)$ tem soma 2. Determine a soma da progressão infinita $(a_1, a_2, \quad, a_n, \quad)$

76 IME 2016 Os inteiros $a_1, a_2, a_3, ..., a_{25}$ estão em PA com razão não nula. Os termos a_1, a_2 e a_{10} estão em PG, assim como a_6, a_j e a_{25}. Determine j.

77 IME 2019 Mostre que os números 16, 24 e 81 podem pertencer a uma PG e obtenha a quantidade de termos dessa PG, sabendo que seus elementos são números naturais

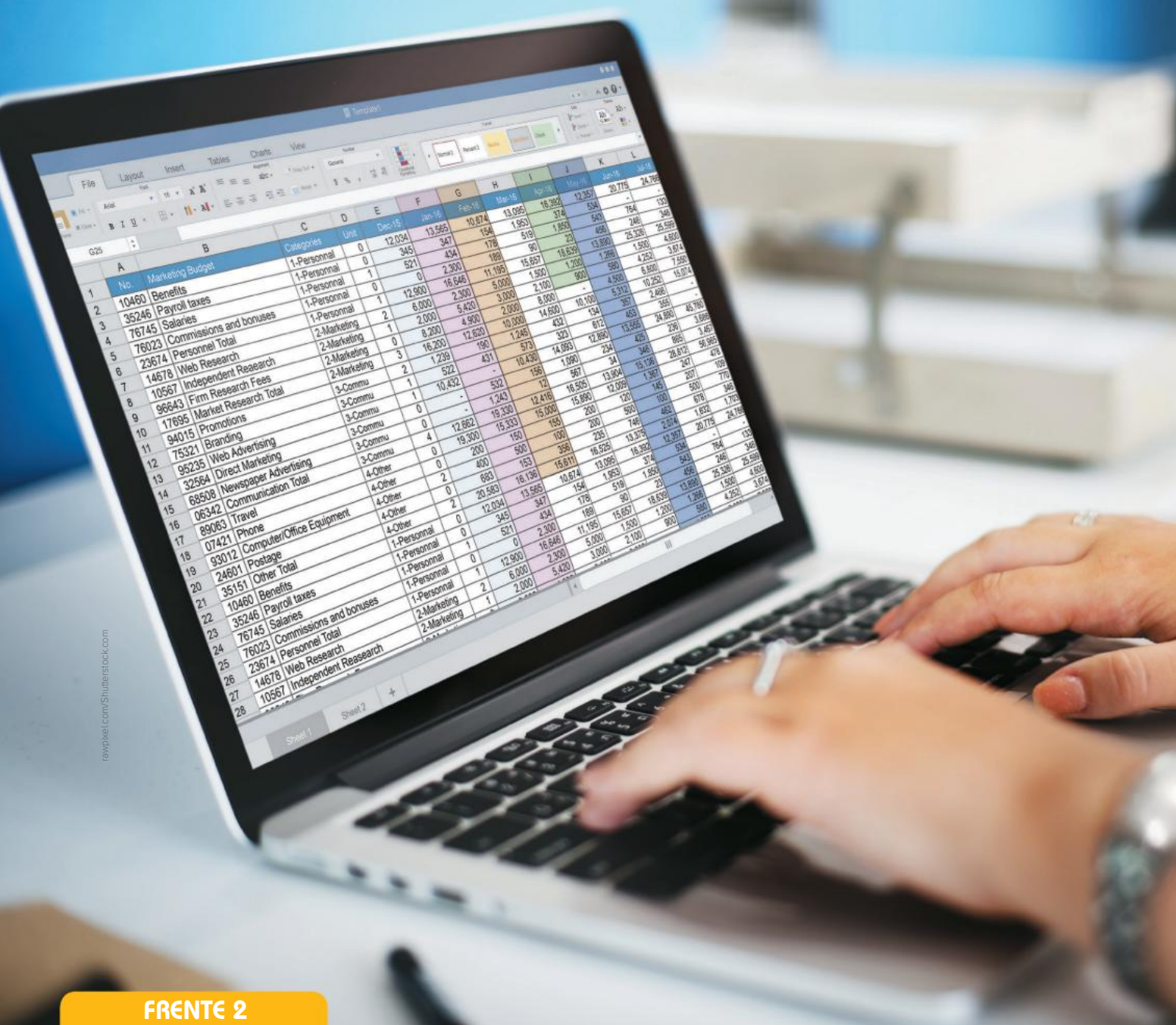
78 IME 2018 Seja um cubo regular, onde os centros de suas faces são vértices de um octaedro. Por sua vez, os centros das faces deste octaedro formado são vértices de outro cubo. Obtendo consecutivamente octaedros e cubos infinitamente, determine a razão da soma do volume de todos os poliedros inscritos pelo volume do cubo inicial.

79 IME 2014 Calcular o valor da expressão abaixo

$$\sqrt[3]{\underbrace{370370\ldots037}_{89\text{ algarismos}} \qquad \underbrace{11\ldots1}_{30\text{ algs"1"}}\ \underbrace{00\ldots0}_{30\text{ algs"0"}}}$$

Obs.: algs = algarismos

80 IME 2012 O segundo, o sétimo e o vigésimo sétimo termos de uma Progressão Aritmética (PA) de números inteiros, de razão *r*, formam, nesta ordem, uma Progressão Geométrica (PG), de razão *q*, com *q* e $r\in\mathbb{N}^*$ (natural diferente de zero). Determine:

a) o menor valor possível para a razão *r*;
b) o valor do décimo oitavo termo da PA, para a con dição do item a.

rawpixel.com/Shutterstock.com

FRENTE 2

CAPÍTULO

6

Introdução à Álgebra Linear

O conceito matemático de linearidade possui hipóteses relativamente simples, mas bastante rígidas. Os modelos de otimização proporcionados por esse estudo têm aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento científico. Engenheiros, administradores, programadores, químicos, estatísticos, cientistas sociais, médicos e demais profissionais das ciências biológicas utilizam diariamente as ferramentas matemáticas decorrentes dos princípios de linearidade, para tomar decisões que interferem na realidade de nossas vidas.

Os fundamentos da ciência conhecida como Álgebra Linear, no meio universitário, serão gradativamente estruturados ao longo deste capítulo.

Função linear

Duas grandezas X e Y são diretamente proporcionais se, quando uma delas duplica, por exemplo, a outra também duplica Quando uma triplica, a outra também triplica e assim por diante De modo geral, se uma delas é multi plicada por um fator qualquer, então a outra também fica multiplicada pelo mesmo fator

Nesse caso, deve existir um número real *k* não nulo tal que a função y = f(x) fique expressa por:

$$f(x) = k \cdot x$$

As funções desse tipo são denominadas funções lineares e o número *k* é denominado constante de proporcionalidade. As funções lineares admitem as seguintes propriedades algébricas:

$$f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x) \qquad f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

Combinação linear

Considere agora uma série de funções lineares de di ferentes variáveis: f(x), g(y), h(z), etc.

Considere também que as constantes de proporcionalidade dessas funções sejam, respectivamente, os números reais: *a*, *b*, *c*, etc.

$$f(x) = a \cdot x$$
$$g(y) = b \cdot y$$
$$h(z) = c \cdot z$$

A soma de todas ou de algumas dessas funções lineares é o que chamamos de combinação linear das variáveis *x*, *y* e *z*:

$$f(x) + g(y) + h(z) + \quad = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z +$$

O conceito de combinação linear pode ser aplicado a qualquer sucessão de termos (x, y, z, ...) mesmo que eles não sejam apenas numéricos.

Assim, para criar uma combinação linear ℓ de uma série com *n* termos $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$, basta que seja escolhida uma série de *n* constantes reais $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ que não sejam todas nulas, tal que: $\ell = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 + ... a_n \cdot x_n$, com $(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 + ... + (a_n)^2 \neq 0$

O fato de a soma dos quadrados das constantes reais não ser igual a zero garante que elas não sejam todas nulas.

Um entendimento menos abstrato do conceito de combinação linear pode ser adquirido observando alguns exemplos de aplicação.

Imagine uma barraca de frutas que venda apenas abacaxis, bananas, caquis e damascos, sendo que cada tipo de fruta de uma mesma espécie como bananas nanicas, por exemplo.

5 second Studio/ Shutterstock.com; Mazur Travel/ Shutterstock.com; Ho Su A Bi/ Shutterstock.com; Ozgur Coskun/ Shutterstock.com

Se alguém vai a essa barraca com uma sacola e efetua uma compra qualquer, essa pessoa levará em sua sacola uma combinação linear das frutas disponíveis. Exemplos:

Se uma pessoa comprou meio abacaxi, 3 dúzias de bananas, meia dúzia de caquis e 2 damascos, então sua sacola carrega a seguinte combinação linear:

$$\ell_1 = \frac{1}{2} \text{ abacaxi} + 36 \text{ bananas} + 6 \text{ caquis} + 2 \text{ damascos}$$

Aqui há uma série de quatro termos não numéricos:

v = (abacaxi, banana, caqui, damasco)

E uma série de números reais que indicam as quanti dades de cada termo da série v:

$$u_1 = \left(\frac{1}{2}, 36, 6, 2\right)$$

Se outra pessoa comprou apenas 4 abacaxis e uma dú zia de caquis, sua sacola carrega outra combinação linear:

$$\ell_2 = 4 \text{ abacaxis} + 12 \text{ caquis}$$

Aqui também se pode considerar a mesma série de quatro termos não numéricos:

v = (abacaxi, banana, caqui, damasco)

Mas a série de números reais que indicam as quanti dades de cada fruta será outra:

$$u_2 = (4, 0, 12, 0)$$

Considerando sempre que as quantidades de frutas compradas sejam ordenadas de acordo com a série não numérica v, as combinações lineares, que indicam os conteúdos das sacolas de meia dúzia de compradores dessa barraca, podem ser apresentadas como tabela de duas formas diferentes

Podem-se escrever as séries u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 e u_6 uma abaixo da outra formando 6 linhas:

$$\begin{matrix} u_1 \rightarrow \\ u_2 \rightarrow \\ u_3 \rightarrow \\ u_4 \rightarrow \\ u_5 \rightarrow \\ u_6 \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 36 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & 0 \\ 1,5 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 6 & 48 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nessa tabela:

As duas primeiras linhas representam as compras dos primeiros clientes do exemplo;

A 3ª linha representa uma compra de apenas duas dúzias de bananas;

A 4ª linha representa a compra de um abacaxi e meio mais uma dezena de damascos;

A 5ª linha representa a compra de meia dúzia de bananas, quatro dúzias de caquis e 1 damasco.

A última linha representa um cliente que levou uma fruta de cada tipo.

Observe que o fato de um número estar escrito na terceira coluna é suficiente para identificar que representa uma quantidade de caquis, por exemplo.

Também se podem escrever os termos das séries $u_1 ... u_6$, de cima para baixo formando 6 colunas, uma ao lado da outra:

$$\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 4 & 0 & 1{,}5 & 0 & 1 \\ 36 & 0 & 24 & 0 & 6 & 1 \\ 6 & 12 & 0 & 0 & 48 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 10 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nessa tabela, a quarta coluna representa a compra de um abacaxi e meio, mais uma dezena de damascos, por exemplo.

Essa representação com as séries numéricas em colunas parece mais adequada quando se quer indicar também a série *v*, dos tipos de frutas à venda na barraca:

$$\begin{matrix} \text{Abacaxi} \rightarrow \\ \text{Banana} \rightarrow \\ \text{Caqui} \rightarrow \\ \text{Damasco} \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 0{,}5 & 4 & 0 & 1{,}5 & 0 & 1 \\ 36 & 0 & 24 & 0 & 6 & 1 \\ 6 & 12 & 0 & 0 & 48 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 10 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Produto interno

Considere agora a tabela de preços das frutas vendidas na barraca:

Abacaxi	R$ 9,90 a unidade
Banana	R$ 7,20 a dúzia
Caqui	R$ 15,00 a dúzia
Damasco	R$ 2,50 a unidade

Usando unidades monetárias, a série v = (abacaxi, banana, caqui, damasco) de termos não numéricos pode ser substituída pela série dos preços unitários de cada tipo de fruta, apresentada a seguir na forma de coluna.

$$v = \begin{pmatrix} 9{,}90 \\ 0{,}60 \\ 1{,}25 \\ 2{,}50 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Abacaxi} \\ \text{Banana} \\ \text{Caqui} \\ \text{Damasco} \end{matrix}$$

Com essa nova série v, cada combinação linear ℓ das frutas da barraca fica associada a um único valor numérico denominado produto interno.

! Atenção

Quando usado no contexto de séries numéricas e tabelas, o termo matemático "produto" não deve ser confundido com o simples resultado da operação usual de multiplicação, mas entendido como resultado de sucessivas e alternadas operações de multiplicação e de adição.

Saiba mais

No estudo da Geometria Analítica, séries de até três números reais representam vetores no plano ou no espaço cartesiano. Nesse contexto, o produto interno de duas dessas séries é também chamado de produto escalar.

O produto interno de duas séries numéricas *u* e *v*, com o mesmo número de termos, é indicado simbolicamente por $\langle u, v \rangle$. Assim:

$u = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ uma série de *n* números reais, com $n \in \mathbb{N}$

$v = (b_1, b_2, b_3, ..., b_m)$ uma série com *m* números reais, com $m \in \mathbb{N}$

Quando n = m tem-se:

$$\langle u, v \rangle = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 + ... + a_n \cdot b_n$$

Um algoritmo em duas etapas para obter o produto interno de duas séries numéricas consiste em efetuar ordenadamente todas as multiplicações: o 1º termo da série *u* pelo 1º termo da série *v*, o 2º termo de *u* pelo 2º termo de *v*, e assim por diante, até o último da série *u* pelo último da série *v*. Depois de feitas as multiplicações, todos os resultados devem ser somados para gerar o produto interno.

Uma forma de executar esse processo é escrever ambas as séries como colunas uma ao lado da outra, como no exemplo a seguir:

$$\begin{cases} u = (5,\ 4,\ 7,\ 0,\ 1) \\ v = (2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 8) \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccc} u & & v & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ 5 & \times & 2 & = & 10 \; + \\ 4 & \times & 3 & = & 12 \; + \\ 7 & \times & 6 & = & 42 \; + \\ 0 & \times & 9 & = & 0 \; + \\ 1 & \times & 8 & = & 8 \\ & \langle u, v \rangle & & = & 72 \end{array}$$

Produto interno

Voltando ao exemplo da barraca de frutas, havia, entre outras, a combinação linear:

$$\ell_1 = \frac{1}{2} \text{ abacaxi} + 36 \text{ bananas} + 6 \text{ caquis} + 2 \text{ damascos}$$

Como não é possível somar abacaxis com bananas nem com as demais frutas, a expressão ℓ_1 não representa um simples valor numérico. Agora, se os preços unitários das frutas forem usados como representantes de seus valores, em uma mesma unidade monetária, a combinação linear ℓ_1 fica associada a um produto interno de duas séries numéricas: a série das quantidades de frutas e a série dos preços dessas mesmas frutas.

Nesse caso, o produto interno representa o total a ser pago pela compra de todas as frutas de ℓ_1.

$$\begin{array}{ccccc} u_1 & & v & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ 0{,}5 & \times & 9{,}90 & = & 4{,}95 \; + \\ 36 & \times & 0{,}60 & = & 21{,}60 \; + \\ 6 & \times & 1{,}25 & = & 7{,}50 \; + \\ 2 & \times & 2{,}50 & = & 5{,}00 \\ & & \langle u, v \rangle & = & 39{,}05 \end{array}$$

Logo, a pessoa que comprou a combinação ℓ_1 de frutas deverá pagar a quantia de R$ 39,05 por elas.

Retomando então as tabelas com as quantidades de frutas de cada compra naquela barraca e a dos seus respectivos preços unitários, podem-se calcular os produtos internos que representam os valores devidos para cada combinação de frutas:

$$\begin{matrix} u_1 \rightarrow \\ u_2 \rightarrow \\ u_3 \rightarrow \\ u_4 \rightarrow \\ u_5 \rightarrow \\ u_6 \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 0{,}5 & 36 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & 0 \\ 1{,}5 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 6 & 48 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 9{,}90 \\ 0{,}60 \\ 1{,}25 \\ 2{,}50 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Abacaxi} \\ \text{Banana} \\ \text{Caqui} \\ \text{Damasco} \end{matrix}$$

$$\langle u_1,\ v\rangle = 0{,}5\cdot 9{,}90 + 36\cdot 0{,}60 + 6\cdot 1{,}25 + 2\cdot 2{,}50 = 4{,}95 + 21{,}60 + 7{,}50 + 5{,}00 = 39{,}05$$
$$\langle u_2,\ v\rangle = 4\cdot 9{,}90 + 0\cdot 0{,}60 + 12\cdot 1{,}25 + 0\cdot 2{,}50 = 39{,}60 + 0 + 15{,}00 + 0 = 54{,}60$$
$$\langle u_3,\ v\rangle = 0\cdot 9{,}90 + 24\cdot 0{,}60 + 0\cdot 1{,}25 + 0\cdot 2{,}50 = 0 + 14{,}40 + 0 + 0 = 14{,}40$$
$$\langle u_4,\ v\rangle = 1{,}5\cdot 9{,}90 + 0\cdot 0{,}60 + 0\cdot 1{,}25 + 10\cdot 2{,}50 = 14{,}85 + 0 + 0 + 25{,}00 = 39{,}85$$
$$\langle u_5,\ v\rangle = 0\cdot 9{,}90 + 6\cdot 0{,}60 + 48\cdot 1{,}25 + 1\cdot 2{,}50 = 0 + 3{,}60 + 60{,}00 + 2{,}50 = 66{,}10$$
$$\langle u_6,\ v\rangle = 1\cdot 9{,}90 + 1\cdot 0{,}60 + 1\cdot 1{,}25 + 1\cdot 2{,}50 = 9{,}90 + 0{,}60 + 1{,}25 + 2{,}50 = 14{,}25$$

! Atenção

Perceba que, para efetuar produtos internos, basta que sejam tomadas duas séries numéricas com a mesma quantidade de termos, não importando se as séries estão dispostas como linhas ou colunas.

Exercícios resolvidos

1 Dadas as séries u = (5, 2), v = (1, –3) e w = (–4, 10), calcule os seguintes produtos internos:

a) $\langle u, v\rangle$ b) $\langle u, w\rangle$ c) $\langle w, v\rangle$ d) $\langle u, u\rangle$

Resolução:

a) $\langle u, v\rangle = 5\cdot 1 + 2\cdot(-3) = 5 - 6 = -1$

b) $\langle u, w\rangle = 5\cdot(-4) + 2\cdot 10 = -20 + 20 = 0$

c) $\langle w, v\rangle = (-4)\cdot 1 + 10\cdot(-3) = -4 - 30 = -34$

d) $\langle u, u\rangle = 5\cdot 5 + 2\cdot 2 = 25 + 4 = -29$

2 **UFPR 2014** Um criador de cães observou que as rações das marcas A, B, C e D contêm diferentes quantidades de três nutrientes, medidos em miligramas por quilograma, como indicado na primeira matriz abaixo. O criador decidiu misturar os quatro tipos de ração para proporcionar um alimento adequado para seus cães. A segunda matriz abaixo dá os percentuais de cada tipo de ração nessa mistura.

	A	B	C	D
nutriente 1	210	370	450	290
nutriente 2	340	520	305	485
nutriente 3	145	225	190	260

	Percentuais de mistura
A	35%
B	25%
C	30%
D	10%

Quantos miligramas do nutriente 2 estão presentes em um quilograma da mistura de rações?

A 389 mg. **B** 330 mg. **C** 280 mg. **D** 210 mg. **E** 190 mg.

Resolução:

Efetuando o produto interno da segunda linha da primeira tabela pela única coluna da segunda tabela, tem-se:

$$\begin{aligned} 340 \text{ mg} \cdot 35\% &= 119{,}0 \text{ mg} \\ 520 \text{ mg} \cdot 25\% &= 130{,}0 \text{ mg} + \\ 305 \text{ mg} \cdot 30\% &= 91{,}5 \text{ mg} + \\ 485 \text{ mg} \cdot 10\% &= 48{,}5 \text{ mg} + \\ \langle \text{Nutriente 2, Percentuais} \rangle &= 389{,}0 \text{ mg} \end{aligned}$$

Alternativa: A.

3 A nota final de uma matéria é a média ponderada das notas de cada bimestre com os pesos propostos pelo professor. As séries n e p, a seguir, apresentam as notas de uma estudante nos 4 bimestres letivos e os pesos propostos.

$$n = (5 \quad 6{,}5 \quad 7{,}5 \quad 8)$$
$$p = (0{,}2 \quad 0{,}2 \quad 0{,}3 \quad 0{,}3)$$

Calcule a nota final dessa estudante

Resolução:

A nota final da estudante é o produto escalar das séries n e p:

$$\langle n, p\rangle = 5 \cdot 0{,}2 + 6{,}5 \cdot 0{,}2 + 7{,}5 \cdot 0{,}3 + 8 \cdot 0{,}3$$
$$\langle n, p\rangle = 1 + 1{,}3 + 2{,}25 + 2{,}4 = 6{,}95$$

Saiba mais

Propriedades do produto interno

- O produto interno é uma operação comutativa:

$$\langle a,b\rangle = \langle b,a\rangle$$

- O produto interno de duas séries iguais de números reais nunca é negativo:

$$\langle a,a\rangle \geq 0$$

- Se o produto interno de duas séries iguais é nulo, então as séries são triviais.

$$\langle a,a\rangle = 0 \Leftrightarrow a = (0, 0, 0, 0, \ )$$

Equação linear

Sendo $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ uma série de *n* variáveis reais e $a = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ uma série de *n* constantes reais, que não são todas nulas, define-se equação linear a partir do produto interno dessas séries como sendo a igualdade $\langle a, x\rangle = b$ em que *b* é também uma constante real:

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 + ... + a_n \cdot x_n = b$$

com $(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 + ... + (a_n)^2 \neq 0$

A série $a = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ é denominada série dos coeficientes da equação.

A constante *b* é denominada termo independente da equação.

Exemplos:

- $\langle (2, 3), (x, y)\rangle = 4 \Leftrightarrow 2x + 3y = 4$ é uma equação linear de duas variáveis em que (2, 3) é a série dos coeficientes e 4 é o termo independente.
- $\langle (5, \ \ 2, 1), (x, y, z)\rangle \quad 10 \quad\quad 5x \quad 2y \quad z \quad 10$ é uma equação linear de três variáveis em que (5, –2, 1) é a série dos coeficientes e 10 é o termo independente
- $\langle (1, 1, 1, 2), (x, y, z, w)\rangle = 8 \Leftrightarrow x + y + z + 2w = 8$ é uma equação linear de quatro variáveis em que (1, 1, 1, 2) é a série dos coeficientes e 8 é o termo independente.

Toda equação linear com mais de uma variável (n > 1) possui uma infinidade de soluções reais. Cada solução de uma equação linear é formada por uma série de *n* valores reais, que tornam verdadeira a sentença da equação ao serem inseridos nos lugares de suas variáveis.

São soluções da equação 2x + 3y = 4 as séries (2, 0), $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e (8, −4), por exemplo, pois:

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 4 + 0 = 4$$
$$2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 1 = 1 + 3 = 4$$
$$2 \cdot 8 + 3 \cdot (\ \ 4) \quad 16 \quad 12 \quad 4$$

Não são soluções da equação 2x + 3y = 4 as séries (3, 1), (3, 2), por exemplo, pois:

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 6 + 3 = 9 \neq 4$$
$$2 \cdot (\ \ 3) + 3 \cdot 2 = \ \ 6 + 6 = 0 \neq 4$$

São soluções da equação 5x   2y + z = 10 as séries (2, 0, 0) e (1, 2, 9), por exemplo, pois:

$$5 \cdot 2 \quad 2 \cdot 0 + 0 = 10 \quad 0 + 0 = 10$$
$$5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 9 = 5 - 4 + 9 = 10$$

Não é solução da equação 5x   2y + z = 10 a série (3, 4, 5), por exemplo, pois:

$$5 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + 5 = 15 - 8 + 5 = 12 \neq 10$$

É solução da equação x + v + z + 2w = 8 a série (3, 4, 5, –2), por exemplo, pois:

$$3 + 4 + 5 + 2 \cdot (-2) = 3 + 4 + 5 - 4 = 8$$

Atenção

Não são consideradas equações lineares de variáveis x, y, etc.:

- As equações do 2º grau, ou qualquer grau maior.

$x^2 + y = 7 \qquad 2x + y^3 = 3 \qquad 3x + 4y^2 + 5z^4 = 6$

- Equações em que há multiplicação entre duas ou mais variáveis.

$4x + 5yz = 6 \qquad 7xy + z = 8 \qquad xyz = 1$

- Equações com variáveis no denominador de alguma fração.

$\frac{2}{x} + 3y + 4z = 5 \qquad 4x + 3y + \frac{2}{z} + \frac{1}{w} = 0 \qquad x + 3y^{-1} = 4$

Exercícios resolvidos

4 Qual das equações a seguir é linear?

A $2x - 7yz + 14z - 5 = 0$

B $x + 3y + 4z + 5w = \frac{1}{x}$

C $x(2 \quad y) + 2(z + x \quad 5) + 7 = 3x \quad 2$

D $2(x + 1) \quad 5y + 3(x \quad z) = 7y \quad 5 + \frac{x}{2}$

E $x^2 + 2y^2 - 2x + 4y - 147 = 0$

FRENTE 2

Resolução:

A equação da alternativa A não é linear, pois o termo 7yz apresenta produto entre variáveis.

A equação da alternativa B não é linear, pois o termo $\frac{1}{x}$ idêntico a x^{-1} não é de 1º grau

A equação da alternativa C não é linear, pois desenvolvendo x(2   y) encontramos o termo xy, que apresenta produto entre variáveis.

A equação da alternativa D é linear e pode ser escrita como $\frac{9}{2}x - 12y - 3z = -7$.

A equação da alternativa E não é linear, pois os termos x^2 e $2y^2$ são do 2o grau.

Alternativa: D.

5 Escreva algumas soluções da equação linear $3x + 2y = 7$ que estejam de acordo com as relações apresentadas em cada item:

a) $x > 0$ e $y > 0$

b) $x < 0$

c) $y < 0$

d) $x \cdot y = 0$

Resolução:

a) Há infinitas soluções para esse caso, entre elas: (1, 2), $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$, $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, etc.

b) Também há infinitas soluções para esse caso, entre elas: (1, 5), $\left(\;2, \frac{13}{2}\right)$, (–3, 8), etc.

c) Novamente há infinitas soluções para esse caso, entre elas: (3, –1), $\left(\frac{11}{3}, -2\right)$, (5, –4), etc.

d) Nesse caso há apenas duas soluções: $\left(0, \frac{7}{2}\right)$ e $\left(\frac{7}{3}, 0\right)$

Equação linear homogênea

As equações lineares $\langle a, x \rangle = b$ cujo termo independente *b* é nulo (b = 0) são denominadas equações homogêneas:

$$\langle a, x \rangle = 0 \Leftrightarrow a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 + ... + a_n \cdot x_n = 0$$

com: $(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 + ... + (a_n)^2 \neq 0$

Exemplos:

$\langle (2,3),(x,y) \rangle = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y = 0$ é uma equação linear homogênea de duas variáveis.

$\langle (5, \;\; 2,1) \rangle, (x,y,z) = 0 \Leftrightarrow 5x \; 2y = z \quad 0$ é uma equação linear homogênea de três variáveis.

Toda equação linear homogênea possui alguma série nula entre suas infinitas soluções. Essas séries numéricas formadas por *n* zeros são denominadas soluções triviais da equação homogênea.

A série (0, 0) é a solução trivial da equação $2x + 3y = 0$:

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$$

As séries (–3, 2) e (9,   6), por exemplo, são soluções não triviais da equação $2x + 3y = 0$:

$$2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 = -6 + 6 = 0$$

$$2 \cdot 9 + 3 \cdot (-6) = 18 - 18 = 0$$

As séries (3, 1), (–1, 0), por exemplo, não são soluções da equação $2x + 3y = 0$:

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 6 + 3 = 9 \neq 0$$

$$2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = -2 + 0 = -2 \neq 0$$

A série (0, 0, 0) é a solução trivial de 5x   2y + z = 0:

$$5 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 0 = 0 \quad 0 + 0 = 0$$

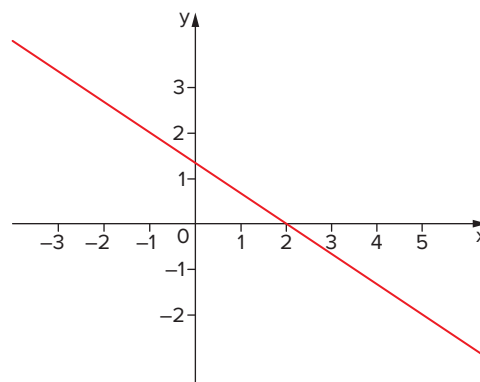
A série (2, 5, 0), por exemplo, é solução não trivial da equação $5x - 2y + z = 0$:

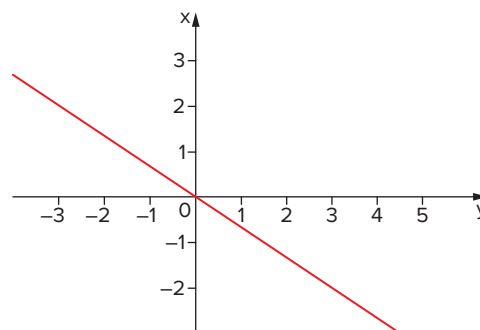
$$5 \cdot 2 - 2 \cdot 5 + 0 = 10 - 10 + 0 = 0$$

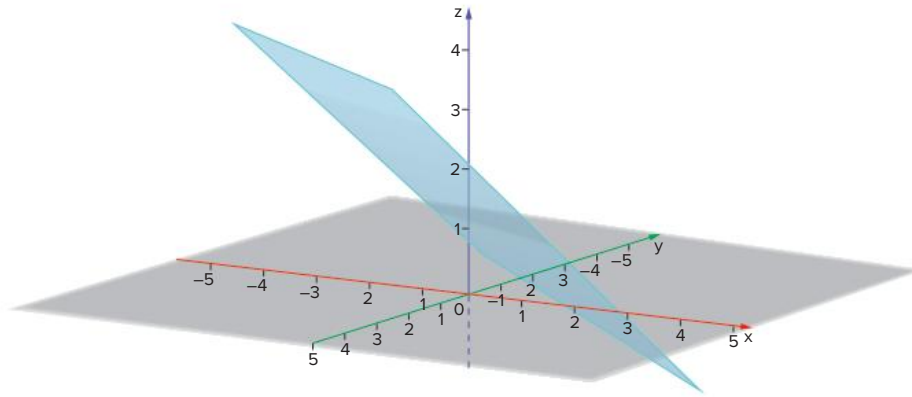
A série (0, 0, 0, 0) é a solução trivial da equação $x + y + z + 2w = 0$:

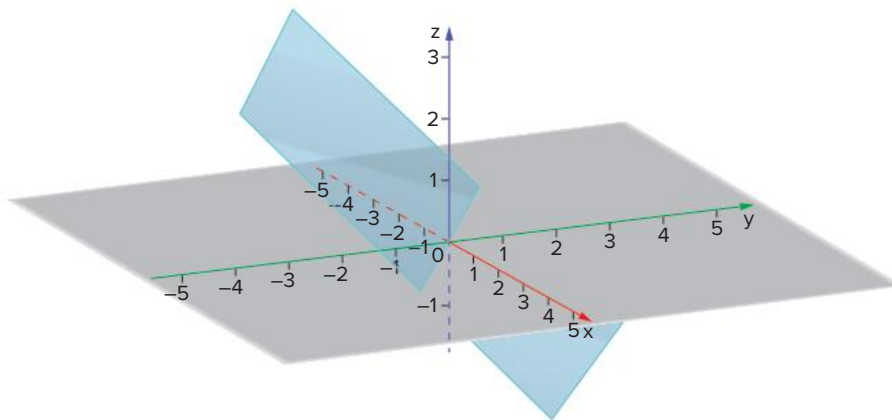
$$0 + 0 + 0 + 2 \cdot 0 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

Saiba mais

No plano cartesiano, a representação gráfica de uma equação linear com até duas variáveis tem a forma de uma reta

2x + 3y = 4

As retas que representam os gráficos das equações homogêneas sempre contêm a origem do plano cartesiano.

2x + 3y = 0

No espaço cartesiano, a representação gráfica de uma equação linear com até três variáveis tem a forma de um plano.

$2x + 3y + 4z = 5$

Os planos que representam os gráficos das equações homogêneas sempre contêm a origem do espaço cartesiano.

$2x + 3y + 4z = 0$

Sistemas lineares

São denominados sistemas lineares todos os sistemas de equações formados apenas por equações lineares. Basta que uma das equações do sistema não seja linear para desautorizar a maioria dos métodos que serão estudados neste capítulo.

As primeiras características que devem ser observadas em um sistema linear são: o número de equações (m) e o número de variáveis (n). Veja alguns exemplos:

	m = 2	**m = 3**
n = 2	$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$
n = 3	$\begin{cases} x + y - z = 8 \\ 2x \quad 3y + 2z = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y \quad z = 8 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \\ 3x - 2y - 4z = 3 \end{cases}$
n = 4	$\begin{cases} 2x + 3y + 4z + 5w = 6 \\ 2x \quad 3z + 2w = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 3y + 4z + 5w = 6 \\ 2x \quad 3z + 2w = 0 \\ x - y - 4z + w = 7 \end{cases}$

Observe duas particularidades do padrão em que esses sistemas lineares foram apresentados:

- as equações de cada sistema apresentam suas variáveis sempre na mesma ordem;
- o termo independente de cada equação fica sempre no segundo membro.

Levando em consideração esta forma padronizada de apresentação dos sistemas lineares, surge a possibilidade de representação do sistema como uma simples tabela em que são escritos apenas os coeficientes das variáveis e os termos independentes Exemplo:

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x \quad y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & \ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Observe na tabela deste exemplo que:

- as linhas são formadas pelas séries dos coeficientes das equações seguidas de seus respectivos termos independentes;
- a primeira coluna contém apenas os coeficientes da variável *x*;
- a segunda coluna contém apenas os coeficientes da variável *y*;
- a última coluna contém apenas os termos independentes.

Uma tabela desse tipo é denominada matriz completa do sistema. É costume colocar uma linha pontilhada separando a última coluna da matriz evidenciando os termos independentes das equações. Assim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \vdots & 5 \\ 2 & 1 & \vdots & 3 \end{pmatrix}$$

Veja as matrizes completas associadas aos outros exemplos de sistemas lineares:

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & \vdots & 5 \\ 2 & -1 & \vdots & 3 \\ 3 & 2 & \vdots & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y \ = z \quad 8 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 8 \\ 2 & -3 & 2 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y \ = z \quad 8 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \\ 3x - 2y - 4z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 8 \\ 2 & 3 & 2 & \vdots & 0 \\ 3 & 2 & 4 & \vdots & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z + 5w = 6 \\ 2x \ + 3z \ = 2w \quad 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & \vdots & 6 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z + 5w = 6 \\ 2x - 3z + 2w = 0 \\ x \ \ y \ \ 4z \quad w \quad 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & \vdots & 6 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & \vdots & 0 \\ 1 & -1 & -4 & 1 & \vdots & 7 \end{pmatrix}$$

As soluções de um sistema linear são as séries de *n* números reais que satisfazem todas as *m* equações do sistema.

A série (2, 1) é a única solução do sistema $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$, pois, com x = 2 e y = 1, tem-se:

$$\begin{cases} x + 3y = 2 + 3 \cdot 1 = 5 & \rightarrow \text{Equação I satisfeita.} \\ 2x \quad y = 2 \cdot 2 \quad 1 = 3 & \rightarrow \text{Equação II satisfeita.} \end{cases}$$

A série (–4, 3) não é solução do sistema $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$, pois, com x = –4 e y = 3, tem-se:

$$\begin{cases} x + 3y = -4 + 3 \cdot 3 = -4 + 9 = 5 & \rightarrow \text{Equação I satisfeita.} \\ 2x \quad y = 2\,(\quad 4) \quad 3 = \quad 8 \quad 3 = \quad 11 \neq 3 & \rightarrow \text{Equação II não satisfeita.} \end{cases}$$

Assim, mesmo que uma série numérica satisfaça uma ou mais equações de um sistema, ela não será solução do sistema se houver alguma equação em que isso não ocorra. O fato de esse sistema possuir solução única será discutido posteriormente.

A série (4, 0, –4) é uma das infinitas soluções do sistema $\begin{cases} x + y \quad z = 8 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$, pois, com x = 4, y = 0 e z = –4, tem-se:

$$\begin{cases} x + y - z = 4 + 0 - (-4) = 8 & \rightarrow \text{Equação I satisfeita.} \\ 2x \quad 3y + 2z = 2 \cdot 4 \quad 3 \cdot 0 + 2 \cdot (\quad 4) = 8 \quad 0 \quad 8 = 0 & \rightarrow \text{Equação II satisfeita.} \end{cases}$$

A série (5, 4, 1) é outra das infinitas soluções do sistema $\begin{cases} x + y - z = 8 \\ 2x \quad 3y + 2z = 0 \end{cases}$, pois, com x = 2, y =   8 e z = 2, tem-se:

$$\begin{cases} x + y - z = 5 + 4 - 1 = 8 & \rightarrow \text{Equação I satisfeita.} \\ 2x - 3y + 2z = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 10 - 12 + 2 = 0 & \rightarrow \text{Equação II satisfeita.} \end{cases}$$

A série (–9, –7, 0, 9) é uma das infinitas soluções do sistema $\begin{cases} 2x + 3y + 4z + 5w = 6 \\ 2x - 3z + 2w = 0 \\ x \quad y \quad 4z + w = 7 \end{cases}$, pois, com x = –9, y = –7, z = 0 e w = 9, tem-se:

$$\begin{cases} 2x + y + 4z + 5w = 2 \cdot (-9) + 3 \cdot (-7) + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 9 = -18 - 21 + 0 + 45 = 6 & \rightarrow \text{Equação I satisfeita.} \\ 2x - 3z + 2w = 2 \cdot (-9) + 0 \cdot (-7) + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 9 = -18 + 0 + 0 + 18 = 0 & \rightarrow \text{Equação II satisfeita.} \\ x \quad + y \quad 4z \quad + w \quad = -9 \quad (\quad 7) \quad 4 \quad 0 \quad 9 \quad 9 \quad 7 \quad +0 \quad = 9 \quad 7 & \rightarrow \text{Equação III satisfeita} \end{cases}$$

O fato de cada um dos dois últimos sistemas possuírem infinitas soluções também será discutido posteriormente, bem como a existência de sistemas lineares que não possuem solução alguma, como o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 7 \end{cases}$$

Usam-se numerais romanos para fazer referência às equações de um sistema linear Assim, no sistema anterior, $2x + 3y = 5$ é a equação I e $4x + 6y = 7$ é a equação II.

Neste momento vamos nos concentrar em revisar os métodos básicos para a resolução dos sistemas formados por apenas duas equações com duas incógnitas.

Resolução de sistemas lineares 2×2

Há muitas técnicas eficientes de se resolver os sistemas desse tipo, sendo que três delas costumam ser estudadas no Ensino Fundamental Para revisá las, considere o sistema:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ -4x + 3y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & \vdots & 1 \\ -4 & 3 & \vdots & 9 \end{pmatrix}$$

Método da substituição

Escolher uma das equações do sistema. Por exemplo: $5x - 2y = 1$.

Escolher uma das variáveis da equação. Por exemplo: y.

Isolar a variável escolhida escrevendo-a como uma função da outra:

$$\begin{aligned} 5x - 2y &= 1 \\ 2y &= \quad 5x \; +1 \\ 2y &= 5x \quad 1 \\ y &= \frac{5x - 1}{2} \end{aligned}$$

Substituir a função obtida no lugar da variável escolhida presente na outra equação:

$$-4x + 3y = 9$$
$$\downarrow$$
$$-4x + 3 \cdot \left(\frac{5x \quad 1}{2} \right) = 9$$

Resolver a equação de primeiro grau obtida:

$$\begin{aligned} 4x + 3 \cdot \left(\frac{5x \quad 1}{2} \right) &= 9 \\ 4x + \frac{15x - 3}{2} &= 9 \\ \frac{-8x + 15x - 3}{2} &= \frac{18}{2} \\ 7x &= 18 + 3 \\ x &= \frac{21}{7} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Substituir o valor encontrado em $y = \frac{5x - 1}{2}$: $y = \frac{5 \cdot 3 \quad 1}{2} = \frac{15 \quad 1}{2} = \frac{14}{2} = 7$.

Como as equações de primeiro grau possuem soluções únicas, o par ordenado (3, 7) é a única série (x, y) que satisfaz ambas as equações do sistema e, portanto, o conjunto solução é:

$$S = \{(3, 7)\}$$

Método da comparação

Escolher uma das variáveis das equações. Por exemplo: *x*.

Isolar a variável escolhida escrevendo a como função da outra em cada equação.

Na equação I:

$$\begin{aligned} 5x - 2y &= 1 \\ 5x &= 1 + 2y \\ x &= \frac{1 + 2y}{5} \end{aligned}$$

Na equação II:

$$\begin{aligned} -4x + 3y &= 9 \\ -4x &= -3y + 9 \\ 4x &= 3y \quad 9 \\ x &= \frac{3y - 9}{4} \end{aligned}$$

Comparar as funções obtidas por meio de uma relação de igualdade:

$$\frac{1 + 2y}{5} = \frac{3y \quad 9}{4}$$

Efetuar o produto cruzado e resolver a equação de primeiro grau obtida:

$$\begin{aligned} 4(1 + 2y) &= 5(3y - 9) \\ 4 + 8y &= 15y - 45 \\ 8y - 15y &= -45 - 4 \\ 7y &= \quad 49 \\ y &= \frac{49}{7} \\ y &= 7 \end{aligned}$$

Substituir o valor encontrado em alguma das funções. Por exemplo, em $x = \frac{3y - 9}{4}$:

$$x = \frac{3 \cdot 7 \quad 9}{4} = \frac{21 \quad 9}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Portanto: (x, y) = (3, 7).

$$S = \{(3, 7)\}$$

Método da subtração

Escolher uma das variáveis e observar quais são os seus coeficientes em cada equação do sistema. Por exemplo:

- o coeficiente da variável *x* na equação I é o número 5;
- o coeficiente da variável *x* na equação II é o número   4.

Multiplicar todos os termos da equação I pelo coeficiente de *x* na equação II:

$$4 \cdot (5x \quad 2y = 1) \Rightarrow \quad 20x + 8y = \quad 4$$

Multiplicar todos os termos da equação II pelo coeficiente de *x* na equação I:

$$5 \cdot (-4x + 3y = 9) \Rightarrow -20x + 15y = 45$$

Subtrair, termo a termo, as duas novas equações obtidas:

$$\begin{array}{r} -20x + 8y = -4 \\ -20x + 15y = 45 \\ \hline 0x \quad 7y = \quad 49 \end{array} \Rightarrow y = 7$$

O mesmo processo pode ser feito com a outra variável.

- o coeficiente da variável *y* na equação I é o número   2;
- o coeficiente da variável *y* na equação II é o número 3.

Multiplicar todos os termos da equação I pelo coeficiente de *y* na equação II:

$$3 \cdot (5x \quad 2y = 1) \Rightarrow 15x \quad 6y = 3$$

Multiplicar todos os termos da equação II pelo coeficiente de *y* na equação I:

$$-2 \cdot (-4x + 3y = 9) \Rightarrow 8x - 6y = -18$$

Subtrair, termo a termo, as duas novas equações obtidas:

$$\begin{array}{r} 15x - 6y = \quad 3 \\ 8x - 6y = -18 \\ \hline 7x \quad 0y = \ 21 \end{array} \Rightarrow x = 3$$

Portanto:

$$S = \{(3, 7)\}$$

> **Atenção**
>
> Embora eficientes, os dois primeiros métodos apresentados (substituição e comparação) mostram-se consideravelmente longos quando aplicados a sistemas maiores, ou seja, formados por equações com três ou mais variáveis. Já este terceiro método é o que mais se aproxima das técnicas matriciais que estudaremos para resolver sistemas lineares com mais equações e variáveis.

Sistemas lineares genéricos

Os sistemas de equações são formas de se expressar, em linguagem algébrica, perguntas que têm uma série de números reais como resposta Nessa linguagem, é comum que:

- As últimas letras do alfabeto (z, y, x,) sejam usadas para representar os números da série incógnita, ou seja, os números que estão sendo procurados
- As primeiras letras do alfabeto (a, b, c,) sejam usadas para representar os parâmetros do sistema, ou seja, os valores que são conhecidos: os coeficientes das variá veis e os termos independentes de cada equação.

Assim, um sistema linear 2 × 2 genérico, por exemplo, pode ser representado por:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Classificação dos sistemas lineares

Os sistemas lineares também podem ser classificados de acordo com o número de elementos de seu conjunto solução.

De modo geral dizemos que um sistema linear é pos sível ou compatível quando ele admite ao menos uma solução, e que é impossível ou incompatível quando não admite solução alguma.

Os sistemas possíveis podem ser determinados ou in determinados, veja o quadro a seguir:

Tipo	Sigla	Conjunto solução
Sistema possível e determinado	SPD	Unitário
Sistema possível e indeterminado	SPI	Infinito
Sistema impossível	SI	Vazio

Sistema possível e determinado

Um sistema linear m × n é possível e determinado quando existe **apenas uma** série de *n* números reais que satisfaça todas as *m* equações que compõem o sistema.

No caso de sistemas 2 × 2, como $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$, isso ocorre apenas quando a série (a, b) de coeficientes da primeira equação não é diretamente proporcional à série (c, d) de coeficientes da segunda, ou seja:

$$a \cdot d \neq b \cdot c$$

Sistema possível e indeterminado

Um sistema linear m×n é possível e indeterminado quando existirem infinitas séries de *n* números reais que satisfazem todas as *m* equações do sistema

No caso dos sistemas 2×2, como $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ isso ocorre quando a série (a, b, e) de parâmetros da primeira equação é diretamente proporcional à série (c, d, f) de parâmetros da segunda equação, ou seja:

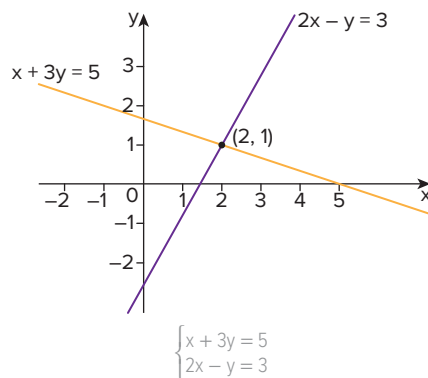
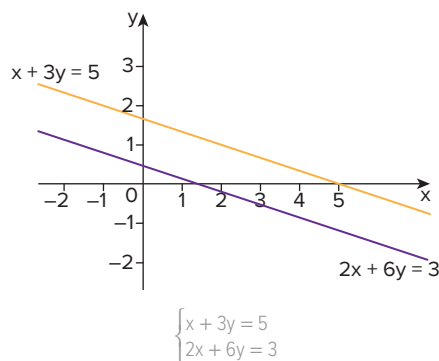
$$a \cdot d = b \cdot c \qquad a \cdot f = e \cdot c \qquad b \cdot f = e \cdot d$$

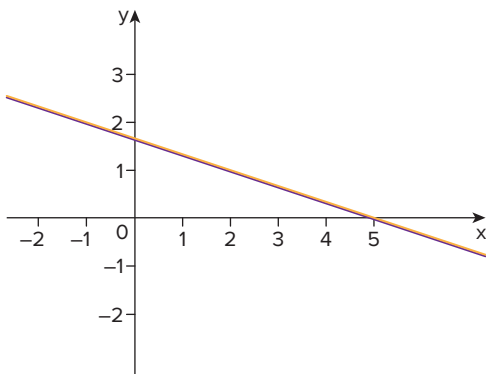
Sistema impossível

Um sistema linear m × n é impossível quando não existe nenhuma série de *n* números reais que satisfaça todas as *m* equações do sistema.

No caso dos sistemas 2 × 2, como $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ isso ocorre quando as séries (a, b) e (c, d) são diretamente proporcionais, mas as séries (a, b, e) e (c, d, f) não são, ou seja:

$$a \cdot d = b \cdot c \qquad a \cdot f \neq e \cdot c \qquad b \cdot f \neq e \cdot d$$

> **Saiba mais**
>
> No plano cartesiano, a representação gráfica de cada equação linear com até duas variáveis tem a forma de uma reta. Dessa forma, em relação aos sistemas 2×2, tem-se que:
>
> Se o sistema é possível e determinado, então as retas que represen tam suas equações são concorrentes entre si.
>
>
>
>
> $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$
>
> Neste caso, a série de coordenadas do ponto de intersecção das retas é única solução do sistema de equações.
>
> Se o sistema é impossível, então as retas que representam suas equações são paralelas e distintas. Exemplo:
>
>
>
>
> $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + 6y = 3 \end{cases}$
>
> Neste caso, não há ponto de interseção entre as retas

Saiba mais

Se o sistema é possível e indeterminado, então as duas equações do sistema são representadas pela mesma reta.

Neste caso, as séries de coordenadas de todos os pontos da reta são soluções do sistema

Exercício resolvido

6 Resolva e classifique os seguintes sistemas lineares:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x \quad \frac{y}{2} = \quad 1 \end{cases}$

Resolução:

Da segunda equação, $x = \frac{y}{2} \quad 1$ Substituindo essa ex pressão na primeira equação:

$$2 \cdot \left(\frac{y}{2} \quad 1\right) + 3y = 6$$
$$y - 2 + 3y = 6$$
$$4y = 8$$
$$y = 2$$

Então: $x = \frac{2}{2} - 1 = 1 - 1 = 0$.

Portanto, o sistema é possível e determinado e seu conjunto solução é $S = \{(0, 2)\}$

b) $\begin{cases} 2 - x = 3y \\ x + 5y = 2(y + 5) \end{cases}$

Resolução:

Da primeira equação, $x = 2 - 3y$. Substituindo essa expressão na segunda equação:

$$2 - 3y + 5y = 2y + 10$$
$$2 + 2y = 2y + 10$$
$$2 = 10$$

Como se trata de uma sentença fechada e falsa, o sistema é impossível e seu conjunto solução é $S = \varnothing$.

c) $\begin{cases} 2x - 5y = -6 \\ x + y = 3 \quad \frac{y}{2} \end{cases}$

Resolução:

Da segunda equação, $x = \frac{3y}{2} - 3$. Substituindo essa expressão na primeira equação:

$$2 \cdot \left(\frac{3y}{2} - 3\right) - 5y = -6$$
$$3y \quad 6 - 5y \quad 6$$
$$-2y = 0$$
$$y = 0$$

Então: $x = \frac{3 \cdot 0}{2} - 3 = 0 - 3 = -3$.

Portanto, o sistema é possível e determinado e seu conjunto solução é $S = \{(\quad 3, 0)\}$.

Sistema homogêneo

Os sistemas lineares formados apenas por equações homogêneas são denominados sistemas homogêneos.

Todo sistema m × n homogêneo é possível, pois admite pelo menos a solução trivial, que é a série nula formada cujos termos são todos iguais a zero: (0, 0, 0,). Sendo assim, não existe sistema homogêneo que seja impossível.

O sistema homogêneo 2 × 2, como $\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$ é:

- Determinado, quando as séries (a, b) e (c, d) não são proporcionais: $a \cdot d \neq b \cdot c$.
- Indeterminado, quando as séries (a, b) e (c, d) são proporcionais: $a \cdot d = b \cdot c$.

Fórmula resolutiva de um sistema 2×2

Considere um sistema linear 2 × 2 genérico:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Se $a \cdot d \quad b \cdot c \neq 0$ então, tem-se que:

$$x = \frac{e \cdot d \quad b \cdot f}{a \cdot d - b \cdot c} \qquad y = \frac{a \cdot f \quad e \cdot c}{a \cdot d - b \cdot c}$$

Saiba mais

Demonstração:

Multiplicando todos os termos de uma equação pelo coeficiente de *y* da outra equação:

$$d \cdot (ax + by = e) \Rightarrow adx + bdy = ed$$
$$b \cdot (cx + dy = f) \Rightarrow bcx + bdy = bf$$

Subtraindo, termo a termo, as duas novas equações obtidas:

$$\begin{array}{l} adx + bdy = ed \\ \underline{bcx + bcy = bf} \\ adx \quad bcx + 0y = ed \quad bf \Rightarrow (ad \quad bc)x = ed \quad bf \end{array}$$

Então, se $ad - bc \neq 0$, tem-se que $x = \frac{e \quad d \quad b \quad f}{a \cdot d - b \cdot c}$

Saiba mais

Multiplicando todos os termos de uma equação pelo coeficiente de *x* da outra equação:

$$a\left(cx + dy = f\right) \Rightarrow acx + ady = af$$

$$c \cdot \left(ax + by = e\right) \Rightarrow acx + bcy = ec$$

Subtraindo, termo a termo, as duas novas equações obtidas:

$$\begin{array}{c} acx + ady = af \\ \underline{acx + bcy = ec} \\ 0x + ady - bcy = af - ec \end{array} \Rightarrow (ad - bc)y = af - ec$$

Novamente, se $ad - bc \neq 0$, tem-se que $y = \dfrac{a \cdot f - e \cdot c}{a \cdot d - b \cdot c}$.

Escritas na linguagem algébrica tradicional das equações e funções, as fórmulas resolutivas dos sistemas lineares vistas aqui não parecem mesmo muito fáceis de se entender ou memorizar. Torna-se necessário, então, o uso de uma nova linguagem matemática, que chamamos de Álgebra Linear, proposta para simplificar o entendimento e os processos resolutivos dos sistemas lineares, até o ponto de torná-los computacionais.

A Álgebra Linear introduz novas estruturas matemáticas, como as matrizes, novos conceitos, como o de combinação linear e novas operações, como o produto interno e os determinantes.

Matrizes

Desde o início do capítulo algumas ideias matemáticas têm sido fundamentadas sobre o conceito intuitivo de série numérica ordenada, como os pares ordenados (x, y) e as trincas ordenadas (x, y, z), por exemplo. Muitas referências foram feitas às séries de *n* números reais:

$$s = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

Toda série finita, como essa, representa a imagem de alguma função de domínio ordinal $f: N \to \mathbb{R}$ com $N = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, tal que: $x = f(n)$.

Em muitos casos, há alguma expressão algébrica para essa função. Exemplos:

$$x = n + 3,\ n \in \{1, 2\} \Rightarrow s = (4, 5)$$

$$x = 2n,\ n \in \{1, 2, 3\} \Rightarrow s = (2, 4, 6)$$

$$x = n^2,\ n \in \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow s = (1, 4, 9, 16)$$

As matrizes são entidades matemáticas capazes de representar, de forma bidimensional, as imagens de funções também de domínio ordinal, mas com duas variáveis.

Indicamos a maioria das matrizes com letras maiúsculas como A, B ou C, por exemplo, deixando as formas minúsculas dessas letras para representar suas entradas. Os elementos ou entradas das matrizes ficam organizados em linhas e colunas e, para isso, os valores de suas entradas dependem de dois índices ordinais: um para indicar o número da linha e outro para indicar o número da coluna. Desta forma, a_{ij} representa a entrada localizada na linha i e coluna j de uma matriz A.

Matrizes são apresentadas em sua forma explícita como uma tabela de números compreendidos entre parênteses, colchetes ou barras verticais duplas. Veja o exemplo de uma matriz A com 4 linhas e 3 colunas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{Vmatrix}$$

Atenção

Toda entrada de uma matriz deve ser acompanhada de dois índices ordinais, assim, a entrada a_{32} de uma matriz A, por exemplo, não deve ser "a trinta e dois" e sim "a três dois", pois a_{32} indica que essa entrada localiza-se na 3ª linha e 2ª coluna da matriz.

Por isso, não é necessário separar os índices da linha e da coluna por uma vírgula ou qualquer outro tipo de pontuação. A não ser que a matriz estudada possua mais de 10 linhas ou colunas.

No caso de uma matriz com mais do que 10 linhas e colunas, uma entrada indicada por a_{112} teria sua localização expressa de forma ambígua, podendo estar tanto na 1ª linha e 12ª coluna quanto na 11ª linha e 2ª coluna. Em situações como essa os índices podem ser separados por uma vírgula. Assim:

- $a_{1,\,12}$ indica a entrada localizada na 1ª linha e 12ª coluna da matriz;
- $a_{11,\,2}$ indica a entrada localizada na 11ª linha e 2ª coluna da matriz.

Para formalizar as matrizes como entes algébricos deve-se, primeiramente, considerar as suas quantidades de linhas e colunas. Essas quantidades determinam o formato, também chamado de tamanho ou dimensão de uma matriz.

A representação $m \times n$ indica o tamanho de uma matriz A que possui *m* linhas e *n* colunas.

Agora, consideram-se dois subconjuntos ordinais de $\mathbb{N}$:

$I = \{1, 2, 3, ..., m\}$ será o conjunto dos índices das linhas da matriz A.

$J = \{1, 2, 3, ..., n\}$ será o conjunto dos índices das linhas da matriz A.

As entradas da matriz A apresentam a imagem de alguma função ordinal f, que tem o produto cartesiano dos conjuntos I e J como domínio e o conjunto $\mathbb{R}$ como contradomínio:

$$f : I \times J \to \mathbb{R}$$

Para indicar os elementos dos conjuntos I e J, considera-se também, um par de índices ordinais i e j, tais que: $i \in I$ e $j \in J$

$$i \in \{1, 2, 3, \quad , m\} \Rightarrow 1 \leq i \leq m$$
$$j \in \{1, 2, 3, \quad , n\} \Rightarrow 1 \leq j \leq n$$

Finalmente, dispondo-se da função f e dos valores de *m* e *n*, é possível declarar a matriz A através da seguinte sentença:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n} \Big| a_{ij} = f(i, j)$$

Veja o que designa cada letra nesta sentença:

A	Uma matriz
a	Cada entrada da matriz
i	Linha da entrada
j	Coluna da entrada
m	Quantidade de linhas da matriz
n	Quantidade de colunas da matriz
f	Função que estabelece a lei de formação das entradas da matriz

Em sua forma explícita, a matriz pode ser representada por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mm} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ quando } m < n$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}, \text{ quando } m = n$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ quando } m > n$$

A existência de uma matriz também pode ser declarada sem que os valores de suas entradas sejam fornecidos. Nesses casos basta informar o tamanho da matriz como índice da letra escolhida para designar a matriz. Assim, uma matriz A, com *m* linhas e *n* colunas, fica representada simplesmente por:

$$A_{mxn}$$

O número de entradas de uma matriz A_{mxn} é igual a $m \cdot n$. Uma matriz $A_{5 \times 3}$, por exemplo, possui um total de $5 \cdot 3 = 15$ entradas.

Lei de formação

As funções de duas variáveis ordinais f(i, j) que estabelecem as relações entre os valores das entradas da matriz e os índices i e j de sua localização são denominadas leis de formação da matriz Em muitos casos, essas funções podem ser expressas algebricamente Exemplos:

A matriz $A = (a_{ij})_{4x3}$ em que $a_{ij} = i \quad j$ é:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \quad 1 & 1 \quad 2 & 1 \quad 3 \\ 2 \quad 1 & 2 \quad 2 & 2 \quad 3 \\ 3 - 1 & 3 - 2 & 3 - 3 \\ 4 - 1 & 4 - 2 & 4 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz $B = (b_{ij})_{2x4}$ em que $b_{ij} = i \cdot j^2$ é:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1^2 & 1 \cdot 2^2 & 1 \cdot 3^2 & 1 \cdot 4^2 \\ 2 \cdot 1^2 & 2 \cdot 2^2 & 2 \cdot 3^2 & 2 \cdot 4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 2 & 8 & 18 & 32 \end{pmatrix}$$

A matriz $C = (c_{ij})_{3x3}$ em que $c_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i < j \\ i \cdot j, \text{ se } i \geq j \end{cases}$ é:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 1 + 2 & 1 + 3 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 + 3 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Exercício resolvido

7 Escreva explicitamente a matriz A_{3x4} em que $a_{ij} = i^2 - j$.

Resolução:

Do tamanho 3×4 da matriz tem-se que $1 \leq i \leq 3$ e que $1 \leq j \leq 4$.
Por fim, para cada combinação possível de valores de i e de j, encontramos o valor de a_{ij}:

$a_{11} = 1^2 - 1 = 0$
$a_{21} = 2^2 - 1 = 3$
$a_{31} = 3^2 - 1 = 8$

$a_{12} = 1^2 - 2 = -1$
$a_{22} = 2^2 - 2 = 2$
$a_{32} = 3^2 - 2 = 7$

$a_{13} = 1^2 - 3 = -2$
$a_{23} = 2^2 - 3 = 1$
$a_{33} = 3^2 - 3 = 6$

$a_{14} = 1^2 - 4 = -3$
$a_{24} = 2^2 - 4 = 0$
$a_{34} = 3^2 - 4 = 5$

Finalmente, organizamos o resultado em uma matriz 3×4:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Filas de uma matriz

As filas de uma matriz são suas linhas e colunas. As diagonais de uma matriz não são consideradas filas, de modo que uma matriz A de tamanho $m \times n$ possui exatamente $m + n$ filas.

As matrizes $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 2 & 8 & 18 & 32 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, usadas como exemplos no tópico anterior, possuem 6 filas cada, sendo que em B há 2 linhas e 4 colunas e em C há 3 linhas e 3 colunas.

Toda entrada de uma matriz pertence a duas filas da matriz, sendo localizada na interseção de uma linha com uma coluna.

! Atenção

É norma da Álgebra Linear que em toda referência ao tamanho de uma matriz ou à posição de alguma de suas entradas, deve-se obedecer à ordem: linha antes, coluna depois.

Exercício resolvido

8 **PUC-RS** No projeto Sobremesa Musical, o Instituto de Cultura da PUCRS realiza apresentações semanais gratuitas para a comunidade universitária.

O número de músicos que atuaram na apresentação de número j do i-ésimo mês da primeira temporada de 2009 está registrado como o elemento a_{ij} da matriz abaixo:

$$\begin{bmatrix} 43 & 12 & 6 & 6 & 5 \\ 43 & 5 & 5 & 12 & 12 \\ 43 & 13 & 20 & 13 & 0 \\ 3 & 5 & 54 & 43 & 43 \end{bmatrix}$$

A apresentação na qual atuou o maior número de músicos ocorreu na ______ semana do ______ mês.

A quinta segundo
B quarta quarto
C quarta terceiro
D terceira quarto
E primeira terceiro

Resolução:

A maior entrada da matriz é o número 54, localizado na interseção da 4ª linha com a 3ª coluna. Logo, i = 4 e j = 3. Como *i* indica o mês e *j* o número da apresentação, esses 54 músicos fizeram a **terceira** apresentação semanal do **quarto** mês.
Alternativa: **D**.

Tipos de matrizes

As matrizes são classificadas sob muitos aspectos diferentes. Podem ser de acordo com:

- o formato ou tamanho da matriz;
- os valores de suas entradas;
- suas propriedades algébricas.

Matriz linha e matriz coluna

Toda matriz de tamanho m×n pode ser chamada de:

- Matriz linha quando m = 1 e n > 1;
- Matriz coluna quando n = 1 e m > 1.

Tanto as matrizes linhas quanto as matrizes colunas podem ser chamadas de vetores e designadas por letras minúsculas, mesmo que não haja conotação geométrica em sua interpretação. Exemplos:

$u = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{bmatrix}$ é uma matriz linha de quatro entradas.

$v = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$ é um vetor coluna de três entradas.

Matriz retangular e matriz quadrada

Toda matriz de tamanho m×n pode ser chamada de:

- Matriz retangular quando m ≠ n;
- Matriz quadrada quando m = n.

Quando uma matriz é quadrada, seu tamanho é do tipo n×n e o valor de *n* é chamado de ordem da matriz. Assim:

$A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de primeira ordem ou de ordem 1.

$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de segunda ordem ou de ordem 2.

$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{11} \\ c_{21} & c_{22} & c_{21} \\ c_{31} & c_{32} & c_{31} \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de terceira ordem ou de ordem 3.

A ordem de uma matriz quadrada também pode ser apresentada no lugar do formato, como índice da letra escolhida para designar a matriz. Assim, uma matriz quadrada A de ordem *n* pode ser representada por A_n.

$$A_n = A_{n \times n}$$

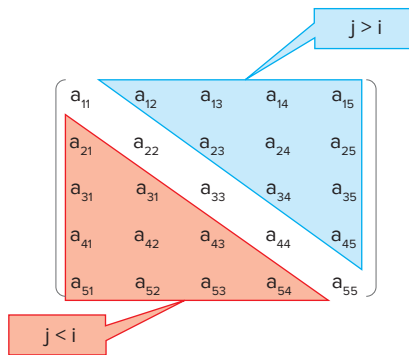
Em toda matriz quadrada A de ordem n > 1, além das filas (linhas e colunas), há duas outras séries de entradas a_{ij} com nomes específicos.

A série em que i = j chama-se diagonal principal e esses elementos estão em destaque no exemplo a seguir:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

A série em que i + j = n + 1 chama-se diagonal secundária e esses elementos estão em destaque no exemplo a seguir:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

É importante observar também que nas entradas a_{ij} localizadas acima da diagonal principal temos que j > i, e nas localizadas abaixo desta diagonal tem-se j < i. Note no exemplo:

Matrizes triangulares e matriz diagonal

As matrizes quadradas cujas entradas situadas acima ou abaixo da diagonal principal são todas nulas, também podem ser chamadas de matrizes triangulares. Assim, há dois casos a serem considerados:

- Se $a_{ij} = 0$ quando $i > j$ tem-se uma matriz triangular superior

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

- Se $a_{ij} = 0$ quando $i < j$ tem-se uma matriz triangular inferior.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

As matrizes quadradas cujas entradas situadas acima e abaixo da diagonal principal são todas nulas, também podem ser camadas de matrizes diagonais.

Se $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$ tem-se uma matriz diagonal.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

Saiba mais

As relações entre os índices *i* e *j* das entradas a_{ij} localizadas nas diagonais paralelas à diagonal principal podem ser apresentadas na forma de uma diferença constante

Assim, a relação $i - j = 0$ localiza as entradas da diagonal da principal e:

- $i - j = -1$ localiza a diagonal logo acima da principal;
- $i - j = 1$ localiza a diagonal logo abaixo da principal;
- $i - j = -2$ localiza a segunda diagonal acima da principal;
- $i - j = 2$ localiza a segunda diagonal abaixo da principal;
- $i - j = -3$ localiza a terceira diagonal acima da principal;
- $i - j = 3$ localiza a terceira diagonal abaixo da principal.

Saiba mais

Além disso, as relações desses índices nas diagonais paralelas à diagonal secundária podem ser apresentadas na forma de uma soma constante. Assim, em uma matriz quadrada de ordem 5, por exemplo, tem-se que:

⋮

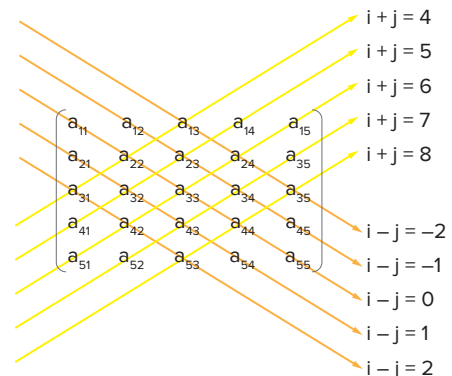
$i + j = 4$ localiza a segunda diagonal acima da secundária;

$i + j = 5$ localiza a diagonal logo acima da secundária;

$i + j = 6$ localiza a diagonal secundária;

$i + j = 7$ localiza a diagonal logo abaixo da secundária;

$i + j = 8$ localiza a diagonal logo abaixo da secundária;

⋮

Matriz nula

É chamada de matriz nula qualquer matriz cujas entradas sejam todas iguais a zero. As matrizes nulas costumam ser indicadas pela letra O acompanhada do seu respectivo tamanho:

$$O = (a_{ij})_{m \times n} \mid a_{ij} = 0$$

Exemplos:

$$O_{3\times2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad O_{2\times1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matriz identidade

Toda matriz diagonal cujas entradas não nulas valem 1 é chamada de matriz identidade As matrizes identidades costumam ser indicadas pela letra I acompanhada de sua respectiva ordem

$$I = (a_{ij})_{n \times n} \left| \begin{matrix} a_{ij} = 1 \text{ se } i = j \\ a_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j \end{matrix} \right.$$

Exemplos:

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de 2ª ordem

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ é a matriz identidade de 3ª ordem}$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ é a matriz identidade de 4ª ordem}$$

Igualdade de matrizes

Duas matrizes são consideradas iguais quando tiverem:

- o mesmo tamanho;
- as mesmas entradas em cada posição.

Sendo A e B duas matrizes de tamanhos m×n e p×q:

$$A_{m \times n} = B_{p \times q} \Leftrightarrow \begin{cases} p = m \\ q = n \\ a_{ij} = b_{ij} \end{cases}$$

Exercício resolvido

9 Considere os números reais x, y e z que satisfazem a igualdade matricial a seguir:

$$\begin{bmatrix} x^2 & y \\ y+1 & -4 \\ 7 & -5x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & z+1 \\ 4 & 4 \\ 7 & x^2 \end{bmatrix}$$

O valor de $x + y + z$ é

A 0

B 1

C 1

D 2

E −2

Resolução:

Sendo a_{ij} e b_{ij} as respectivas entradas dessas matrizes:

$a_{11} = b_{11} \Rightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x \in \{5, \ 5\}$

$a_{32} = b_{32} \Rightarrow \ 5x = x^2 \Leftrightarrow x \in \{0, \ 5\}$

Como *x* deve satisfazer ambas as equações, tem-se: $x = \ 5$.

$a_{21} = b_{21} \Rightarrow y + 1 = 4 \Leftrightarrow y = 3$

$a_{12} = b_{12} \Rightarrow y = z + 1 \Leftrightarrow z = 2$

Portanto: $x + y + z = -5 + 3 + 2 = 0$

Alternativa: A

Matriz transposta

Duas matrizes são consideradas transpostas uma da outra, quando as séries das linhas de uma são iguais às séries de colunas da outra, na mesma ordem, ou seja:

- a primeira linha de uma matriz é igual à primeira coluna da outra.
- a segunda linha de uma matriz é igual à segunda coluna da outra.

Transpor uma matriz é uma operação em que as linhas da matriz transformam-se, ordenadamente, em colunas.

Indicamos por A^T (ou A^t) a matriz transposta de uma matriz A. Assim, sendo A e B matrizes de tamanhos $m \times n$ e $p \times q$:

$$\left(A_{m \times n}\right)^T = B_{p \times q} \Leftrightarrow \begin{cases} p = n \\ q = m \\ a_{ij} = b_{ji} \end{cases}$$

Exemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 10 \\ 6 & 4 & 0 & 20 \\ 2 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & -3 & 1 & 40 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & 20 & 30 & 40 \end{pmatrix}$$

A transposta de uma matriz linha é uma matriz coluna e vice-versa.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

A transposição de matrizes é uma operação dual. Isso significa que duas aplicações sucessivas dessa mesma operação resultam na matriz original, ou seja, é uma operação que anula a si mesma

$$\left(A^T\right)^T = A$$

Na operação de transposição de uma matriz quadrada, as entradas da diagonal principal permanecem em suas mesmas posições.

Para transpor uma matriz quadrada de segunda ordem, basta permutar (trocar de posição) as entradas da diagonal secundária:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Exercício resolvido

10 UFSCar Seja a matriz $M = (m_{ij})_{2 \times 3}$ tal que $m_{ij} = j^2 \quad i^2$.

a) Escreva M na forma matricial explícita.

b) Escreva M^T, a transposta da matriz M.

Resolução:

a) As entradas da primeira coluna (j = 1) são:

$m_{11} = 1^2 - 1^2 = 1 - 1 = 0$

$m_{21} = 1^2 - 2^2 = 1 - 4 = -3$

As entradas da segunda coluna (j = 2) são:

$m_{12} = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$

$m_{22} = 2^2 - 2^2 = 4 - 4 = 0$

E, as entradas da terceira coluna (j = 3) são:

$m_{13} = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$

$m_{23} = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$

Logo: $M = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

b) A matriz transposta de M é a matriz $M^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$.

Saiba mais

Matriz simétrica

As matrizes que permanecem iguais após a operação de transposição são denominadas matrizes simétricas. São matrizes simétricas apenas as matrizes quadradas tais que:

$$A^T = A$$

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Exemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x & a & b \\ a & y & c \\ b & c & z \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x & a & b \\ a & y & c \\ b & c & z \end{pmatrix}$$

Particularmente, as matrizes identidades são matrizes simétricas, assim como todas as matrizes nulas que forem quadradas.

Adição de matrizes

Dadas duas matrizes A e B de tamanhos m×n e p×q, se m = p e n = q então existe uma matriz C tal que C = A + B, cujas entradas são iguais às somas das entradas de A e B de mesmas posições

$$A_{m \times n} + B_{p \times q} = C_{r \times s} \Leftrightarrow \begin{cases} r = p = m \\ s = q = n \\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \end{cases}$$

Exemplos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 1 \\ 2 & 8 & 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 & 6+4 & 1+9 & 6+1 \\ 1+2 & 2+8 & 1+8 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 10 & 7 \\ 3 & 10 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 8 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2 & -1+1 & -2+3 \\ 1+0 & 0+3 & 1 \quad 1 \\ 2-3 & 1+0 & 0+5 \\ 3+8 & 2+4 & 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 11 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Propriedades da adição de matrizes

A adição de matrizes só está definida quando elas têm o mesmo tamanho. Além disso, o resultado dessa operação deve ter o mesmo tamanho que o das matrizes somadas.

A adição de matrizes possui as seguintes propriedades:

- Propriedade associativa: (A + B) + C = A + (B + C)
- Propriedade comutativa: A + B = B + A
- As matrizes nulas são os elementos neutros da adição de matrizes: A + O = A
- A matriz transposta da soma é igual à soma das matrizes transpostas: $(A + B)^T = A^T + B^T$

Exercício resolvido

11 **AFA** Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$. Se A^t e B^t são as matrizes transpostas de A e B, respectivamente, então $A^t + B^t$ é igual a

A $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

Resolução:

Como $A^t + B^t = (A + B)^t$ há duas possibilidades para a resolução desta questão:

Solução 1

Efetuar primeiro as transposições e depois a adição:

$$A^t + B^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Solução 2

Efetuar primeiro a adição e depois a transposição da soma.

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Alternativa: **A**.

Multiplicação de matriz por número real

A soma de matrizes iguais pode ser abreviada como a multiplicação de uma matriz por um número natural. Por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & x \\ 3 & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & x \\ 3 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 0+0 \\ -2+(-2) & x+x \\ 3+3 & y+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 2x \\ 6 & 2y \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & x \\ 3 & y \end{bmatrix}$$

Assim:

$$A + A = 2 \cdot A$$
$$A + A + A = 3 \cdot A$$
$$\vdots$$
$$\underbrace{A + A + A + \ldots + A}_{n} = n \cdot A$$

A multiplicação de uma matriz por um número real é uma extensão desse conceito:

$$B_{p \times q} = \lambda \cdot A_{m \times n} \Leftrightarrow \begin{cases} p = m \\ q = n \\ b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} \end{cases}$$

Exemplos:

$$-5 \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot (-5) & -2 \cdot (-5) \\ 2 \cdot (\ \ 5) & 3 \cdot (\ \ 5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & \sqrt{2}\\ 3 & \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot\sqrt{2} & 0\cdot\sqrt{2}\\ -2\cdot\sqrt{2} & \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\\ 3\cdot\sqrt{2} & \sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\ -2\sqrt{2} & 2\\ 3\sqrt{2} & \sqrt{6}\end{pmatrix}$$

Em contrapartida, se todas as entradas de uma matriz forem múltiplos de um mesmo número real λ, esse número pode ser colocado em evidência do lado de fora da matriz.

Exemplos:

$$\begin{pmatrix}400 & 200\\ 600 & 1000\end{pmatrix}=200\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & -\pi & \frac{\pi}{3}\\ \pi & -\frac{\pi}{2} & -\pi\\ -2\pi & 0 & 0\\ 3\pi & \frac{\pi}{6} & \pi\end{pmatrix}=\pi\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & \frac{1}{3}\\ 1 & -\frac{1}{2} & -1\\ -2 & 0 & 0\\ 3 & \frac{1}{6} & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda a & \lambda x\\ \lambda b & \lambda y\\ \lambda c & \lambda z\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}a & x\\ b & y\\ c & z\end{pmatrix}$$

Propriedades da multiplicação de matriz por número real

Considerando os números reais α e β além de duas matrizes de mesmo tamanho A e B, a operação de multiplicação entre uma matriz e um número real obedece às seguintes propriedades:

Propriedade comutativa: $\alpha \cdot A = A \cdot \alpha$.

- Propriedade associativa: $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$.
- O número 1 é o elemento neutro dessa operação: $1 \cdot A = A$.

Há também duas propriedades distributivas a serem observadas:

- Em relação à adição de números reais: $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$.
- Em relação à adição de matrizes: $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$.
- Essa operação não é afetada pela transposição de matrizes: $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$.
- Se uma matriz for multiplicada por zero, o resultado será uma matriz nula: $0 \cdot A = O$.

Matriz oposta e subtração de matrizes

Quando duas matrizes são somadas e o resultado obtido é uma matriz nula, essas matrizes são denominadas opostas Indica-se por A a matriz oposta de uma matriz A:

$$A + A = O$$

Pode-se obter a matriz oposta de uma matriz A, multiplicando todas as entradas dessa matriz pelo número 1 Exemplo:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -4\end{pmatrix}\Rightarrow\quad A = \ 1\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

A operação de subtração de matrizes pode ser substituída pela soma da primeira matriz com a oposta da segunda matriz:

$$A \quad B = A + (-B)$$

Exemplos:

$$\begin{pmatrix}3 & 6 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1 & 4 & 9\\ 2 & 8 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 4 & 9\\ 2 & 8 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+1 & 6 \quad 4 & 1 \quad 9\\ 1 \quad 2 & 2 \quad 8 & 1+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2 & 8\\ 1 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 5\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\ 4\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+3\\ 2 \quad 4\\ 5-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 6\\ 3\end{pmatrix}$$

FRENTE 2

Saiba mais

Matriz antissimétrica

As matrizes que após a operação de transposição ficam iguais às suas matrizes opostas são denominadas matrizes antissimétricas.

São matrizes antissimétricas apenas as matrizes quadradas tais que:

$$A + A^T = 0$$

$$a_{ij} + a_{ji} = 0$$

As entradas da diagonal principal de uma matriz antissimétrica devem ser todas nulas.

Exemplos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 4 & 0 & -6 \\ -5 & 6 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & 6 \\ 5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercícios resolvidos

12 Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ determine a matriz $M = A - B^t + 2C$.

Resolução:

Como as matrizes B^t e $2C$ são, respectivamente $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$, temos que a matriz M é:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 18 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

13 Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, determine a matriz $M = A + B \quad 3C + 5D^T$

Resolução:

Como as matrizes $-3C$ e $5D^T$ são, respectivamente $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$, tem-se:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2-3 & 0 & 2+0-3 & 10 \\ 0+1-3+5 & & 3+2-6+15 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$$

14 **UFSC** Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$, determine as matrizes X e Y que são soluções do sistema:

$$\begin{cases} 2X + Y = A \\ 3X + 2Y = B \end{cases}$$

Resolução:

Para resolver um sistema como esse, recomenda-se primeiro obter expressões literais para as matrizes X e Y em função das matrizes A e B para, depois disso, substituir as matrizes A e B pelas suas formas explícitas.

Então, isolando a matriz Y na primeira equação, tem-se:

$$2X + Y = A \Leftrightarrow Y = A \quad 2X$$

Substituindo a expressão obtida na segunda equação, tem-se:

$$3X + 2(A - 2X) = B$$

$$3X + 2A \quad 4X = B$$

$$X = B \quad 2A$$

$$X = -B + 2A$$

Agora, substiuindo as formas explícitas de A e B nessa última expressão, tem-se:

$$X = -\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & 3+2 \\ -5+10 & -9+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

E, finalmente, substituindo as formas explícitas de A e X ne expressão com a matriz Y isolada, tem-se:

$$Y = A - 2X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -10 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1+2 \\ 5-10 & 3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$$

15 A é a matriz quadrada de terceira ordem cujas entradas são tais que $a_{ij} = i - 2j$. Determine a matriz X que é solução da equação matricial $(X - 3 \cdot I)^t + A = O$ em que I e O são respectivamente a matriz identidade e a matriz nula, ambas de terceira ordem.

Resolução:

De $a_{ij} = i \quad 2j$ tem se que a matriz quadrada A na sua forma explícita é:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \quad 2 \cdot 1 & 1 \quad 2 \cdot 2 & 1 \quad 2 \cdot 3 \\ 2 \quad 2 \cdot 1 & 2 \quad 2 \cdot 2 & 2 \quad 2 \cdot 3 \\ 3 - 2 \cdot 1 & 3 - 2 \cdot 2 & 3 - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Antes de substituir a forma explicita na equação matricial $(X \quad 3 \cdot I)^t = A = O$ recomenda-se isolar a matriz X Assim, somando a matriz oposta de A em ambos os membros da equação:

$$(X \quad 3 \cdot I)^t + A \quad A = O \quad A$$
$$(X \quad 3 \cdot I)^t += O = O \quad A$$

Então, como O é elemento neutro da adição de matrizes:

$$(X - 3 \cdot I)^t = -A$$

Transpondo ambos os membros da última equação:

$$\left((X \quad 3 \cdot I)^t\right)^t = (\ A)^t$$

$$X - 3 \cdot I = -A^t$$

Agora, somando a matriz $3 \cdot I$ em ambos os membros:

$$X \quad 3 \cdot I + 3 \cdot I = \ A^t + 3 \cdot I$$
$$X + O = -A^t + 3 \cdot I$$
$$X = \ A^t + 3 \cdot I$$

Finalmente, substituindo as matrizes A e I pelas suas formas explícitas, tem se:

$$X = -\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}^t + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

16 Chamamos de antissimétricas as matrizes quadradas A tais que $A^t = -A$. Sabe-se que M é antissimétrica:

$$M = \begin{pmatrix} x+1 & a & b \\ x & y+3 & c \\ y & z & 6 \quad 3z \end{pmatrix}$$

Os termos a, b e c, de M, valem, respectivamente:

A –1, –3 e 2
B 1, 3 e –2
C 1, –3 e –2
D –3, 1 e 2
E –1, 2 e –3

Resolução:

$$M^t = -M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+1 & x & y \\ a & y+3 & z \\ b & c & 6 \quad 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \quad 1 & a & b \\ -x & -y-3 & -c \\ -y & -z & -6+3z \end{pmatrix}$$

Da diagonal principal, temos: $x = 1$, $y = 3$ e $z = 2$.
Do restante das entradas, temos que $a = -x$, $b = -y$ e $z = -c$, logo, $a = 1$, $b = 3$ e $c = -2$.
Alternativa: **B**.

Multiplicação de matrizes

A multiplicação de matrizes não é uma operação tão intuitiva quanto a adição ou a multiplicação de matriz por um número real. Não se trata então de multiplicar as entradas que ocupam a mesma posição em duas matrizes de mesmo tamanho, mas sim de efetuar uma série de produtos internos entre as séries que são linhas de uma matriz e as séries que são colunas da outra.

O primeiro aspecto que deve ser observado em uma multiplicação de matrizes é a relação entre os tamanhos das matrizes multiplicadas e o tamanho da matriz resultante dessa operação.

Dadas duas matrizes A e B de tamanhos $m \times n$ e $p \times q$, apenas quando $n = p$ é que existe uma matriz C de tamanho $m \times q$ tal que $A \cdot B = C$. Caso contrário, o produto das matrizes A e B é inexistente.

$$A_{m \times n} \cdot B_{p \times q} = C_{r \times s} \Leftrightarrow \begin{cases} n = p \\ m = r \\ q = s \end{cases}$$

Pode ser mais fácil entender a relação entre os tamanhos das matrizes observando um exemplo prático.

A seguinte matriz apresenta o quanto comem dois amigos, sempre que vão juntos a alguma lanchonete

	Hambúrguer	Batata frita	Refrigerante	Torta de maçã
Adriana	1	0	2	1
Roberto	2	1	0	3

O tamanho 2x4 dessa matriz A é devido tanto ao número de pessoas quanto ao número de opções de alimento. Assim, pode-se entender A como uma matriz de pessoas por alimentos:

$$A_{\text{pessoas} \times \text{alimentos}}$$

A próxima matriz apresenta os preços unitários dos mesmos alimentos em diferentes lanchonetes.

	Mc'Ronalds	Burguer-Ring	Rob's
Hambúrguer	R$ 8,00	R$ 10,00	R$ 9,00
Batata frita	R$ 5,00	R$ 4,00	R$ 4,50
Refrigerante	R$ 4,00	R$ 4,50	R$ 4,00
Torta de maçã	R$ 5,00	R$ 4,00	R$ 3,00

Analogamente, o tamanho 4x3 dessa matriz B é devido tanto ao número de alimentos quanto ao número de lancho netes. Assim, pode-se entender B como uma matriz de alimentos por lanchonetes:

$$B_{\text{alimentos} \times \text{lanchonetes}}$$

A multiplicação das matrizes A e B deve produzir uma matriz C que apresente o custo da refeição de cada amigo em cada lanchonete, ou seja, C é uma matriz de pessoas por lanchonetes.

$$A_{\text{pessoas} \times \underline{\text{alimentos}}} \cdot B_{\underline{\text{alimentos}} \times \text{lanchonetes}} = C_{\text{pessoas} \times \text{lanchonetes}}$$
$$\nwarrow = \nearrow$$

Como há 2 pessoas e 3 lanchonetes, o produto A · B = C deve ter tamanho 2 × 3.

$$A_{2\times4} \cdot B_{4\times3} = C_{2\times3}$$

	Mc'Ronalds	Burguer-Ring	Rob's
Adriana	c_{11}	c_{12}	c_{13}
Roberto	c_{21}	c_{22}	c_{23}

Cada entrada c_{ij} da nova matriz deve ser obtida efetuando-se o produto interno da linha *i* da matriz A pela coluna j da matriz B:

$$c_{11} = \langle \text{Adriana, Mc'Ronalds} \rangle = 1 \cdot 8{,}00 + 0 \cdot 5{,}00 + 2 \cdot 4{,}00 + 1 \cdot 5{,}00 = 21{,}00$$
$$c_{21} = \langle \text{Roberto, Mc'Ronalds} \rangle = 2 \cdot 8{,}00 + 1 \cdot 5{,}00 + 0 \cdot 4{,}00 + 3 \cdot 5{,}00 = 36{,}00$$
$$c_{12} = \langle \text{Adriana, Burger-Ring} \rangle = 1 \cdot 10{,}00 + 0 \cdot 4{,}00 + 2 \cdot 4{,}50 + 1 \cdot 4{,}00 = 23{,}00$$
$$c_{22} = \langle \text{Roberto, Burger-Ring} \rangle = 2 \cdot 10{,}00 + 1 \cdot 4{,}00 + 0 \cdot 4{,}50 + 3 \cdot 4{,}00 = 36{,}00$$
$$c_{13} = \langle \text{Adriana, Rob's} \rangle = 1 \cdot 9{,}00 + 0 \cdot 4{,}50 + 2 \cdot 4{,}00 + 1 \cdot 3{,}00 = 20{,}00$$
$$c_{23} = \langle \text{Roberto, Rob's} \rangle = 2 \cdot 9{,}00 + 1 \cdot 4{,}50 + 0 \cdot 4{,}00 + 3 \cdot 3{,}00 = 31{,}50$$

Preenchendo corretamente as entradas da matriz C, tem-se:

	Mc'Ronalds	Burguer-Ring	Rob's
Adriana	R$ 21,00	R$ 23,00	R$ 20,00
Roberto	R$ 36,00	R$ 36,00	R$ 31,50

Observe que, para haver o produto de duas matrizes, é necessário que o número de colunas da primeira matriz seja igual ao número de linhas da segunda Nesse caso, o produto terá o mesmo número de linhas da primeira matriz e o mesmo número de colunas da segunda.

Assim, dadas duas matrizes A e B de tamanhos m×n e n×p:

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p} \Leftrightarrow c_{ij} = \langle \text{linha i de A, coluna j de B} \rangle$$

Exercícios resolvidos

17 Considere as matrizes: A_{3x2}, B_{2x3} e C_{3x3}. Assinale a alternativa que apresenta um produto inexistente:

A A · B
B B · A
C C · A
D $A^T \cdot C$
E $B^T \cdot C$

Resolução:

Transpondo a matriz B_{2x3} obtem-se $(B^T)_{3x2}$, cujo número de colunas (2) não coincide com o número de linhas (3) da matriz C.
Portanto, não existe o produto $B^T \cdot C$.
Alternativa: E.

18 Dadas duas matrizes A_{3x4} e B_{3x5} considere outras matrizes X e Y tais que A · X · B = Y.
Nessas condições pode-se afirmar que:

A o produto X · Y resulta numa matriz 4×5.
B o produto Y · X resulta numa matriz 3×4
C o produto X · Y resulta numa matriz 5×3.
D o produto Y · X resulta numa matriz 3×3.
E não existe o produto X · Y.

Resolução:

Sendo m × n o formato da matriz X, para que exista o produto $A_{3x4} \cdot X_{mxn}$, é necessário que *m* seja igual a 4 e, como a multiplicação de matrizes é associativa, para que exista o produto $X_{mxn} \cdot B_{3x5}$, é necessário que *n* seja igual a 3. Portanto, temos que o formato da matriz X é 4 × 3.
Como a matriz Y resulta do produto A · X · B, concluímos que Y tem o mesmo número de linhas da matriz A e o mesmo número de colunas da matriz B, ou seja, o formato da matriz Y é 3×5.
Sendo assim, não existe o produto Y · X, e o produto X · Y tem formato 4×5.
Alternativa: **A**.

19 Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, calcule o produto A · B.

Resolução:

Observando os tamanhos das matrizes A_{3x4} e B_{4x2} conclui-se que o produto A · B existe e deve ser uma matriz $C_{3x2} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$. Então, calculando suas entradas:

$$c_{11} = \langle \text{linha 1 de A, coluna 1 de B} \rangle = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 5 + 8 + 9 + 8 = 30$$
$$c_{12} = \langle \text{linha 1 de A, coluna 2 de B} \rangle = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 = 3 + 4 - 3 + 0 = 4$$
$$c_{21} = \langle \text{linha 2 de A, coluna 1 de B} \rangle = 3 \cdot 5 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 15 + 0 + 6 + 10 = 31$$
$$c_{22} = \langle \text{linha 2 de A, coluna 2 de B} \rangle = 3 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 = 9 + 0 - 2 + 0 = 7$$
$$c_{31} = \langle \text{linha 3 de A, coluna 1 de B} \rangle = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 10 + 12 + 0 + 4 = 26$$
$$c_{32} = \langle \text{linha 3 de A, coluna 2 de B} \rangle = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = 6 + 6 + 0 + 0 = 12$$

Logo: $C = \begin{pmatrix} 30 & 4 \\ 31 & 7 \\ 26 & 12 \end{pmatrix}$.

20 **UFRN 2013** Considere, a seguir, uma tabela com as notas de quatro alunos em três avaliações e a matriz M formada pelos dados dessa tabela

	Avaliação 1	Avaliação 2	Avaliação 3
Thiago	8	9	6
Maria	6	8	7
Sônia	9	6	6
André	7	8	9

$$M = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 6 \\ 6 & 8 & 7 \\ 9 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

O produto $\frac{1}{3} M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ corresponde à média:

A de todos os alunos na Avaliação 3
B de cada avaliação
C de cada aluno nas três avaliações
D de todos os alunos na Avaliação 2

Resolução:

Sendo $S = M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, temos que S é uma matriz coluna com quatro linhas, cada uma com a soma das notas de um aluno diferente Assim, o produto $\frac{1}{3}S$ é uma matriz que apresenta as médias de cada aluno nas três avaliações
Alternativa: **C.**

Propriedades da multiplicação de matrizes

Depois de assimilar as relações entre os tamanhos de duas matrizes que permitem sua multiplicação e a relação deles com o tamanho da matriz resultante, algumas propriedades podem ser enunciadas sem que seja necessário ficar indicando o tamanho de cada matriz

A multiplicação de matrizes é uma operação associativa:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Embora haja exceções, como matrizes nulas, identidades e outras, a multiplicação de matrizes não é uma operação comutativa Assim, via de regra, tem-se que:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

As matrizes identidades são os elementos neutros dessa operação:

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

Se uma matriz for multiplicada por uma matriz nula, o resultado também será uma matriz nula de tamanho adequado:

$$O \cdot A = A \cdot O = O$$

A matriz transposta do produto é igual ao produto das matrizes transpostas em ordem contrária:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

O produto de matrizes comuta com a multiplicação por número real:

$$\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$$

! Atenção

Na álgebra dos números reais, se um produto é igual a zero, então um dos fatores também tem que ser igual a zero:

$$x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0$$

Mas a álgebra das matrizes admite a existência de matrizes não nulas A e B tais que $A \cdot B = O$.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) & 8 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) \\ 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) & 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-8 & 8-8 \\ 6-6 & 6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercícios resolvidos

21 Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, determine o produto $A \cdot B \cdot C$.

Resolução:

Da propriedade associativa: $A \cdot B \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 3 \\ 2 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 12 + 12 \\ 8 + 30 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 47 \end{pmatrix}$$

22 Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, determine os seguintes produtos:

a) $A \cdot B$ **b)** $B \cdot A$ **c)** $A^T \cdot B^T$ **d)** $B^T \cdot A^T$

Resolução:

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \\ 0 \cdot 0 + (\;1) \cdot 3 & 0 \cdot 1 + (\;1)\;4 & 0\;2 + (\;1)\;5 \\ 3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -3 & -4 & -5 \\ 6 & 11 & 16 \end{pmatrix}$

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot (\;1) + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 21 & 9 \end{pmatrix}$

c) $A^T \cdot B^T = (B \cdot A)^T = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 21 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 6 & 21 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

FRENTE 2

d) $B^T \cdot A^T = (A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 11 & 16 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 6 & -4 & 11 \\ 9 & -5 & 16 \end{pmatrix}$

23 **ESPM 2012** Sendo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz quadrada de ordem 2, a soma de todos os elementos da matriz $M = A \cdot A^T$ é dada por:

A $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ **B** $(a + b + c + d)^2$ **C** $(a + b)^2 + (c + d)^2$ **D** $(a + d)^2 + (b + c)^2$ **E** $(a + c)^2 + (b + d)^2$

Resolução:

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{bmatrix}$$

A soma das entradas dessa matriz é:

$$a^2 + b^2 + ac + bd + ac + bd + c^2 + d^2 = a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2$$

Fatorando os trinômios quadrados perfeitos, obtém-se:

$$(a + c)^2 + (b + d)^2$$

Alternativa: **E**.

Matrizes comutativas

Quando duas matrizes A e B, não nulas, são tais que $A \cdot B = B \cdot A$, dizemos que essas matrizes comutam entre si.

Apenas pares de matrizes quadradas de mesma ordem podem ser comutativos.

Algumas matrizes comutam com qualquer outra matriz de mesmo tamanho, como as matrizes nulas e as matrizes identidades:

$$A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0 \qquad A \ \ I = I \ \ A = I$$

Algumas matrizes comutam apenas com um pequeno grupo de outras matrizes. Veja o que ocorre com as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, por exemplo:

- A e B formam um par de matrizes que comutam entre si, pois $A \cdot B = B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 0 & 2 \ \ 3 \\ 0 + 0 & 0 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 0 \cdot (\ \ 1) + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 0 & 1 \ \ 4 \\ 0 + 0 & 0 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

- A e C formam um par de matrizes que não comutam entre si, pois $A \cdot C \neq C \cdot A$.

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + (\ \ 1) \cdot 1 & 1 \cdot 2 + (\ \ 1) \ \ 3 \\ 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \ \ 1 & 2 \ \ 3 \\ 0 + 2 & 0 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot (\ \ 1) + 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 0 & 0 + 4 \\ 1 + 0 & -1 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Exercício resolvido

24 Calcule o valor de $x + y \quad z$ sabendo que as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ comutam entre si.

A 0 **B** 1 **C** –1 **D** 2 **E** –2

Resolução:

Como ambas as matrizes são quadradas de 2ª ordem, os dois produtos $A \cdot B$ e $B \cdot A$ também serão matrizes quadra das de 2ª ordem:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot y & 1 \cdot x + 2 \cdot z \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot y & 0 \cdot x + 3 \cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2y & x + 2z \\ 3y & 3z \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + x \cdot 0 & 1 \cdot 2 + x \cdot 3 \\ y \cdot 1 + z \cdot 0 & y \cdot 2 + z \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 + 3x \\ y & 2y + 3z \end{pmatrix}$$

Como essas matrizes comutam entre si:

$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 + 2y & x + 2z \\ 3y & 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 + 3x \\ y & 2y + 3z \end{pmatrix}$$

Da primeira coluna dessas matrizes, tem-se: $\begin{cases} 1 + 2y = 1 \\ 3y = y \end{cases} \Rightarrow y = 0$

Da segunda coluna dessas matrizes, tem-se: $\begin{cases} x + 2z = 2 + 3x \\ 3z = 2y + 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2z = 2 \Leftrightarrow x \quad z = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$

Portanto: $x + y \quad z = x \quad z + y = -1 + 0 = -1$

Alternativa: **C**.

Matriz inversa

Duas matrizes quadradas de mesma ordem são consideradas inversas uma da outra, quando seu produto resulta em uma matriz identidade.

Indicamos por $A^{\;1}$ a matriz inversa de uma matriz A. Assim:

$$A^{-1} \cdot A = I$$

Nem toda matriz quadrada A possui matriz inversa $A^{\;1}$, mas quando possui, a matriz inversa e a matriz original comutam entre si:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Matrizes que possuem inversa são chamadas de matrizes invertíveis ou matrizes inversíveis.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$

Verificação do exemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) & 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \cdot 1 \\ 6 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) & 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 3 & -1 + 1 \\ 12 - 12 & -3 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 6 & 2 \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 4 \\ (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 6 & (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \quad 3 & 2 \quad 2 \\ -6 + 6 & -3 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

As matrizes que não possuem inversas são chamadas de matrizes singulares.

A inversão de matrizes também é uma operação dual.

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

A matriz inversa de uma matriz transposta é igual à matriz transposta de uma matriz inversa

$$\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$$

A matriz inversa de um produto de matrizes é igual ao produto das matrizes inversas dos fatores, mas em ordem contrária.

$$\left(A \cdot B\right)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Exercícios resolvidos

25 Determine a matriz inversa da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Resolução:

Como a matriz inversa possui o mesmo tamanho da matriz original, seja $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ a inversa da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Assim, tem se que: $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dos produtos internos da 1ª linha da matriz inversa, tem-se o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \langle \text{linha 1, coluna 1} \rangle = 2x + y = 1 \\ \langle \text{linha 1, coluna 2} \rangle = 7x + 4y = 0 \end{cases}$$

Da 1ª equação do sistema: $y = 1 \quad 2x$
Substituindo na 2ª equação: $7x + 4 \cdot (1 \quad 2x) = 0 \iff 7x + 4 \quad 8x = 0 \iff -x = -4 \iff x = 4$
De volta à 1ª equação: $2 \cdot 4 + y = 1 \iff y = \quad 7$
Dos produtos internos da 2ª linha da matriz inversa, tem-se o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \langle \text{linha 2, coluna 1} \rangle = 2z + w = 0 \\ \langle \text{linha 2, coluna 2} \rangle = 7z + 4w = 1 \end{cases}$$

Da 1ª equação do sistema: $w = \quad 2z$
Substituindo na 2ª equação: $7z + 4 \cdot (-2z) = 1 \iff 7z \quad 8z = 1 \iff \quad z = 1 \iff z = \quad 1$
De volta à 1ª equação: $2 \cdot (-1) + w = 0 \iff w = 2$

Portanto, a matriz inversa de $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ é: $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \quad 7 \\ \quad 1 & 2 \end{pmatrix}$.

26 Mostre que a matriz $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$ não possui inversa.

Resolução:

Supondo a existência da matriz inversa, seja $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ essa matriz. Assim, teríamos:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dos produtos internos da 1ª linha da matriz inversa, tem-se o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \langle \text{linha 1, coluna 1} \rangle = 2x + 4y = 1 \\ \langle \text{linha 1, coluna 2} \rangle = 5x + 10y = 0 \end{cases}$$

Da 2ª equação do sistema: $5x = -10y \iff x = -2y$
Substituindo na 1ª equação: $2 \cdot (-2y) + 4y = 1 \iff -4y \cdot 4y = 1 \iff 0 = 1$
Assim, conclui-se que este sistema é impossível e, portanto, que a matriz dada não possui inversa.

27 Unicamp Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, tal que $a_{ij} = 0$ para todo elemento em que $j > i$, e que $a_{ij} = i - j + 1$ para os elementos em que $j \leq i$. Calcule a sua inversa: A^{-1}

Resolução:

Os elementos tais que $j > i$, ou seja, que situam-se acima da diagonal principal são todos nulos:

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$$

Os demais elementos desta matriz são:

$$a_{11} = 1 - 1 + 1 = 1 \qquad a_{22} = 2 - 2 + 1 = 1$$
$$a_{21} = 2 \quad 1 + 1 = 2 \qquad a_{32} = 3 \quad 2 + 1 = 2$$
$$a_{31} = 3 \quad 1 + 1 = 3 \qquad a_{33} = 3 \quad 3 + 1 = 1$$

Logo, temos que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Como $A^{-1} \cdot A = I$, sendo $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ r & s & t \end{pmatrix}$, tem-se: $\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ r & s & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Os produtos internos da primeira linha de A^{-1} formam o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ y + 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 0,\ y = 0 \text{ e } x = 1$$

Os produtos internos da segunda linha de A^{-1} formam o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ b + 2c = 1 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c = 0,\ b = 1 \text{ e } a = -2$$

Os produtos internos da terceira linha de A^{-1} formam o seguinte sistema:

$$\begin{cases} r + 2s + 3t = 0 \\ s + 2t = 0 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1,\ s = -2 \text{ e } r = 1$$

Logo, a inversa da matriz A é a matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Saiba mais

Matriz ortogonal

Toda matriz quadrada que possui matriz inversa igual à matriz transposta, é denominada matriz ortogonal. Assim, se A é uma matriz ortogonal, tem-se que:

$$A^{-1} = A^{T}$$

Exercício resolvido

28 **Unicamp** Uma matriz real quadrada P é dita ortogonal se $P^{T} = P^{\ 1}$, ou seja, se sua transposta é igual a sua inversa.

Considere a matriz $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & a & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & b & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ e determine os valores de a e b para que P seja uma matriz ortogonal.

Resolução:

Como $P^{T} = P^{\ 1}$ e $P^{-1} \cdot P = I$, temos que $P^{T} \cdot P = I$, portanto:

$$P^{T} \cdot P = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & a & b \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & a & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & b & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Do produto interno da 1ª linha de P^{T} pela 2ª coluna de P tem-se:

$$\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot a + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot b = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{9} - \frac{2a}{3} - \frac{2b}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{2 - 6a - 6b}{9} = \frac{0}{9} \Leftrightarrow a + b = \frac{1}{3}$$

Do produto interno da 2ª linha de P^{T} pela 3ª coluna de P tem-se:

$$\left(\ \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\ \frac{2}{3}\right) + a \cdot \left(\ \frac{1}{3}\right) + b \cdot \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{9} \quad \frac{a}{3} + \frac{2b}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{4 \quad 3a + 6b}{9} = \frac{0}{9} \Leftrightarrow a \quad 2b = \frac{4}{3}$$

Resolvando o sistema $\begin{cases} a + b = \frac{1}{3} \\ a \quad 2b = \frac{4}{3} \end{cases}$ obtemos $a = \frac{2}{3}$ e $b = \quad \frac{1}{3}$

Matriz inversa de 2ª ordem

Existe um algoritmo prático que, em apenas quatro passos, é capaz de exprimir a inversa de uma matriz quadrada não singular de segunda ordem.

Para efetuar esse algoritmo, considere $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1º passo

Calcular a diferença Δ do produto das entradas da diagonal principal para o produto das entradas da diagonal se cundária:

$$\Delta = a \cdot d \quad b \cdot c$$

No caso das matrizes quadradas de 2a ordem, essa diferença é chamada de determinante da matriz.

Quando $\Delta = 0$, então a matriz é singular, ou seja, não admite inversa.

Quando $\Delta \neq 0$, pode-se dar prosseguimento ao algoritmo.

2º passo

Permutar (trocar de posição) as entradas da diagonal principal.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$$

3º passo

Mudar os sinais das entradas da diagonal secundária.

$$\begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d & -b \\ c & a \end{pmatrix}$$

4º passo

Dividir por Δ todas as entradas da matriz obtida no terceiro passo:

$$\begin{pmatrix} d & b \\ -c & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{d}{\Delta} & -\frac{b}{\Delta} \\ \frac{c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{pmatrix}$$

Assim, se $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$ tem-se que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a \cdot d \quad b \cdot c} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Veja a aplicação desse algoritmo na inversão da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, por exemplo:

1º passo: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \Delta = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 6 = 8 - 6 = 2$

2º e 3º passos: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

4º passo: $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-6}{2} & \frac{2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

A inversa da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ é a matriz $\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercícios resolvidos

29 UFPE 2013 Seja $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a inversa da matriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$. Indique $|a| + |b| + |c| + |d|$.

Resolução:

Usando o algoritmo para inverter uma matriz de 2a ordem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{12 \quad 11} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 11 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 11 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}$$

Assim, tem-se que: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 11 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = 4,\ b = \quad 1,\ c = \quad 11 \text{ e } d = 3$.

A soma dos módulos desses números é:

$$|a| + |b| + |c| + |d| = |4| + |\quad 1| \quad |\quad 11| \quad |3| = 4 + 1 + 11 + 3 = 19$$

FRENTE 2

30 **UFSC** Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$, determine o produto entre a matriz inversa de A e a matriz transposta de B: $(A^{-1} \cdot B^t)$.

Resolução:

A matriz inversa de A é: $A^{-1} = \dfrac{1}{2 \cdot 3 - 5 \cdot 1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6 - 5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

A matriz transposta de B é: $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.

Portanto: $A^{-1} \cdot B^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & 3 \cdot 5 + (-1) \cdot 9 \\ (-5) \cdot 1 + 2 \cdot 3 & (-5) \cdot 5 + 2 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 3 & 15 - 9 \\ 5 + 6 & 25 + 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$.

Equações matriciais

Dada uma matriz quadrada A não singular e uma matriz B não necessariamente quadrada, considere as seguintes equações em que X e Y são matrizes incógnitas:

$$A \cdot X = B \text{ e } Y \cdot A = B$$

Como a multiplicação de matrizes não é uma operação comutativa, deve-se supor que as equações consideradas tenham respostas diferentes.

$$X \neq Y$$

Sabendo-se que não há como definir uma operação de divisão matricial, contornamos esse problema com o uso da matriz inversa.

Assim, a equação $A \cdot X = B$ pode ser resolvida multiplicando, pela esquerda, ambos os membros da equação por A^{-1}:

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{} \cdot X = A^{\,1} \cdot B$$

$$\underbrace{I \cdot X}_{} = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Já a equação $Y \cdot A = B$ pode ser resolvida multiplicando, pela direita ambos os membros da equação por $A^{\,1}$:

$$Y \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{} = B \cdot A^{-1}$$

$$\underbrace{Y \cdot I}_{} = B \cdot A^{-1}$$

$$Y = B \cdot A^{-1}$$

Assim, de modo geral, sendo A uma matriz não singular, tem-se que:

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$
$$Y \cdot A = B \Rightarrow Y = B \cdot A^{-1}$$

Exercícios resolvidos

31 Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 50 & 25 \end{pmatrix}$, resolva as seguintes equações matriciais:

a) $A \cdot X = B$

b) $X \cdot A = B$

Resolução:

Uma maneira de resolver essas equações matriciais consiste em calcular primeiro a matriz inversa de A:

$$A^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 4 \quad 3 \cdot 1} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ -0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

a) Como $A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}2 \\ -0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 50 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-10 & 24-5 \\ -6+20 & -18 \quad 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 19 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}$$

b) Como $X \cdot A = B \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$:

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 50 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}2 \\ -0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-18 & -2+12 \\ 40 \quad 15 & -40 \quad 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 25 & 0 \end{pmatrix}$$

32 Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 3 & 0 \\ 8 & 16 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, determine a matriz X tal que $A \cdot X = B$

Resolução:

A matriz inversa de A é: $A^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 3 - 1 \cdot 4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Como $A \cdot X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$, temos:

$$X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 10 & 3 & 0 \\ 8 & 16 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 17 & 34 & 1 & 0 \\ 11 & 22 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8{,}5 & 17 & 0{,}5 & 0 \\ 5{,}5 & 11 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

33 Sabendo que A, B e X são matrizes quadradas de mesma ordem, considere a equação matricial:

$$A^{-1} \cdot X \cdot A + 2 \cdot I = B$$

A matriz X que é solução dessa equação está representada na alternativa:

A $B \quad 2 \cdot I$

B $A \cdot B \cdot A^{-1} \quad 2 \cdot I$

C $A^{-1} \cdot B \cdot A \quad 2 \cdot I$

D $A \cdot (B \quad 2 \cdot I)$

E $(B \quad 2 \cdot I) \cdot A^{-1}$

Resolução:

Somando a matriz $-2 \cdot I$ em ambos os membros da equação:

$$A^{-1} \cdot X \cdot A + 2 \cdot I \quad 2 \cdot I = B \quad 2 \cdot I$$
$$A^{-1} \cdot X \cdot A + O = B \quad 2 \cdot I$$
$$A^{-1} \cdot X \cdot A = B \quad 2 \cdot I$$

Multiplicando, pela esquerda, ambos os membros da equação por A:

$$A \cdot A^{-1} \cdot X \cdot A = A \cdot (B - 2 \cdot I)$$
$$I \cdot X \cdot A = A \cdot (B \quad 2 \cdot I)$$
$$X \cdot A = A \cdot B \quad 2 \cdot A$$

FRENTE 2

Multiplicando, pela direita, ambos os membros da equação por $A^{\ 1}$:

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = \left(A \cdot B \quad 2 \cdot A\right) \cdot A^{-1}$$
$$X \cdot I = A \cdot B \cdot A^{-1} - 2 \cdot A \cdot A^{-1}$$
$$X = A \cdot B \cdot A^{-1} - 2 \cdot I$$

Alternativa: **B**.

Potências ordinais de uma matriz quadrada

O produto de duas ou mais matrizes quadradas iguais pode ser abreviado usando se a notação tradicional de poten ciação com expoente natural:

$$A \cdot A = A^2$$
$$A \cdot A \cdot A = A^3$$
$$\vdots$$
$$\underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{n} = A^n$$

Particularmente, adota-se que $A^0 = I$ e $A^1 = A$.

Algumas propriedades da potenciação de bases reais e positivas também são válidas na álgebra matricial.

Sendo *p* e *q* números naturais:

$$A^p \cdot A^q = A^{p+q} \qquad \left(A^p\right)^q = A^{p \cdot q}$$

Já a propriedade $(A \cdot B)^p = A^p \cdot B^p$ é válida se, e somente se, A e B forem matrizes comutativas entre si.

Saiba mais

Matriz idempotente

Chamam-se idempotentes todas as matrizes quadradas que permanecem inalteradas quando elevadas a algum expoente natural.

$$A = A^2 = A^3 = A^4 = ...$$

Exemplo: Se $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$, tem-se:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \quad 4 & 1 \quad 2 \ +4 & 1+2 \quad 4 \\ 2 \quad 4 \ +8 & 2+4 \quad 8 & 2 \quad 4 \ +8 \\ -4-8+16 & 4+8-16 & -4-8+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} = A$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A$$
$$\vdots$$

Exercícios resolvidos

34 **Unicamp 2013** Considere a matriz $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \frac{1}{\alpha} & 1 \end{bmatrix}$ que depende do parâmetro real $\alpha > 0$, e calcule a matriz $\left(A_\alpha + A_{2\alpha}\right)^2$.

Resolução:

$$A_\alpha + A_{2\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \frac{1}{\alpha} & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2\alpha \\ \frac{1}{2\alpha} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3\alpha \\ \frac{3}{2\alpha} & 2 \end{bmatrix}$$

$$(A_\alpha + A_{2\alpha})^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3\alpha \\ \frac{3}{2\alpha} & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3\alpha \\ \frac{3}{2\alpha} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - \frac{9}{2} & 6\alpha - 6\alpha \\ \frac{3}{\alpha} + \frac{3}{\alpha} & \frac{9}{2} + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

35 **Unesp 2012** Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ e definindo-se $A^0 = I$, $A^1 = A$ e $A^k = A \cdot A \cdot A \cdot ... \cdot A$ com *k* fatores, onde I é uma matriz identidade de ordem 2, $k \in \mathbb{N}$ e $k \geq 2$, a matriz A^{15} será dada por:

A I
B A
C A^2
D A^T
E O

Resolução:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \quad 3 & 6 + 6 \\ 2 - 2 & -3 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $A \cdot A = I$, tem-se que:

$$A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot I = A$$
$$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = I$$
$$A^5 = A \cdot A^4 = A \cdot I = A$$
$$A^6 = A^5 \cdot A = A \cdot A = I$$

Assim, é possível perceber que:
- se *n* for um número par, então $A^n = I$;
- se *n* for um número ímpar, então $A^n = A$.

Como 15 é um número ímpar, tem-se que $A^{15} = A$.
Alternativa: **B**.

Determinantes

Trata-se de uma função com domínio no conjunto das matrizes quadradas de entradas reais ou complexas e imagem no conjunto dos números reais ou dos números complexos, de acordo com os valores das entradas da matriz.

Indicamos a função determinante pela abreviação **det**. Assim, o determinante de uma matriz A pode ser representado por **det(A)**.

Para entender o que a função determinante pretende expressar é preciso observar alguns padrões específicos dos sistemas lineares que possuem os mesmos números de equações e de variáveis

Um sistema com apenas uma equação com uma variável pode ser representado por:

$$\{ax = b$$

Nesse caso, se $a \neq 0$ então, tem-se como única solução: $x = \frac{b}{a}$.

Um sistema com 2 equações e 2 variáveis cada pode ser representado por:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Nesse caso, se $a \cdot d - b \cdot c = 0$, então, a única solução (x, y) é tal que:

$$x = \frac{e \cdot d \quad b \cdot f}{a \cdot d \quad b \cdot c}$$

$$y = \frac{a \cdot f - e \cdot c}{a \cdot d - b \cdot c}$$

FRENTE 2

Observe que, em ambos os casos, há uma condição para garantir a existência e unicidade da solução do sistema:

$a \neq 0$ no sistema $\{ax = b$;

$ad - bc \neq 0$ no sistema $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$.

As expressões algébricas "a" e "ad–bc" devem ser diferentes de zero porque ocupam os denominadores das frações que representam as soluções dos sistemas

Observe agora as representações matriciais desses sistemas:

$$\{ax = b \iff \begin{pmatrix} a & \vdots & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a & b & \vdots & e \\ c & d & \vdots & f \end{pmatrix}$$

A linha pontilhada vertical separa sempre a última coluna dessas matrizes, que são denominadas matrizes completas ou estendidas do sistema. Eliminada a última coluna da matriz estendida de um sistema, as entradas que sobram formam a matriz principal do sistema.

Sistema	Matriz estendida	Matriz principal
$\{ax = b$	$\begin{bmatrix} a & \vdots & b \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$
$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$	$\begin{bmatrix} a & b & \vdots & e \\ c & d & \vdots & f \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
$\begin{cases} ax + by + cz = j \\ dx + ey + fz = k \\ gx + hy + iz = l \end{cases}$	$\begin{bmatrix} a & b & c & \vdots & j \\ d & e & f & \vdots & k \\ g & h & i & \vdots & l \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

A função determinante associa a matriz principal de um sistema ao valor dos denominadores das frações que expressam as soluções do sistema. Assim:

$$\det\begin{bmatrix} a \end{bmatrix} = a$$

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \cdot d \quad b \cdot c$$

As definições nos ajudarão a compreender como calcular determinantes de matrizes quadradas de 3ª ordem, 4ª ordem, ou de ordem maior, a partir dos valores das entradas da matriz.

Produto elementar das entradas de uma matriz quadrada

Se A é uma matriz quadrada de ordem *n*, então A possui n^2 entradas a_{ij}.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Um produto elementar ou fundamental das entradas da matriz A é o resultado da multiplicação de algumas de suas n^2 entradas.

Considerando A como o conjunto de todas as entradas da matriz, aquelas que podem ser multiplicadas para gerar um produto elementar compõem um subconjunto de A.

Os subconjuntos de entradas escolhidos para compor os produtos elementares devem ser tomados de acordo com alguns critérios.

Cada subconjunto deve possuir exatamente:

a *n* entradas da matriz

b. 1 entrada de cada linha.

c. 1 entrada de cada coluna.

Assim, entre os fatores de um produto elementar não pode haver duas entradas da mesma linha, nem da mesma coluna da matriz.

Disso tudo decorre que uma matriz quadrada de ordem *n* possui exatamente n! produtos elementares.

Indicaremos cada produto elementar com a sigla *pel* acompanhada de um índice ordinal, assim pode-se definir a seguinte série de produtos elementares:

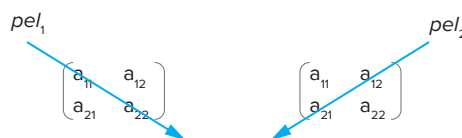
$$pel_1, pel_2, pel_3, \quad , pel_k, \quad , pel_{n!}$$

As matrizes quadradas de 1ª ordem possuem apenas $1! = 1$ produto elementar que equivale ao valor de sua única entrada:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} \rightarrow \quad pel_1 = a_{11}$$

As matrizes quadradas de 2a ordem possuem apenas $2! = 2$ produtos elementares, sendo que os fatores do pri meiro são as entradas da diagonal principal e os fatores do segundo são as entradas da diagonal secundária:

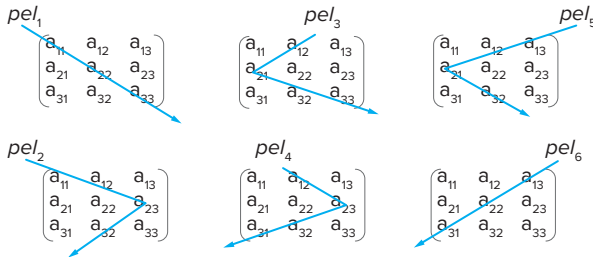
$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} pel_1 = a_{11} \cdot a_{22} \\ pel_2 = a_{12} \cdot a_{21} \end{cases}$$

pel$_1$ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *pel*$_2$ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

As matrizes quadradas de 3ª ordem possuem $3! = 6$ pro dutos elementares, sendo que os fatores do primeiro são as entradas da diagonal principal e os fatores do último são as entradas da diagonal secundária:

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} pel_1 = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \\ pel_2 = a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} \\ pel_3 = a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \\ pel_4 = a_{12} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \\ pel_5 = a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ pel_6 = a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \end{cases}$$

Note que os produtos elementares dessa matriz foram ordenados de acordo com a ordem crescente dos índices das entradas da matriz A_3

pel_1 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ pel_3 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ pel_5 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

pel_2 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ pel_4 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ pel_6 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Observando o padrão das setas que representam os produtos elementares na ordem crescente em que são tomados, é possível ter uma compreensão visual dessa estrutura sem que seja necessário anotar os índices de todas as entradas. Veja, a seguir, como esse padrão evolui para as matrizes quadradas de 4ª ordem

As matrizes quadradas de 4ª ordem possuem 4! = 24 produtos elementares:

$$A_4 = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & w \\ r & s & t & u \\ m & n & p & q \end{bmatrix}$$

A tabela a seguir mostra cada um deles ordenados em 4 colunas:

aytq	bxtq	cxsq	dxsp
ayup	bxup	cxun	dxtn
azsq	bzrq	cyrq	dyrp
azun	bzum	cyum	dytm
awsp	bwrp	cwrn	dzrn
awtn	bwtm	cwsm	dzsm

Série das linhas e das colunas de um produto elementar

De cada produto elementar das entradas de uma matriz quadrada de ordem n > 1, pode-se extrair duas séries de *n* números naturais:

- A série dos índices que indicam as linhas ocupadas pelas entradas da matriz:
$$Lin = (i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n)$$
- A série dos índices que indicam as colunas das mesmas entradas:
$$Col = (j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n)$$

Veja o exemplo do produto elementar **dxtn** da matriz A_4 em destaque na tabela anterior.

- O fator d é a entrada da linha i = 1 e coluna j = 4
- O fator x é a entrada da linha i = 2 e coluna j = 1
- O fator t é a entrada da linha i = 3 e coluna j = 3
- O fator n é a entrada da linha i = 4 e coluna j = 2

Assim, as séries de linhas i e colunas j desse produto elementar são:

- *Lin* = (1, 2, 3, 4)
- *Col* = (4, 1, 3, 2)

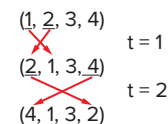
Paridade de uma permutação

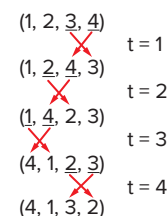
O fato de as séries das linhas e colunas, de um produto elementar, terem exatamente os mesmos números, caracteriza essas séries como permutações uma da outra.

A partir de uma série com *n* números, podem ser criadas n! permutações incluindo a própria série que chamaremos de permutação original Para criar uma permutação, basta que seja efetuada alguma troca entre dois termos da série original.

Uma série de 4 termos como (1, 2, 3, 4), por exemplo, pode ser tomada como ponto de partida para a criação de 4! = 24 permutações possíveis.

A troca dos dois primeiros termos dessa série gera a série (2, 1, 3, 4), por exemplo, que é uma permutação ímpar da série original, pois foi obtida com apenas uma troca entre seus termos, e t = 1 é número ímpar.

Após essa troca, uma nova troca dos termos extremos da permutação obtida deve gerar a série (4, 1, 3, 2), por exemplo, que é uma permutação par da série original, pois foi obtida após duas trocas de posições entre seus termos, e t = 2 é número par.

(1, 2, 3, 4)
t = 1
(2, 1, 3, 4)
t = 2
(4, 1, 3, 2)

A permutação (4, 1, 3, 2) também pode ser obtida a partir da série original (1, 2, 3, 4) efetuando-se mais trocas entre 2 de seus termos. Mas, em todos os casos, esse número de trocas será par. Veja outra possibilidade:

Qualquer que seja o número de trocas com as quais se obtém uma determinada permutação, a partir da mesma série original, tem-se a mesma paridade. Por esse motivo, tentamos sempre contar o mínimo de trocas necessárias.

A paridade de cada série *Col* em relação à *Lin* do mesmo produto elementar é usada para se atribuir um sinal a esse produto elementar. Uma vez atribuído esse sinal, obtém-se um produto elementar assinalado.

Sendo *t* o número de trocas necessárias para se obter a série *Col* de um produto elementar a partir de sua série *Lin*, a atribuição do sinal é feita multiplicando o produto elementar por $(\ \ 1)^t$ Assim:

- Quanto *t* for um número par, $(-1)^t = +1$.
- Quanto *t* for um número ímpar, $(-1)^t = -1$.

A tabela a seguir apresenta as características dos produtos elementares da matriz quadrada de segunda ordem: $A_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

k	Produto elementar	Séries		Trocas	Paridade	Produto assinalado
		Lin	*Col*			
pel$_1$	ad	(1, 2)	(1, 2)	t = 0	Par	+ad
pel$_2$	bc	(1, 2)	(2, 1)	t = 1	Ímpar	–bc

O determinante de uma matriz quadrada é igual à somatória de todos os seus produtos elementares assinalados.

No caso da matriz $A_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ há apenas duas parcelas nessa somatória. Elas podem ser observadas na última coluna da tabela anterior. Assim:

$$\det\left(A_2\right) = +\ ad \quad bc$$

A próxima tabela apresenta as características de todos os produtos fundamentais da matriz quadrada de terceira ordem: $A_3 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{bmatrix}$.

k	Produto elementar	Séries		Trocas	Paridade	Produto assinalado
		Lin	*Col*			
pel$_1$	ayt	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	t = 0	Par	+ayt
pel$_2$	azs	(1, 2, 3)	(1, 3, 2)	t = 1	Ímpar	–azs
pel$_3$	bxt	(1, 2, 3)	(2, 1, 3)	t = 1	Ímpar	–bxt
pel$_4$	bzr	(1, 2, 3)	(2, 3, 1)	t = 2	Par	+bzr
pel$_5$	cxs	(1, 2, 3)	(3, 1, 2)	t = 2	Par	+cxs
pel$_6$	cyr	(1, 2, 3)	(3, 2, 1)	t = 1	Ímpar	–cyr

Então, somando todas as expressões da última coluna da tabela:

$$\det(A_3) = +\ ayt - azs - bxt + bzr + cxs - cyr$$

Cálculo de determinantes pela definição

A expressão que define a função determinante a partir dos conceitos de produto elementar e paridade de uma per mutação é:

$$\det\left(A_n\right) = \sum_{k=1}^{n!} (\cdot\ 1)^t \quad pel_k$$

Os determinantes das matrizes quadradas também podem ser indicados cercando as entradas da matriz com barras verticais no lugar dos parênteses ou colchetes usados para indicar as matrizes. Isso não é recomendado para matrizes de

1ª ordem, pois pode ser confundido com a função módulo, mas nos outros casos essa representação torna desnecessário o uso da sigla det.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Considere os produtos elementares da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.

pel	***Lin***	***Col***	**Trocas**	**$(-1)^t \cdot$ *pel***
$pel_1 = 4 \cdot 7 = 28$	(1, 2)	(1, 2)	t = 0	+28
$pel_2 = 6 \cdot 5 = 30$	(1, 2)	(2, 1)	t = 1	–30

O determinante dessa matriz é a soma dos valores na última coluna da tabela:

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 28 \quad 30 = \quad 2$$

Considere agora os produtos elementares da matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 6 \end{bmatrix}$.

pel	***Lin***	***Col***	**Trocas**	**$(-1)^t \cdot$ *pel***
$2 \cdot 5 \cdot 6 = 60$	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	t = 0	+60
$2 \cdot 0 \cdot 8 = 0$	(1, 2, 3)	(1, 3, 2)	t = 1	–0
$0 \cdot 3 \cdot 6 = 0$	(1, 2, 3)	(2, 1, 3)	t = 1	–0
$0 \cdot 0 \cdot 1 = 0$	(1, 2, 3)	(2, 3, 1)	t = 2	+0
$4 \cdot 3 \cdot 8 = 96$	(1, 2, 3)	(3, 1, 2)	t = 2	+96
$4 \cdot 5 \cdot 1 = 20$	(1, 2, 3)	(3, 2, 1)	t = 1	–20

Somando os valores da última coluna:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 60 + 96 - 20 = 136$$

Perceba que só é necessário preocupar-se em assinalar os produtos elementares não nulos, uma vez que o número zero é o elemento neutro da adição.

Esse método de cálculo para um determinante pode parecer longo e exaustivo, mas no caso das matrizes com muitas entradas nulas ele é bastante eficiente, pois cada entrada nula de uma matriz quadrada de ordem *n* implica haver *n* produtos elementares iguais a zero.

Considere agora apenas os produtos elementares não nulos da matriz $C = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

pel	***Lin***	***Col***	**Trocas**	**$(-1)^t \cdot$ *pel***
$1 \cdot 8 \cdot (-3) = -24$	(1, 2, 3)	(2, 1, 3)	t = 1	+24
$5 \cdot 8 \cdot 2 = 80$	(1, 2, 3)	(3, 1, 2)	t = 2	+80

Somando os valores da última coluna:

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 24 + 80 = 104$$

Como próximo exemplo, considere os produtos elementares não nulos da matriz de 4ª ordem:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

pel	***Lin***	***Col***	**Trocas**	$(-1)^t \cdot pel$
$1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$	(1, 2, 3, 4)	(1, 3, 2, 4)	$t = 1$	-8
$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 24$	(1, 2, 3, 4)	(2, 3, 1, 4)	$t = 2$	$+24$
$3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 = 18$	(1, 2, 3, 4)	(3, 2, 1, 4)	$t = 3$	-18
$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = 27$	(1, 2, 3, 4)	(3, 4, 1, 2)	$t = 2$	$+27$
$4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 = 24$	(1, 2, 3, 4)	(4, 3, 1, 2)	$t = 3$	-24

Portanto: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 24 - 18 + 27 - 24 = 1.$

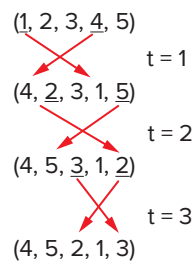
Antes de estudar outras técnicas para o cálculo dos determinantes, vamos encarar a seguinte matriz de 5ª ordem:

$$N = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 8 & 3 & 1 & -6 & 7 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Repare haver nessa matriz apenas um produto elementar não nulo:

$$pel = 2 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot (-2) \cdot 4 = 48$$

A série de linhas das entradas é: $Lin = (1, 2, 3, 4, 5)$.
A série de colunas é: $Col = (4, 5, 2, 1, 3)$.
O número mínimo de trocas de uma série para a outra é $t = 3$.

(1, 2, 3, 4, 5)
t = 1
(4, 2, 3, 1, 5)
t = 2
(4, 5, 3, 1, 2)
t = 3
(4, 5, 2, 1, 3)

Portanto, $\det(N) = (-1)^3 \cdot 48 = \quad 48$.

Exercícios resolvidos

36 Calcule os determinantes das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} -5 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 10 \\ 5 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

Resolução:

a) Há apenas 1! = 1 produto elementar na matriz $A = \begin{bmatrix} \ 5 \end{bmatrix}$ e ele coincide com o valor da única entrada da matriz. Então, como não há trocas a serem consideradas, det(A) =   5.

b) Há 2! = 2 produtos elementares na matriz $B = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$.

pel	*Lin*	*Col*	*Trocas*	$(-1)^t \cdot$ *pel*
$8 \cdot 4 = 32$	(1, 2)	(1, 2)	t = 0	+32
$7 \cdot 9 = 63$	(1, 2)	(2, 1)	t = 1	–63

Portanto: det(B) = 32 – 63 = –31.

c) Há 3! = 6 produtos elementares na matriz $C = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 10 \\ 5 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$, mas 3 deles são nulos.

Os produtos elementares não nulos são:

pel	*Lin*	*Col*	*Trocas*	$(-1)^t \cdot$ *pel*
$6 \cdot 2 \cdot 8 = 96$	(1, 2, 3)	(1, 3, 2)	t = 1	–96
$10 \cdot 5 \cdot 8 = 400$	(1, 2, 3)	(3, 1, 2)	t = 2	+400
$10 \cdot 4 \cdot 7 = 280$	(1, 2, 3)	(3, 2, 1)	t = 1	280

Portanto: det(C) = –96 + 400 – 280 = 24.

37 PUC-Minas O valor do determinante da matriz $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ é

A = 4 **B** = 3 **C** = 1 **D** = 2 **E** = 3

Resolução:

Embora haja 4! = 24 produtos elementares na matriz dada, 21 deles são nulos.
Os 3 produtos elementares não nulos são:

pel	*Lin*	*Col*	*Trocas*	$(-1)^t \cdot$ *pel*
$2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 4 = 8$	(1, 2, 3, 4)	(2, 1, 4, 3)	t = 2	+8
$2 \cdot 3 \cdot (\ 1) \cdot 1 = 6$	(1, 2, 3, 4)	(2, 3, 1, 4)	t = 2	+6
$2 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 3 = 18$	(1, 2, 3, 4)	(2, 3, 4, 1)	t = 3	18

Portanto, o valor do determinante da matriz dada é (8 + 6 18) = 4.
Alternativa: **A**.

Saiba mais

Determinantes de 2ª ordem e a regra de três

Dois pares ordenados (a, b) e (c, d) de números reais são diretamente proporcionais quando a razão de suas abscissas for igual à razão de suas ordenadas, ou seja, se:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Efetuando o produto cruzado, a proporção fica expressa por:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Escrevendo ambos os termos no primeiro membro da igualdade, tem-se:

$$a \cdot d - b \cdot c = 0$$

Assim, é correto afirmar que, se o par (a, b) for diretamente proporcional ao par (c, d), então a diferença dos termos do produto cruzado é igual a zero.

Por outro lado, pares ordenados (a, b) e (c, d) de números reais que não possuem relação de proporcionalidade direta implicam na diferença dos termos do produto cruzado ser diferente de zero:

$$a \cdot d - b \cdot c \neq 0$$

O valor dessa diferença, que pode ser próxima ou distante de zero, possui um significado importante para o estudo da matemática, estabelecendo uma escala de afastamento da relação de proporcionalidade. Esse afastamento estabelece outro tipo de relação entre os números dos pares (a, b) e (c, d), chamada de relação de linearidade.

Indicando por Δ o valor dessa diferença, tem-se:

$$\Delta = a \cdot d - b \cdot c$$

Veja que o valor de Δ é exatamente o que se obtém calculando o determinante da matriz quadrada de 2ª ordem $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ cujas linhas são os pares ordenados (a, b) e (c, d).

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Regra de Sarrus para determinantes de 3ª ordem

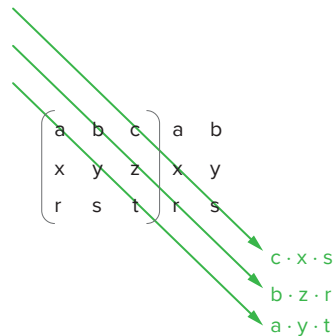
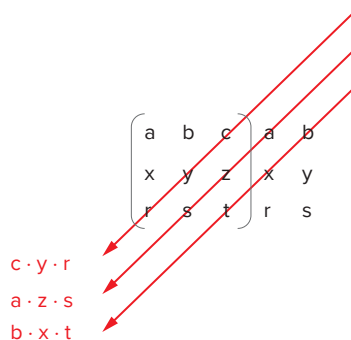
Em 1842 o matemático francês Pierre Frédéric Sarrus publicou um tratado em que sugere um algoritmo alternativo para o cálculo dos determinantes de 3ª ordem, que ficou conhecido como regra de Sarrus.

1º passo → Escrever o determinante da matriz na forma explícita:

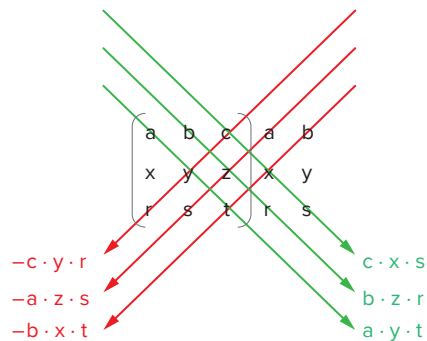
$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{bmatrix}$$

2º passo → Repetir as duas primeiras colunas do lado direito da matriz:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{bmatrix} \begin{matrix} a & b \\ x & y \\ r & s \end{matrix}$$

3º passo → Multiplicar as três entradas da diagonal principal e das duas diagonais paralelas que surgem com a repetição das colunas.

4º passo → Multiplicar as três entradas da diagonal secundária e das duas diagonais paralelas.

Até aqui, todos os 6 produtos elementares da matriz já foram efetuados, sendo que:

- Os 3 que são pares foram obtidos no 3º passo;
- Os 3 que são ímpares foram obtidos no 4º passo.

5º passo → Assinalar os produtos elementares de acordo com sua paridade:

6º passo → Efetuar a somatória dos produtos elementares assinalados:

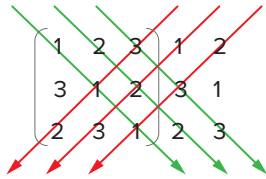
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{vmatrix} = ayt + bzr + cxs \quad cyr \quad azs \quad bxt$$

A regra de Sarrus deve ser aplicada apenas aos determinantes de 3ª ordem, não sendo válida em matrizes de 2ª ordem, 4ª ordem ou ordem superior.

Exercício resolvido

38 Calcule o determinante da matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Resolução:

Aplicando a regra de Sarrus:

$$\det(M) = -3 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$\det(M) = -6 - 6 - 6 + 1 + 8 + 27$
$\det(M) = 18$

Aplicações geométricas dos determinantes de 3ª ordem

No estudo da Geometria Analítica plana, os determi nantes de 3ª ordem se prestam como ferramentas bastante úteis, sendo aplicados em diversos tipos de cálculos

Área

Os determinantes podem ser usados para calcular áreas de paralelogramos, triângulos e outros polígonos, a partir das coordenadas cartesianas de seus vértices.

Sendo $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ as coordenadas de três vértices de um paralelogramo, a área desse paralelogramo será igual ao módulo do seguinte determinante:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Substituir as coordenadas de algum dos vértices A, B ou C do paralelogramo, pelas coordenadas do seu quarto vértice, pode até alterar o sinal do determinante, mas não seu valor absoluto.

Desse fato decorre que a área S do triângulo ABC equivale à metade do módulo do mesmo determinante:

$$S = \frac{1}{2} \cdot |D|$$

Equação da reta

Levando em consideração que três pontos colineares A, B e C não formam triângulo, conclui se que o deter minante usado para calcular a área do triângulo deve ser nulo (D = 0)

Esse fato pode ser usado para se obter a equação geral da reta que passa por dois pontos fixos A e B, e um ponto genérico P(x, y).

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exercício resolvido

39 Escreva a equação geral da reta que passa pelos pontos A(2, 5) e B(7, 4).

Resolução:

Sendo P(x, y) um ponto qualquer dessa reta, tem-se que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Aplicando a regra de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 5 \\ 7 & 4 \\ x & y \end{matrix} = 0$$

$$-4x - 2y - 35 + 8 + 5x + 7y = 0 \Leftrightarrow x + 5y - 27 = 0$$

Saiba mais

Volumes

Na Geometria Analítica espacial, os determinantes de 3ª ordem permitem que sejam calculados os volumes de alguns poliedros que tenham um de seus vértices na origem do espaço tridimensional.

Considere $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ e $C(x_C, y_C, z_C)$ as coordenadas de três dos vértices de um paralelepípedo com arestas $\overline{OA}$ $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$ em que O representa a origem do espaço cartesiano.

O volume desse paralelepípedo será igual ao módulo do seguinte determinante:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix}$$

Desse fato decorre que:

O volume de cada prisma triangular que pode ser obtido por alguma seção diagonal do paralelepípedo é dado por:

$$V = \frac{1}{2} \cdot |D|$$

O volume de cada pirâmide quadrangular inscrita no paralelepípedo é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \ |D|$$

O volume do tetraedro OABC é dado por:

$$V = \frac{1}{6} \cdot |D|$$

FRENTE 2

Cofator

No cálculo de um determinante cada entrada da matriz quadrada de ordem $n > 1$ fica multiplicada por uma ou mais entradas da mesma matriz, além de um sinal (+1) ou (–1).

Sendo M uma matriz quadrada, o número ou expressão algébrica que multiplica cada entrada m_{ij} da matriz, durante o cálculo de seu determinante, é o cofator de m_{ij}

Indicamos cofatores por “Cof”, que funciona como uma função da entrada da matriz, ou pela letra Δ indexada com a mesma posição (linha – coluna) da sua respectiva entrada.

$$Cof(m_{ij}) = \Delta_{ij}$$

O determinante de uma matriz M de 1ª ordem é igual ao valor de sua única entrada: m_{11}. Assim, nesse caso, o único cofator é simplesmente igual a (+1).

$$Cof(m_{11}) = \Delta_{11} = +1$$

No caso das matrizes de 2ª ordem, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad \quad bc$ 4 cofatores podem ser observados:

$$Cof\,(a) = \Delta_{11} = +d$$

$$Cof\,(b) = \Delta_{12} = \quad c$$

$$Cof\,(c) = \Delta_{21} = -b$$

$$Cof\,(d) = \Delta_{22} = +a$$

Repare que as entradas que participam do cálculo de um cofator Δ_{ij} não podem pertencer à linha i, nem pertencer à coluna j. Por isso, para calcular um cofator Δ_{ij} recomenda-se reescrever a matriz eliminando sua linha i e sua coluna j.

O cálculo dos cofatores em matrizes de 3ª ordem é mais delicado, pois cada entrada da matriz participa de dois produtos elementares. Sendo assim, são necessárias algumas fatorações.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{vmatrix} = ayt + bzr + cxs - cyr - azs - bxt$$

Os produtos elementares em que a entrada **a** participa são: (+ayt) e (azs).

Então, colocando esse fator comum **a** em evidência, tem se a expressão: $a \cdot (yt \quad zs)$.

Portanto: $Cof\,(a) = \Delta_{11} = yt \quad zs$

Os produtos elementares em que a entrada **x** participa são: (+cxs) e (–bxt).

Então, colocando esse fator comum **x** em evidência, tem se a expressão: $x \cdot (cs \quad bt)$.

Portanto: $Cof\,(x) = \Delta_{21} = cs - bt$.

Note que ambos os cofatores usados como exemplos podem ser expressos na forma de determinantes:

$$\Delta_{11} = yt \quad zs = \begin{vmatrix} y & z \\ s & t \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{21} = cs \quad bt = \begin{vmatrix} c & b \\ t & s \end{vmatrix}$$

No caso do cofator Δ_{11} observe que as entradas do determinante $\begin{vmatrix} y & z \\ s & t \end{vmatrix}$ estão na mesma ordem que na matriz original. Por isso, eliminando a linha 1 e a coluna 1 da matriz original, obtém-se uma matriz de ordem menor cujo determinante é o próprio cofator Δ_{11}.

$$\begin{vmatrix} \not{a} & \not{b} & \not{c} \\ \not{x} & y & z \\ \not{r} & s & t \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} y & z \\ s & t \end{vmatrix} = y \cdot t - z \cdot s = \Delta_{11}$$

Mas, no caso do cofator Δ_{21}, as entradas do determinante $\begin{vmatrix} c & b \\ t & s \end{vmatrix}$ estão na ordem contrária à da matriz original.

Por isso, eliminando a linha 2 e a coluna 1 da matriz original, obtém-se uma matriz de ordem menor cujo determinante é o cofator Δ_{21} com sinal trocado.

$$\begin{vmatrix} \not{a} & b & c \\ \not{x} & \not{y} & \not{z} \\ \not{r} & s & t \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} b & c \\ s & t \end{vmatrix} = b \cdot t - c \cdot s = -\Delta_{21}$$

As matrizes menores obtidas pela eliminação de linhas e colunas da matriz original são denominadas matrizes complementares.

O determinante das matrizes complementares é igual a:

- Δ_{ij} sempre que a soma $i + j$ for um número par.
- Δ_{ij} sempre que a soma $i + j$ for um número ímpar

Assim, o valor dos cofatores pode ser obtido mul tiplicando $(\ 1)^{i+j}$ pelo determinante da matriz menor complementar

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det \begin{bmatrix} \textit{Matriz original} \\ \textit{sem a linha i e} \\ \textit{sem a coluna j} \end{bmatrix}$$

Exercícios resolvidos

40 Dada a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, tal que $a_{ij} = 3 \cdot i - 2 \cdot j$, determine:

a) A matriz menor complementar da entrada a_{23}.

b) O cofator da entrada a_{23}.

Resolução:

a) Eliminando a 2ª linha e a 3ª coluna de

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, obtém-se a matriz complementar da entrada a_{23}:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Calculando as entradas que restaram:

$a_{11} = 3 \cdot 1 \quad 2 \cdot 1 = 1$ $\qquad$ $a_{12} = 3 \cdot 1 \quad 2 \cdot 2 = -1$

$a_{31} = 3 \cdot 3 \quad 2 \cdot 1 = 7$ $\qquad$ $a_{32} = 3 \cdot 3 \quad 2 \cdot 2 = 5$

Portanto, a matriz menor complementar pedida é $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$.

b) $\text{cof}(a_{23}) = (\ \ 1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = (\ \ 1)^5 \cdot [1 \cdot 5 \quad (\ \ 1) \cdot 7] = (\ \ 1) \cdot [5 + 7] = \quad 12$

41 Calcule os cofatores de todas as entradas não nulas posicionadas na 3ª linha da matriz M

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolução:

Seja Δ_{ij} o cofator de uma entrada da matriz M.

Na 3ª linha de M tem-se i = 3 e $1 \leq j \leq 4$.

Como, nessa matriz, $a_{33} = 0$ e $a_{34} = 0$ são entradas nulas, os cofatores que precisam ser calculados são:

$$\Delta_{31} = (\ \ 1)^{3+1} \cdot \det \begin{pmatrix} \vdots & 2 & 3 & 4 \\ \vdots & 1 & 2 & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (\ \ 1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Calculando o determinante pela regra de Sarrus:

$$\Delta_{31} = 1 \cdot [8 + 9 + 0 \quad 8 \quad 0 \quad 6] = 1 \cdot 3 = 3$$

$$\Delta_{32} = (\ \ 1)^{3+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & \vdots & 3 & 4 \\ 0 & \vdots & 2 & 3 \\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 & 2 \end{pmatrix} = (\ \ 1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Calculando o determinante pela regra de Sarrus:

$$\Delta_{32} = (-1)^5 \cdot [4 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0] = -1 \cdot 4 = -4$$

42 Escreva a série dos cofatores das entradas da primeira coluna da matriz M.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Resolução:

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} \vdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & 5 & 0 \\ \vdots & 8 & 6 \end{pmatrix} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot [30 - 0] = 30$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det \begin{pmatrix} \vdots & 0 & 4 \\ \vdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & 8 & 6 \end{pmatrix} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = -1 \cdot [0 - 32] = 32$$

$$\Delta_{31} = (\ \ 1)^{3+1} \cdot \det \begin{pmatrix} \vdots & 0 & 4 \\ \vdots & 5 & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = (\ \ 1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot [0 \quad 20] = \quad 20$$

Portanto: $(\Delta_{11}, \Delta_{21}, \Delta_{31}) = (30, 32, -20)$.

Matriz dos cofatores e matriz adjunta

Considere uma matriz quadrada M de entradas $m_{i\,j}$ e uma matriz quadrada C, de mesma ordem *n*, mas cujas entradas Δ_{ij} são exatamente os cofatores de m_{ij}

Nesse caso, dizemos que C é a matriz dos cofatores de M. Essa matriz dos cofatores será indicada por C(M) ou por M_{COF}.

Com n = 2:

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow C(M) = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Com n = 3:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{pmatrix} \Rightarrow C(M) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} y & z \\ s & t \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x & z \\ r & t \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} x & y \\ r & s \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ s & t \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & c \\ r & t \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ r & s \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Chamamos de matriz adjunta de uma matriz original M o resultado da transposição da matriz dos cofatores de M. A matriz adjunta é indicada por *adj* Assim:

$$adj(M) = (M_{COF})^T$$

Exercícios resolvidos

43 Encontre a matriz dos cofatores e a matriz adjunta de $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.

Resolução:

$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 7 = 7$

$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 5 = -5$

$\Delta_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 6 = -6$

$\Delta_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 4 = 4$

Portanto, a matriz dos cofatores é $C(A) = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$.

Da relação *adj*(A) = $C(A)^T$ tem-se que a matriz adjunta é $\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

44 Encontre a matriz dos cofatores e a matriz adjunta de $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 6 \end{bmatrix}$.

Resolução:

Os cofatores da 1ª coluna (j = 1) são:

$$\begin{cases} \Delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot [30 - 0] = 1 \cdot 30 = 30 \\ \Delta_{21} = (\quad 1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = (\quad 1)^3 \cdot [0 \quad 32] = (\quad 1) \cdot [\quad 32] = 32 \\ \Delta_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot [0 - 20] = 1 \cdot [-20] = -20 \end{cases}$$

Os cofatores da 2ª coluna (j = 2) são:

$$\begin{cases} \Delta_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot [18 - 0] = (-1) \cdot 18 = -18 \\ \Delta_{22} = (\quad 1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = (\quad 1)^4 \cdot [12 \quad 4] = 1 \cdot 8 = 8 \\ \Delta_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot [0 - 12] = (-1) \cdot [-12] = 12 \end{cases}$$

Os cofatores da 3ª coluna (j = 3) são: $\begin{cases} \Delta_{13} = (\ \ 1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = (\ \ 1)^4 \cdot [24 \quad 5] = 1 \cdot 19 = 19 \\ \Delta_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot [16 - 0] = (-1) \cdot 16 = -16 \\ \Delta_{33} = (\ \ 1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (\ \ 1)^6 \cdot [10 \quad 0] = 1 \cdot 10 = 10 \end{cases}$

Portanto, a matriz dos cofatores de A é $C(A) = \begin{bmatrix} 30 & 18 & 19 \\ 32 & 8 & 16 \\ -20 & 12 & 10 \end{bmatrix}$.

Da relação *Adj*(A) = $C(A)^T$ tem-se que a matriz adjunta é:

$$\begin{bmatrix} 30 & -18 & 19 \\ 32 & 8 & 16 \\ -20 & 12 & 10 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 30 & 32 & -20 \\ 18 & 8 & 12 \\ 19 & -16 & 10 \end{bmatrix}$$

Teorema de Laplace

"O determinante de uma matriz é igual ao produto interno de qualquer fila da matriz pela fila correspondente na matriz de seus cofatores."

$$\det(M) = \langle \text{fila de M, mesma fila de } M_{COF} \rangle$$

Lembrando que as filas de uma matriz são tanto as suas linhas quanto as suas colunas, mas não suas diagonais, o teorema é formulado de dois modos distintos:

Para cada linha i da matriz quadrada M de ordem *n*, tem-se:

$$\det(M) = \langle (m_{i1} \quad m_{i2} \quad m_{i3} \quad \cdots \quad m_{in}), (\Delta_{i1} \quad \Delta_{i2} \quad \Delta_{i3} \quad \cdots \quad \Delta_{in}) \rangle$$

$$\det(M) = \sum_{p=1}^{n} m_{ip} \cdot \Delta_{ip}$$

$$\det(M) = m_{i1} \cdot \Delta_{i1} + m_{i2} \cdot \Delta_{i2} + m_{i3} \cdot \Delta_{i3} + \ldots + m_{in} \cdot \Delta_{in}$$

E, para cada coluna j de M, tem-se:

$$\det(M) = \left\langle \begin{pmatrix} m_{1j} \\ m_{2j} \\ m_{3j} \\ \vdots \\ m_{nj} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Delta_{1j} \\ \Delta_{2j} \\ \Delta_{3j} \\ \vdots \\ \Delta_{nj} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\det(M) = \sum_{p=1}^{n} m_{pj} \cdot \Delta_{pj}$$

$$\det(M) = m_{1j} \cdot \Delta_{1j} + m_{2j} \cdot \Delta_{2j} + m_{3j} \cdot \Delta_{3j} + \ldots + m_{nj} \cdot \Delta_{nj}$$

O teorema de Laplace estabelece um algoritmo alternativo para calcular determinantes de matrizes com qualquer tamanho, fortemente recomendado para as matrizes quadradas de ordem n > 3, uma vez que a regra de Sarrus não funciona nessas matrizes.

Uma vantagem do uso do teorema de Laplace para calcular determinantes de matrizes quadradas é a multiplicidade de opções que ele proporciona, podendo ser aplicado a qualquer fila da matriz.

Matrizes quadradas de ordem *n* possuem 2n filas, e a mais recomendada para se aplicar o teorema de Laplace é a fila que possui a maior quantidade de termos nulos (zeros).

Exercícios resolvidos

45 **PUC-Minas** O valor do determinante da matriz $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ é

A 4
B 3
C 1
D 2
E 3

Resolução:

A fila com a maior quantidade de zeros é a 1ª linha (com 3 zeros)
Aplicando o teorema de Laplace nessa fila:

$$\det(M) = m_{11} \cdot \Delta_{11} + m_{12} \cdot \Delta_{12} + m_{13} \cdot \Delta_{13} + m_{14} \cdot \Delta_{14}$$

Substituindo as entradas da matriz:

$$\det(M) = 0 \cdot \Delta_{11} \quad 2 \cdot \Delta_{12} + 0 \cdot \Delta_{13} + 0 \cdot \Delta_{14} = \quad 2 \cdot \Delta_{12}$$

Calculando o cofator restante:

$$\det(M) = -2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det \begin{pmatrix} \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \vdots & 3 & 0 \\ -1 & \vdots & 0 & -1 \\ 3 & \vdots & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Usando a regra de Sarrus para o determinante menor complementar:

$$\det(M) = \cdot 2 \cdot (\quad 1)^3 [0 \quad 4 \quad 3 \quad 0 \quad 9 \quad 0] = \quad 2 \, (\cdot \, 1) \, [\quad 2] = -4$$

Alternativa: **A**.

46 Calcule o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Resolução:

Há 3 filas com a maior quantidade de zeros: a 3ª linha, a 1ª coluna e a 3ª coluna (com 2 zeros).
Solução 1
Aplicando o teorema de Laplace na 3ª linha da matriz A:

$$\det(A) = a_{31} \cdot \Delta_{31} + a_{32} \cdot \Delta_{32} + a_{33} \cdot \Delta_{33} + a_{34} \cdot \Delta_{34}$$

Substituindo as entradas da matriz:

$$\det(A) = 3 \cdot \Delta_{31} + 2 \cdot \Delta_{32} + 0 \cdot \Delta_{33} + 0 \cdot \Delta_{34} = 3 \cdot \Delta_{31} + 2 \cdot \Delta_{32}$$

Calculando os cofatores restantes:

$$\det(A) = 3 \cdot (\quad 1)^{3+1} \cdot \det \begin{pmatrix} \vdots & 2 & 3 & 4 \\ \vdots & 1 & 2 & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot (\quad 1)^{3+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & \vdots & 3 & 4 \\ 0 & \vdots & 2 & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Usando a regra de Sarrus para os determinantes das matrizes complementares:

$$\det(A) = 3 \cdot (\quad 1)^4 \cdot [\quad 8 + 0 + 6 + 8 + 9 \cdot 0] \cdot \quad 2 \, (+1)^5 + [\, 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \quad 0 \quad 0]$$
$$\det(A) = 3 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot 4 = 9 - 8 = 1$$

Solução 2

Aplicando o teorema de Laplace na 1ª coluna de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = a_{11} \cdot \Delta_{11} + a_{21} \cdot \Delta_{21} + a_{31} \cdot \Delta_{31} + a_{41} \cdot \Delta_{41}$$

Substituindo as entradas da matriz:

$$\det(A) = 1 \cdot \Delta_{11} + 0 \cdot \Delta_{21} + 3 \cdot \Delta_{31} + 0 \cdot \Delta_{41} = 1 \cdot \Delta_{11} + 3 \cdot \Delta_{31}$$

$$\det(A) = 1 \cdot (\ \ 1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & 1 & 2 & 3 \\ \vdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot (\ \ 1)^{3+1} \cdot \det \begin{pmatrix} \vdots & 2 & 3 & 4 \\ \vdots & 1 & 2 & 3 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Usando a regra de Sarrus para os determinantes das matrizes complementares:

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^2 \cdot [0 - 0 - 8 + 0 + 0 + 0] + 3 \cdot (-1)^4 \cdot [-8 - 0 - 6 + 8 + 9 + 0]$$

$$\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot [-8] + 3 \cdot 1 \cdot 3 = -8 + 9 = 1$$

Solução 3

Aplicando o teorema de Laplace na 3ª coluna de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\det(A) = a_{13} \cdot \Delta_{13} + a_{23} \cdot \Delta_{23} + a_{33} \cdot \Delta_{33} + a_{43} \cdot \Delta_{43}$$

Substituindo as entradas da matriz:

$$\det(A) = 3 \cdot \Delta_{13} + 2 \cdot \Delta_{23} + 0 \cdot \Delta_{33} + 0 \cdot \Delta_{43} = 3 \cdot \Delta_{13} + 2 \cdot \Delta_{23}$$

$$\det(A) = 3 \cdot (\ \ 1)^{1+3} \cdot \det \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 1 & \vdots & 3 \\ 3 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot (\ \ 1)^{2+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & \vdots & 4 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 3 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

Usando a regra de Sarrus para os determinantes das matrizes complementares:

$$\det(A) = 3 \cdot (-1)^4 \cdot [-0 - 0 - 6 + 0 + 0 + 9] + 2 \cdot (-1)^5 \cdot [-0 - 0 - 12 + 4 + 0 + 12]$$

$$\det(A) = 3 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot (\ \ 1) \cdot 4 = 9 \quad 8 = 1$$

47 Se $\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = 2$, $\begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix} = 3$ e $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 10$, então se pode concluir que $\begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix}$ é igual a

A 0 **B** 5 **C** 15 **D** –5 **E** –15

Resolução:

Aplicando o teorema de Laplace na 3ª linha do determinante de 3ª ordem:

$$1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = 10$$

$$1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix} + 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = 10$$

$$1 \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = 10$$

Substituindo os valores dos determinantes dados no enunciado, temos:

$$1 \cdot 3 - 1 \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix} + 1 \cdot 2 = 10$$

$$-\begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix} = 10 - 3 - 2$$

$$\begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix} = -5$$

Alternativa: **D**.

Teorema de Cauchy

"O produto interno de qualquer fila de uma matriz M por uma fila paralela da matriz de seus cofatores é igual a zero."

$$\langle \text{fila de M, fila paralela de } M_{COF} \rangle = 0$$

Por ter resultado constante, o teorema de Cauchy é bastante útil para verificar se os cofatores das entradas de uma matriz foram calculados corretamente.

Veja o exemplo do exercício resolvido 42, em que foi pedida a série dos cofatores da 1ª coluna da matriz M.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Na resolução do exercício, a série encontrada foi $(\Delta_{11}, \Delta_{21}, \Delta_{31}) = (30, 32, \ \ 20)$

Aqui o teorema de Cauchy pode ser aplicado para verificar os resultados Para isso, devem ser efetuados os produtos internos entre a série encontrada e cada fila paralela à 1ª coluna.

$$\langle 2^{a} \text{ coluna de M, cofatores da } 1^{a} \text{ coluna} \rangle = 0 \cdot 30 + 5 \cdot 32 + 8 \cdot (-20) = 0 + 160 - 160 = 0$$

$$\langle 3^{a} \text{ coluna de M, cofatores da } 1^{a} \text{ coluna} \rangle = 4 \cdot 30 + 0 \cdot 32 + 6 \cdot (-20) = 120 + 0 - 120 = 0$$

Isso garante que a série dos cofatores encontrada está correta.

Matriz inversa de qualquer ordem

Toda matriz quadrada M e sua respectiva matriz adjunta adj(M) formam um par de matrizes comutativo O produto desse par de matrizes, em qualquer ordem, resulta em uma matriz diagonal cujas entradas não nulas são iguais ao determinante da matriz original Assim:

$$M \cdot adj(M) = \begin{bmatrix} \det(M) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(M) & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \det(M) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \det(M) \end{bmatrix}$$

O exercício resolvido 44, por exemplo, pede que se encontre a matriz adjunta de $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ e tem como resposta

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 30 & 32 & 20 \\ -18 & 8 & 12 \\ 19 & -16 & 10 \end{bmatrix}$$

Assim, efetuando-se o produto A · *adj*(A), obtém-se:

$$A \cdot adj(A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 30 & 32 & 20 \\ 18 & 8 & 12 \\ 19 & -16 & 10 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot 30 + 0 \cdot (\;\; 18) + 4 \cdot 19 & 2 \cdot 32 + 0 \cdot 8 + 4 \cdot (\;\; 16) & 2 \cdot (\;\; 20) + 0 \cdot 12 + 4 \cdot 10 \\ 3 \cdot 30 + 5 \cdot (\;\; 18) + 0 \cdot 19 & 3 \cdot 32 + 5 \cdot 8 + 0 \cdot (\;\; 16) & 3 \cdot (\;\; 20) + 5 \cdot 12 + 0 \cdot 10 \\ 1 \cdot 30 + 8 \cdot (-18) + 6 \cdot 19 & 1 \cdot 32 + 8 \cdot 8 + 6 \cdot (-16) & 1 \cdot (-20) + 8 \cdot 12 + 6 \cdot 10 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 60 + 0 + 76 & 64 + 0 - 64 & -40 + 0 + 40 \\ 90 \;\; 90 \;\; 0 & 96 + 40 + 0 & 60 \;\; 60 \;\; 0 \\ 30 - 144 + 114 & 32 + 64 - 96 & -20 + 96 + 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 136 & 0 & 0 \\ 0 & 136 & 0 \\ 0 & 0 & 136 \end{bmatrix}$$

Colocando em evidência o determinante, tem-se que um produto do tipo M · *adj*(M) é sempre igual a uma matriz identidade de tamanho adequado, multiplicada pelo valor do determinante da matriz original:

$$M \cdot adj(M) = \det(M) \cdot I$$

No exemplo da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ tem-se:

$$A \cdot adj(A) = 136 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, det(A) = 136.

Exercício resolvido

48 Considere a matriz quadrada de terceira ordem $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e obtenha:

a) O valor de seu determinante.

b) A matriz M_{COF} dos cofatores de M.

c) A matriz resultante do produto $M \cdot (M_{cof})^T$.

Resolução:

a) Da regra de Sarrus:

det(M) = 4 + 0 + 12 2 + 6 + 0 = 12

b) Os cofatores da 1ª coluna (j = 1) são:

$$\Delta_{11} = (\;\; 1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot [\;\; 2 \;\;\; 0] = 1 \cdot [\;\; 2] = \;\; 2$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [-3 - 0] = (-1) \cdot [-3] = 3$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot [0 - 4] = 1 \cdot 2 = 2$$

FRENTE 2

Os cofatores da 2ª coluna (j = 2) são:

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [-4-2] = (-1) \cdot [-6] = 6$$

$$\Delta_{22} = (\ 1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot [\ 1\ \ 2] = 1 \cdot [\ 3] = \ 3$$

$$\Delta_{32} = (\ 1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (\ 1) \cdot [2\ \ 8] = (\ 1) \cdot [\ 6] = 6$$

Os cofatores da 3ª coluna (j = 3) são:

$$\Delta_{13} = (\ 1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot [0\ \ 2] = 1 \cdot [\ 2] = \ 2$$

$$\Delta_{23} = (\ 1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (\ 1) \cdot [0\ \ 3] = (\ 1) \cdot [\ 3] = 3$$

$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot [2-12] = 1 \cdot [-10] = -10$$

Portanto, $M_{COF} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix}$

c) $(M_{COF})^T = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 6 \\ 2 & 3 & 10 \end{bmatrix}$

$$M \cdot (M_{COF})^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 6 \\ -2 & 3 & -10 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot (\ 2) + 3 \cdot 6 + 2 \cdot (\ 2) & 1 \cdot 3 + 3 \cdot (\ 3) + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot (\ 10) \\ 4 \cdot (\ 2) + 2 \cdot 6 + 2 \cdot (\ 2) & 4 \cdot 3 + 2 \cdot (\ 3) + 2 \cdot 3 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot (\ 10) \\ 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 6 + (-1) \cdot (-2) & 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-3) + (-1) \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 6 + (-1) \cdot (-10) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 + 18\ \ 4 & 3\ \ 9 + 6 & 2 + 18\ \ 20 \\ 8 + 12\ \ 4 & 12\ \ 6 + 6 & 8 + 12\ \ 20 \\ -2 + 0 + 2 & 3 + 0 - 3 & 2 + 0 + 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Se M não for uma matriz singular, ou seja, se det(M) ≠ 0, dividindo os membros da relação $M \cdot adj(M) = \det(M) \cdot I$ pelo determinante de M, obtém-se:

$$M \cdot \frac{adj(M)}{\det(M)} = I$$

Então, como a matriz identidade I é tal que $I = M \cdot M^{-1}$, qualquer que seja a matriz não singular M, conclui-se que dividir todas as entradas da matriz adjunta pelo determinante da matriz original é uma forma de se obter a matriz inversa.

$$M^{-1} = \frac{adj(M)}{\det(M)}$$

A mesma propriedade enunciada a partir da matriz dos cofatores fica expressa por:

$$M^{\ 1} = \frac{1}{\det(M)} \cdot (M_{COF})^T$$

Ambas as expressões apresentam uma condição de existência que é det(M) ≠ 0. As matrizes nessas condições são chamadas de matrizes invertíveis ou inversíveis.

- det(M) ≠ 0 ⇔ M é uma matriz inversível;
- det(M) = 0 ⇔ M não é uma matriz inversível.

Exercício resolvido

49 Encontre a matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Resolução:

Primeiro vamos calcular o determinante da matriz, pela regra de Sarrus:

$$\det(A) = \ 3 \quad 0 \quad 6 + 1 + 0 + 4 = \quad 4$$

Agora vamos encontrar a matriz dos cofatores:

Os cofatores da 1ª coluna (j = 1) são:

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot [1 - 0] = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\Delta_{21} = (\quad 1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (\quad 1) \cdot [3 \quad 2] = (\quad 1) \cdot 1 = \quad 1$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot [0 - 1] = 1 \cdot [-1] = -1$$

Os cofatores da 2ª coluna (j = 2) são:

$$\Delta_{12} = (\quad 1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (\quad 1) \cdot [2 \quad 0] = (\quad 1) \cdot 2 = \quad 2$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot [1 - 3] = 1 \cdot [-2] = -2$$

$$\Delta_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [0 - 2] = (-1) \cdot [-2] = 2$$

Os cofatores da 3ª coluna (j = 3) são:

$$\Delta_{13} = (\quad 1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot [4 \quad 3] = \ 1 \cdot 1 = 1$$

$$\Delta_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [2 - 9] = (-1) \cdot [-7] = 7$$

$$\Delta_{33} = (\quad 1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot [1 \quad 6] = 1 \cdot [\quad 5] = \quad 5$$

Assim, $A_{COF} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

Por fim, vamos aplicar a fórmula $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot (A_{COF})^T$

$$A^{-1} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

Combinação linear das filas de uma matriz

O conceito de combinação linear também pode ser aplicado às séries numéricas finitas, como as filas de uma determinada matriz.

Sendo A uma matriz de tamanho m×n, considere a série das linhas dessa matriz:

$$(\textit{lin } 1, \textit{lin } 2, \textit{lin } 3, \ldots, \textit{lin } m)$$

Para criar uma combinação linear ℓ dessa série de linhas, basta que seja escolhida uma série de m constantes reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m)$, que não sejam todas nulas, e efetuar o produto interno dessas séries:

$$\ell = \alpha_1 \cdot (\textit{lin } 1) + \alpha_2 \cdot (\textit{lin } 2) + \alpha_3 \cdot (\textit{lin } 3) + \ldots \alpha_m \cdot (\textit{lin } m)$$

Toda combinação linear da série de linhas de $A_{m \times n}$ é uma matriz linha (ou vetor) com exatamente n entradas.

Considere agora a série das colunas da mesma matriz:

$$(\textit{col } 1, \textit{col } 2, \textit{col } 3, \ldots, \textit{col } n)$$

Analogamente, para criar uma combinação linear C dessa série de colunas, basta que seja escolhida uma série de n constantes reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$, que não sejam todas nulas, e efetuar o produto interno dessas séries:

$$C = \alpha_1 \cdot (\textit{col } 1) + \alpha_2 \cdot (\textit{col } 2) + \alpha_3 \cdot (\textit{col } 3) + \ldots \alpha_n \cdot (\textit{col } n)$$

Toda combinação linear da série de colunas de $A_{m \times n}$ é uma matriz coluna (ou vetor) com exatamente m entradas.

Veja, por exemplo, algumas combinações lineares de filas da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Como a matriz possui 4 linhas para $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = -1$ e $\alpha_4 = 1$, tem-se:

$$\ell = 3 \cdot (\textit{lin}1) + 0 \cdot (\textit{lin}2) - 1 \cdot (\textit{lin}3) + 1 \cdot (\textit{lin}4)$$

$$\ell = 3 \cdot (2 \quad 1 \quad 3) + 0 \cdot (0 \quad 3 \quad 1) \quad 1 \cdot (\quad 3 \quad 0 \quad 5) + 1 \cdot (8 \quad 4 \quad 3)$$

$$\ell = (6 \quad 3 \quad 9) + (0 \quad 0 \quad 0) + (3 \quad 0 \quad 5) + (8 \quad 4 \quad 3)$$

$$\ell = (17 \quad 7 \quad 1)$$

Como a matriz possui 3 colunas $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = \ 2$, tem-se:

$$c = 5 \cdot (\textit{col}\,1) + 4 \cdot (\textit{col}\,2) \quad 2 \ (\textit{col}\,3)$$

$$c = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 15 \\ 40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ 25 \\ 62 \end{pmatrix}$$

Propriedades dos determinantes

Os determinantes admitem muitas propriedades algébricas que podem facilitar consideravelmente o trabalho de seus cálculos. Algumas dessas propriedades permitem que o determinante de uma matriz, de grande tamanho, seja percebido sem a necessidade de cálculo algum, como as propriedades que implicam determinantes nulos.

Sendo M uma matriz quadrada de ordem n, tem-se $\det(M) = 0$ sempre que:

- Todas as entradas de uma fila de M forem nulos. No exemplo, a segunda coluna é nula:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 0$$

- Duas filas paralelas de M forem iguais. No exemplo, as duas últimas linhas são iguais: (*lin* 2) = (*lin* 3).

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 0$$

- Duas filas paralelas de M forem diretamente proporcionais. No exemplo, as duas primeiras linhas são proporcionais: (*lin* 1) = 2 · (*lin* 2).

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

- Uma fila de M for combinação linear de suas filas paralelas. No exemplo, a 1ª coluna é igual à soma da 3ª com o dobro da 2ª: (*col* 1) = 2 · (*col* 2) + 1 · (*col* 3).

$$\det\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 2 \\ 13 & 5 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

Exercício resolvido

50 FGV Uma matriz 4 × 4 que admite inversa é

A $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 16 \\ 2 & 6 & 8 & 20 \\ 5 & 6 & 11 & 8 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$

E $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & -16 \end{bmatrix}$

Resolução:

A matriz da alternativa A não é inversível, pois a primeira e a terceira linhas são proporcionais, logo, seu determinante é nulo

(*lin* 3) = 2 (*lin* 1)

A matriz da alternativa B não é inversível, pois a terceira linha é igual à soma da primeira com a segunda, logo, seu determinante é nulo.

(*lin* 3) = (*lin* 1) + (*lin* 2)

A matriz da alternativa C não é inversível, pois há colunas iguais, consequentemente, o determinante é nulo.

(*col* 1) = (*col* 2)

A matriz da alternativa D não é inversível, pois a 2ª linha é proporcional à soma da 1ª e com a 3ª, logo, também tem determinante igual a zero.

(*lin* 1) + (*lin* 3) = 2 · (*lin* 2)

Alternativa: **E**.

Há outras propriedades que reduzem bastante a quantidade de cálculos:

Se duas filas paralelas de uma matriz quadrada forem trocadas de posição entre si, o determinante da matriz apenas muda de sinal. Exemplo:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ r & s & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & z & y \\ a & c & b \\ r & t & s \end{vmatrix}$$

lin 1 ⇌ lin 2 col 2 ⇌ col 3

- O determinante das matrizes triangulares é igual ao produto das entradas de sua diagonal principal. Exemplo:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$$

Dessa propriedade decorre que as matrizes identidades têm determinantes unitários:

$$\det(I_n) = 1$$

Multiplicação de determinante por número real

Dada uma matriz quadrada M, se todas as entradas de uma mesma fila forem multiplicadas por um número real λ, então a matriz obtida terá determinante igual a $\lambda \cdot \det(M)$, qualquer que seja a fila multiplicada.

Assim, se $M = \begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix}$, por exemplo, então:

$$\begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ x & y \end{vmatrix} = \lambda \cdot \det(M) \qquad \begin{vmatrix} \lambda a & b \\ \lambda x & y \end{vmatrix} = \lambda \cdot \det(M)$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \lambda x & \lambda y \end{vmatrix} = \lambda \cdot \det(M) \qquad \begin{vmatrix} a & \lambda b \\ x & \lambda y \end{vmatrix} = \lambda \cdot \det(M)$$

Em contrapartida, essa propriedade permite colocar em evidência qualquer fator que seja comum a todas as entradas de uma mesma matriz antes de calcular seu determinante. Exemplo:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \cdot 1 & 4 \\ 0 & 3 \cdot 3 & 6 \\ 0 & 3 \cdot 2 & 7 \end{pmatrix} = 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Multiplicar uma matriz por um número real λ difere de multiplicar um determinante pelo mesmo número, pois, no caso das matrizes, todas as entradas devem ser multiplicadas por λ e, no caso dos determinantes, apenas as entradas de uma única fila é que devem ser multiplicadas por λ.

Assim, quando uma matriz quadrada é multiplicada por um número real λ, seu determinante fica multiplicado por λ elevado ao número de linhas da matriz. Assim, sendo M uma matriz quadrada de ordem *n*:

$$\det(\lambda \cdot M) = \lambda^n \cdot \det(M)$$

Exercício resolvido

51 Se $M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{bmatrix}$ é uma matriz tal que det(M) = k, calcule:

a) $\begin{vmatrix} a & x & r \\ b & y & s \\ c & z & t \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} r & s & t \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 6a & 3b & 3c \\ 2x & y & z \\ 2r & s & t \end{vmatrix}$

d) $\det(k \cdot M)$

Resolução:

a) $\begin{vmatrix} a & x & r \\ b & y & s \\ c & z & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{vmatrix} = k$

b) $\begin{vmatrix} r & s & t \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{vmatrix} = -k$

c) $\begin{vmatrix} 6a & 3b & 3c \\ 2x & y & z \\ 2r & s & t \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2a & b & c \\ 2x & y & z \\ 2r & s & t \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{vmatrix} = 6k$

d) $\det(k \cdot M) = k^3 \cdot \det(M) = k^3 \cdot k = k^4$

Teorema de Binet

Na multiplicação de matrizes quadradas, o determinante do produto é igual ao produto dos determinantes das matrizes, que são os fatores da multiplicação.

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A \cdot B \cdot C) = \det(A) \cdot \det(B) \cdot \det(C)$$

$$\vdots$$

Particularmente, quando uma matriz quadrada M é elevada a um expoente natural k:

$$\det\left(M^{k}\right) = \left[\det(M)\right]^{k}$$

Exercício resolvido

52 Duas matrizes quadradas A e B de 3ª ordem são tais que det(A · B) = det(2A). Se ambas as matrizes são inversíveis, então o determinante da matriz B é igual a

A 0
B 1
C 2
D 4
E 8

Resolução:

Do teorema de Binet vem que:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Como A é matriz de 3ª ordem:

$$\det(2 \cdot A) = 2^3 \cdot \det(A) = 8 \cdot \det(A)$$

Comparando as duas expressões:

$$\det(A) \cdot \det(B) = 8 \cdot \det(A) \Leftrightarrow \det(A) = 0 \text{ ou } \det(A) = 8$$

Como A é inversível, $\det(A) \neq 0$, portanto, $\det(B) = 8$.

Alternativa: **E**.

Determinante das matrizes associadas

Dada uma matriz M, diversas matrizes associadas a M são importantes para o estudo da Álgebra Linear. Entre as mais importantes estão a transposta, a inversa, a dos cofatores e a adjunta.

Toda matriz quadrada e sua transposta possuem o mesmo determinante

$$\det\left(M^{T}\right) = \det(M)$$

Essa propriedade decorre do fato de a matriz inversa ter exatamente os mesmos produtos elementares da matriz original.

O determinante da matriz inversa é o inverso do determinante da matriz original.

$$\det\left(M^{-1}\right) = \frac{1}{\det(M)}$$

Essa propriedade decorre do teorema de Binet:

$$M \cdot M^{-1} = I$$
$$\det\left(M \cdot M^{-1}\right) = \det(I)$$
$$\det(M) \cdot \det\left(M^{-1}\right) = 1$$

O teorema de Binet também permite deduzir uma expressão para os determinantes das matrizes adjunta e dos cofatores.

Dada uma matriz quadrada M de ordem *n*, sendo $A = \text{adj}(M)$ e $\Delta = \det(M)$:

$$
\begin{aligned}
M \cdot A &= \Delta \cdot I \\
\det(M \cdot A) &= \det(\Delta \cdot I) \\
\det(M) \cdot \det(A) &= \Delta^{n} \cdot \det(I) \\
\Delta \cdot \det(A) &= \Delta^{n} \cdot 1
\end{aligned}
$$

Então, se M não for uma matriz singular:

$$\det(A) = \det(M)^{n-1}$$

Por fim, como a transposição de uma matriz não altera seu determinante:

$$\det\left(M_{COF}\right) = \det(M)^{n-1}$$

Teorema de Jacobi

Substituindo qualquer fila de uma matriz quadrada pela soma dela com alguma combinação linear de suas filas paralelas, obtém-se uma nova matriz com o mesmo determinante da matriz original.

Para simplificar esse processo de substituição, as séries escolhidas para formar a combinação linear costumam ter a maior quantidade de zeros possível.

Exemplo com substituição de linha:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Aqui, a 3ª linha da matriz foi substituída pela soma dela mesma com a 1ª linha multiplicada por (–2). Assim, a nova 3ª linha é:

$$\ell = -2 \cdot (lin1) + 0 \cdot (lin2) + 1 \cdot (lin3)$$
$$\ell = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$
$$\ell = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$
$$\ell = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemplo com substituição de coluna:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

FRENTE 2

Aqui, a 2ª coluna foi substituída pela soma dela mesma com a 1ª coluna. Assim, a nova coluna 2 é:

$$c = 1 \cdot (col\,1) + 1 \cdot (col\,2) + 0 \cdot (col\,3)$$

$$c = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Observe, nas combinações lineares, que a fila substituída deve sempre ser multiplicada por 1, e também que não multiplicamos todas as filas paralelas por zero, para que a matriz não continue a mesma.

Quando o teorema de Jacobi é usado dessa forma, suas aplicações podem ser representadas por meio de setas, como na seguinte ilustração:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \; x\,(-2) \; = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} \; (x\,1) \; = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 7 & 9 & 9 \end{vmatrix}$$

Muitos cálculos de determinantes podem ser simplificados quando se aplica o teorema de Jacobi, de modo a anular algumas entradas da matriz. Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 7 & 9 & 9 \end{vmatrix} \; (x\,(-1)) \; = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Regra da dissociação

Foi visto que a função determinante é distributiva em relação ao produto matricial (teorema de Binet), mas essa função não possui propriedade distributiva em relação à adição de matrizes.

Assim, sendo A e B duas matrizes quadradas de mesma ordem, via de regra:

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$$

O determinante de uma matriz quadrada de ordem *n* pode ser expresso como a soma de dois determinantes, se eles possuírem $n - 1$ filas paralelas idênticas.

$$\begin{vmatrix} a+b & c & d \\ a+b & z & w \\ a+b & t & u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & d \\ x & z & w \\ r & t & u \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & d \\ y & z & w \\ s & t & u \end{vmatrix}$$

Nesse caso, a soma das filas paralelas diferentes dos determinantes somados deve ser igual à fila correspondente na matriz original.

Calculando determinantes com os teoremas de Jacobi e Laplace

Calcular determinantes de matrizes quadradas, com ordem $n > 3$, que não apresentam entradas nulas é um processo relativamente longo, tanto pela definição dos produtos elementares quanto pela aplicação direta do teorema de Laplace

Por esse motivo, recomenda-se aplicar o teorema de Jacobi, no sentido de anular algumas entradas da matriz, antes de usar o teorema de Laplace

Em um determinante de ordem *n* com uma entrada unitária, é sempre possível obter uma fila com n   1 entradas nulas

Considere, por exemplo, a matriz $M = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 10 & 12 & 4 \end{pmatrix}$ cuja única entrada unitária está localizada na 2ª linha e 3ª coluna: $m_{23} = 1$.

$$\begin{vmatrix} 5 & 12 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 10 & 12 & 4 \end{vmatrix} x\,(-3) = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 10 & 12 & 4 \end{vmatrix} x\,(-4) = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & -8 & 0 \end{vmatrix}$$

Após esse procedimento, o cálculo do determinante da matriz obtida se reduz ao cálculo de um único cofator:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & \;\;8 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (\;\;\;1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \;\;3 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (\;\;\;1) \cdot [8 + 6] = \;\;\;14$$

Exercícios resolvidos

53 Calcule o determinante da matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Resolução:

Aplicando o teorema de Jacobi da primeira para a segunda linha:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \times(\ \ 1) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Assim, do teorema de Laplace na 2ª linha:

$$\det(M) = 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Calculando o determinante menor complementar pela regra de Sarrus:

$$\det(M) = 1 \cdot (-1)^5 \cdot [-2 - 4 - 4 + 8 + 4 + 1]$$

$$\det(M) = 1 \cdot (\ \ 1) \cdot 3 = \ \ 3$$

54 **Unicamp** Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} x-1 & x-1 & x-1 \\ x-1 & 1 & 2 \\ x-1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, encontre o conjunto solução da equação det(A) = 0.

Resolução:

Colocando em evidência a expressão (x 1) que é fator comum da 1ª coluna, tem-se:

$$\det(A) = (x\ \ 1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x\ \ 1 & x\ \ 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Aplicando o teorema de Jacobi da 2ª para a 3ª linha:

$$\det(A) = (x\ \ 1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x\ \ 1 & x\ \ 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \times(\ \ 1) = (x\ \ 1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x\ \ 1 & x\ \ 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

Aplicando o teorema de Laplace na 3ª linha:

$$\det(A) = (x-1) \cdot (-4) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = (x\ \ 1) \cdot (\ \ 4)\ (\ \ 1)^6\ [1\ \ (x\ \ 1)]$$

$$\det(A) = (x\ \ 1) \cdot (\ \ 4) \cdot 1\ [2\ \ x]$$

$$\det(A) = \ \ 4 \cdot (x\ \ 1)\ [2\ \ x]$$

Assim, det(A) = 0 implica x = 1 ou x = 2, logo, S = {1, 2}

Regra de Chió

Trata-se de outro algoritmo alternativo para calcular determinantes, que pode ser aplicado a toda matriz quadrada A cuja entrada a_{11} seja igual a 1

De acordo com a regra, o determinante de uma matriz A, de ordem, *n* nessas condições, equivale ao de uma matriz B de ordem n 1 tal que:

$$b_{i,j} = a_{1+\ i,1+\ j} \qquad a_{1,1+\ j} \cdot a_{1+\ i,1}$$

Assim, sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ z & a & c \\ w & b & d \end{pmatrix}$, por exemplo, tem-se que det(A) = det(B) com $B = \begin{pmatrix} a \ \cdot x\ 2 & c \ \ y\ z \\ b - x \cdot w & d - y \cdot w \end{pmatrix}$

Exercício resolvido

55 Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 10 & 22 & 12 \\ 10 & 14 & 36 & 46 \end{bmatrix}$.

Resolução:

Como $a_{11} = 1$, pela regra de Chió, temos:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 6 - 2 \cdot 5 & 7 - 3 \cdot 5 & 8 - 4 \cdot 5 \\ 10 \ \cdot 2\ 4 & 22 \ \cdot 3\ 4 & 12 - 4 \cdot 4 \\ 14 \ \cdot 2\ 10 & 36 \ \cdot 3\ 10 & 46 \ \cdot 4\ 10 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 6 - 10 & 7 - 15 & 8 - 20 \\ 10 - 8 & 22 - 12 & 12 - 16 \\ 14 \quad 20 & 36 \quad 30 & 46 \quad 40 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -4 & -8 & -12 \\ 2 & 10 & -4 \\ -6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Colocando-se em evidência os fatores comuns (–4) da 1ª linha, (+2) da 2ª linha e (+6) da 3ª linha, tem-se:

$$\det(A) = (-4) \cdot (+2) \cdot (+6) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Então, aplicando a regra de Sarrus:

$$\det(A) = (-4) \cdot (+2) \cdot (+6) \cdot [15 + 2 \quad 2 + 5 + 4 + 3]$$

$$\det(A) = (-48) \cdot [27] = -1296$$

Métodos matriciais para resolução de sistemas lineares

Uma vez fundamentada a teoria das matrizes e de seus determinantes, os conceitos estabelecidos permitiram a criação de algoritmos computacionais extremamente eficientes na resolução dos sistemas de equações lineares.

Chamamos de sistema linear qualquer conjunto de equações lineares que contenham as mesmas variáveis. Um sistema linear com *m* equações com *n* variáveis costuma ser representado por:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} a \cdot x_3 x + \ + b \ _{3n} \cdot \ _n = \ _3 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + a_{m3} \cdot x_3 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

A primeira providência a ser tomada para resolver um sistema usando algum método matricial é escrevê-lo na forma de uma equação matricial. Para isso, são definidas 3 matrizes associadas ao sistema.

A matriz principal do sistema é aquela cujas entradas são os coeficientes das variáveis de cada equação:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Se um sistema possui *m* equações com *n* variáveis cada, então sua matriz principal terá tamanho $m \times n$.

As outras matrizes associadas ao sistema são matrizes colunas que também podem ser chamadas de vetores. São eles:

O vetor de variáveis ou vetor de incógnitas: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

O vetor dos termos independentes: $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Essas matrizes permitem representar o sistema linear da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \\ b_m \end{pmatrix}$$

Usando os representantes algébricos de cada matriz ou vetor, todo sistema linear corresponde a uma equação matricial do tipo:

$$A \cdot X = B$$

Uma quarta matriz pode ser usada para representar o sistema todo. Trata-se da matriz estendida do sistema, designada por (A|B). Essa matriz é formada pela matriz principal acrescida de uma coluna a sua direita, contendo as entradas do vetor de termos independentes. Essa coluna a mais costuma ficar separada do restante da matriz por uma barra vertical. Assim:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Usando a matriz inversa

Se a matriz principal A do sistema for quadrada e tal que $\det(A) \neq 0$, então essa matriz é inversível Assim, multiplicando-se à esquerda, ambos os membros da equação matricial, pela inversa da matriz A, obtém se o vetor de incógnitas

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Para resolver o sistema $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 7x + 10y = 9 \end{cases}$, por exemplo, primeiro deve-se representá-lo como uma equação matricial. Assim:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Em seguida, calcula-se o determinante da matriz principal do sistema:

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} = 3 \cdot 10 \quad 4 \cdot 7 = 30 \quad 28 = 2$$

Como o determinante não é nulo, o próximo passo é encontrar a inversa da matriz principal:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Por fim, basta multiplicar a matriz inversa pelo vetor dos termos independentes do sistema:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 10 \cdot 5 + (-4) \cdot 9 \\ (-7) \cdot 5 + 3 \cdot 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Portanto, $x = 7$ e $y = \quad 4$, logo, $S = \{(7, \quad 4)\}$

Sistemas equivalentes

Dois sistemas lineares são equivalentes quando possuem exatamente o mesmo conjunto solução.

O sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 11 \end{cases}$ é equivalente ao sistema $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 7x + 10y = 9 \end{cases}$, por exemplo, pois o par ordenado (7, –4) é solução única de ambos.

Sendo assim, para resolver um sistema, podem-se trocar as equações dadas por outras equações, desde que o sistema formado pelas novas equações seja equivalente ao sistema original.

O símbolo ~ é usado para indicar que dois sistemas lineares são equivalentes. Assim:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 7x + 10y = 9 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 3 \\ x \quad y = 11 \end{cases}$$

Esse símbolo também pode ser usado entre as matrizes estendidas do sistema. Assim:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 10 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 11 \end{array}\right)$$

Algumas operações podem ser efetuadas com as equações de um sistema, para se obter um sistema equivalente:

- trocar a ordem das equações de um sistema;
- multiplicar ou dividir uma equação por uma constante real não nula;
- acrescentar uma equação que seja combinação linear das outras equações do sistema.

Combinação linear das equações de um sistema

Dado um sistema linear com uma série de *m* equações ($e_1, e_2, e_3, ..., e_m$), para construir uma equação que seja combinação linear das equações dadas, basta tomar uma série de números reais ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_m$), que não sejam todos nulos, e efetuar o produto interno dessas séries Procedendo dessa maneira, obtém-se uma nova equação, que admite as mesmas soluções das equações que não foram multiplicadas por zero.

$$\alpha_1 \cdot (e_1) + \alpha_2 \cdot (e_2) + \alpha_3 \cdot (e_3) + ... + \alpha_m \cdot (e_m)$$

Considere o sistema $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 7x + 10y = 9 \end{cases}$, e veja como obter uma combinação linear de suas equações

Nesse sistema, tem-se:

$$e_1 \rightarrow 3x + 4y = 5$$
$$e_2 \rightarrow 7x + 10y = 9$$

Multiplicando e_1 pelo número $\alpha_1 = 4$, por exemplo, obtém-se:

$$4e_1 \rightarrow 12x + 16y = 20$$

Multiplicando e_2 pelo número $\alpha_1 = \ 2$, por exemplo, obtém-se:

$$2e_1 \rightarrow \ 14x \ 20y = \ 18$$

Somando as equações obtidas, tem-se uma combinação linear das equações do sistema:

$$4e_1 - 2e_1 \rightarrow -2x - 4y = 2$$

O escalonamento

Também conhecido como método da eliminação gaussiana, o escalonamento de sistemas lineares consiste na obtenção de um sistema equivalente em que a matriz dos coeficientes seja triangular.

Um sistema está na forma escalonada se sua matriz de coeficientes satisfizer as seguintes condições:

- Se a matriz principal do sistema tiver uma ou mais linhas nulas, essas linhas devem ficar abaixo das linhas não nulas.
- A primeira entrada não nula de cada linha da matriz deve ser igual a 1. Essa entrada é chamada de pivô da linha.
- O pivô de cada linha deve localizar-se à direita dos pivôs de linhas anteriores.

Essas condições garantem que cada equação do sis tema tenha, no mínimo, uma variável a menos do que a equação anterior, de modo que, havendo equações su ficientes, a última equação deverá fornecer o valor de alguma variável.

Uma vez encontrado o valor dessa variável, um proces so simples de retro-substituição nas equações anteriores fornece o valor das demais variáveis.

Os sistemas a seguir estão todos na forma escalonada:

Sistema escalonado	Matriz principal
$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = 4 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} x + 5y + 7z = 9 \\ y + 2z = 5 \\ z = 2 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} x \ \ 7y + 5z + 3w = 2 \\ y + 3z \ \ 2w = 4 \\ z + 6w = 4 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & -7 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Observe que as entradas das diagonais principais das matrizes triangulares associadas aos sistemas escalonados só podem ser iguais a 0 ou 1.

Veja como resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x \ \ y = \ 1 \end{cases}$ pelo método do escalonamento:

Primeiro, deve-se considerar a matriz aumentada do sistema:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Como o pivô da primeira linha já é unitário, pros segue se anulando a entrada logo abaixo desse pivô, multiplicando a 1ª linha por 3 e somando seus resultados na 2ª linha, como se estivéssemos aplicando o teorema de Jacobi

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \times(\ 3) \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 10 \end{array}\right]$$

Uma vez que a matriz principal do sistema ficou triangular, para tornar unitário o pivô da última linha, basta dividir as entradas dessa linha por –5:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 10 \end{array}\right] \div(-5) \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Assim, o sistema escalonado equivalente ao sistema dado é:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ \quad y=2 \end{cases}$$

Então, substituindo o valor de y na 1ª equação, obtém-se:

$$x+2=3 \Leftrightarrow x=1$$

Portanto, o conjunto solução do sistema é S = {(1, 2)}.

Veja agora como resolver o sistema $\begin{cases} \quad 2y+z=\ \ 8 \\ x-2y-3z=0 \\ -x+y+2z=3 \end{cases}$ pelo método do escalonamento:

A matriz aumentada desse sistema é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right].$$

Primeiro deve-se reordenar as linhas dessa matriz, para que a 1ª linha tenha um pivô unitário e que a 3ª linha comece por zero. Assim:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & -8 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

Como o pivô da primeira linha já é unitário, para anular a entrada logo abaixo desse pivô, basta multiplicar a 1ª linha por 1 e somar seus resultados na 2ª linha. Assim:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right] \times(1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right]$$

Agora, para tornar o pivô da 2ª linha unitário, basta multiplicar essa linha por −1. Assim:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right] \times(-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right]$$

O próximo passo é anular a entrada abaixo do pivô da 2ª linha. Para isso, deve-se multiplicar a 2ª linha por −2 e somar os resultados na 3ª linha.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right] \times(\ \ 2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Novamente, para tornar o pivô da 3ª linha unitário, basta multiplicar a linha por 1.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \times(-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Assim, o sistema escalonado equivalente ao sistema dado é:

$$\begin{cases} x-2y-3z=0 \\ \quad y+z=-3 \\ \quad\quad z=2 \end{cases}$$

Então, substituindo o valor de z na 2ª equação, obtém-se:

$$y+2=\ \ 3 \Leftrightarrow y=-5$$

E, substituindo os valores de y e z na 1ª equação, obtém-se:

$$x\ \ 2\cdot(-5)\ \ 3\cdot 2=0 \Leftrightarrow x=-4$$

Portanto, o conjunto solução do sistema é S = {(4, −5, 2)}.

O algoritmo do escalonamento também permite clas sificar os sistemas lineares em relação ao seu conjunto solução de uma maneira bastante segura.

É possível classificar um sistema observando as entradas da última linha da matriz estendida de um sistema escalonado.

Sistemas possíveis e determinados

São os sistemas em que o conjunto solução é unitário, ou seja, cada variável assume um único valor para tornar verdadeiras todas as equações do sistema.

Os sistemas $\begin{cases} x+y=3 \\ 3x-y=-1 \end{cases}$ e $\begin{cases} \quad 2y+z=-8 \\ x-2y-3z=0 \\ -x+y+2z=3 \end{cases}$ resolvidos nos exemplos de escalonamento são ambos possíveis e determinados.

Se a última entrada da última linha da matriz principal de um sistema escalonado for diferente de zero, então esse sistema é possível e determinado

Sistemas possíveis e indeterminados

São os sistemas em que o conjunto solução possui mais do que uma série ordenada, de modo que suas variáveis, não necessariamente todas, assumem infinitos valores diferentes que tornam verdadeiras todas as equações do sistema.

Se todas as entradas da última linha da matriz estendida de um sistema escalonado forem iguais a zero, então esse sistema é possível e indeterminado.

Os sistemas $\begin{cases} +x\ \ 2y\ \ 3 \\ 3x\ \ 6y\ \ \ 9 \end{cases}$ e $\begin{cases} x\ \ 2y\ \ 3z=2 \\ x+3y+z=8 \\ 2x+y-2z=10 \end{cases}$ são possíveis e indeterminados Veja como eles ficam em suas formas escalonadas:

$$\begin{cases} -x+2y=3 \\ 3x\ \ 6y\ \ \ 9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & | & 3 \\ 3 & 6 & | & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \times(3) \\ \hookleftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

Observando que qualquer par de números reais (x, y) torna verdadeira a 2ª equação do sistema escalonado equiva lente, pode-se concluir que há infinitas soluções para o sistema.

Para que um par ordenado (x, y) seja solução desse sistema, basta que ele satisfaça a 1ª equação. Exemplos: (1, 2), (3, 3), (5, 4) etc.

$$\begin{cases} x \quad 2y \quad 3z \quad 2 \\ x + 3y + \ z = 8 \\ 2x + \ y \quad 2z \quad 10 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \end{array}\right] \begin{matrix} \times(-1) \\ \hookleftarrow \\ \ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \end{array}\right] \begin{matrix} \times(-2) \\ \ \\ \hookleftarrow \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 4 & 6 \end{array}\right] \begin{matrix} \ \\ \times(\quad 1) \\ \hookleftarrow \end{matrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \div(5) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0{,}8 & 1{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{cases} x - 2y - 3z = 2 \\ 0x + y + 0{,}8z = 1, \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Observando novamente que qualquer trinca de números reais (x, y, z) torna verdadeira a 3ª equação do sistema es calonado equivalente, pode-se concluir que há infinitas soluções para o sistema.

Para que uma trinca ordenada (x, y, z) seja solução desse sistema, basta que ela satisfaça a 1ª e a 2ª equações. Exem plos: (3, 2, –1), (10, –2, 4), (–4, 6, –6) etc.

Conjunto solução de um sistema indeterminado

Quando um sistema possui uma infinidade de soluções, não há como representar seu conjunto solução escrevendo de forma discreta uma solução após a outra.

Os conjuntos solução dos sistemas lineares indeterminados são expressos de forma paramétrica Isso pode ser feito escolhendo-se uma das variáveis para representar o parâmetro e escrevendo todas as outras em função desse parâmetro.

No sistema $\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 3x \quad 6y \quad 9 \end{cases}$, que escalonado equivale a $\begin{cases} +x \quad 2y \quad 3 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$ por exemplo, a variável y pode ser escolhida como parâmetro. Assim: $y = \lambda$.

Então, substituindo o parâmetro na 1ª equação, tem-se:

$$x + 2\lambda = 3 \Leftrightarrow x = 2\lambda \quad 3$$

Dessa forma, o conjunto solução do sistema fica expresso por: $S = \{(2\lambda - 3, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$

No sistema $\begin{cases} x \quad 2y \quad 3z \quad 2 \\ x + 3y + \ z = 8 \\ 2x + \ y - 2z = 10 \end{cases}$, que escalonado equivale $\begin{cases} x \quad 2y \quad 3z \quad 2 \\ 0x + \ y + 0{,}8z = 1{,}2 \\ 0x + 0y + \ 0z = 0 \end{cases}$ por exemplo, a variável z pode ser es colhida como parâmetro. Assim: $z = \lambda$.

Substituindo o parâmetro na 2ª equação do sistema escalonado, tem-se:

$$y + 0{,}8 \cdot \lambda = 1{,}2 \Leftrightarrow y = 1{,}2 \quad 0{,}8\lambda$$

Agora, substituindo as expressões de y e z na 1ª equação do sistema, tem-se:

$$x + 2 \cdot (1{,}2 - 0{,}8\lambda) - 3\lambda = 2 \Leftrightarrow x = 4{,}6\lambda - 0{,}4$$

Como escrever números decimais em séries ordenadas pode gerar ambiguidades, recomenda se o uso das formas fracionárias. Assim, temos que $y = \frac{6 - 4\lambda}{5}$ e $x = \frac{23\lambda - 2}{5}$

Dessa forma, o conjunto solução do sistema fica expresso por:

$$S = \left\{ \left(\frac{23\lambda\lambda \quad 2}{5}, \frac{6 \quad 4}{5}, \lambda \right), \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Sistemas impossíveis

São os sistemas em que o conjunto solução é vazio, de modo que não exista série ordenada que satisfaça todas as equações de sistema

Se a última entrada da última linha da matriz estendida de um sistema escalonado for diferente de zero e todas as outras entradas dessa linha forem iguais a zero, então esse sistema é impossível

Os sistemas $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x \quad 4y \quad 5 \end{cases}$ e $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + z = 4 \\ 3x + 4y + 3z = 7 \end{cases}$ são impossíveis Veja como eles ficam em suas formas escalonadas:

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x \quad 4y \quad 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{array}\right] \times(-2) \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \sim \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 0x + 0y = \quad 3 \end{cases}$$

Observando que não existe par de números reais (x, y) capaz de tornar verdadeira a 2ª equação do sistema escalonado equivalente, pode-se concluir que este sistema não admite solução: S = ∅.

$$\begin{cases} x + \quad y + \quad z = 3 \\ x + 2y + \quad z = 4 \\ 3x + 4y + 3z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 7 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & -2 & 10 \end{array}\right] \times(\ 1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & -2 & 10 \end{array}\right] \times(\ 2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 4 & 6 \end{array}\right] \times(-1) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x + \ y + \ z \ = 3 \\ 0x + \ y + 0z \ = 1 \\ 0x + 0y + 0z = -3 \end{cases}$$

Observando que não existe trinca de números reais (x, y, z) capaz de tornar verdadeira a 3ª equação do sistema escalonado equivalente, conclui-se que este sistema não admite solução: S = ∅.

Escalonamento por combinações lineares

Um sistema linear também pode ser escalonado substituindo-se cada equação por uma combinação linear dela com as demais equações do sistema. Se cada nova equação tiver menos variáveis do que as usadas na combinação e isso não alterar o conjunto solução do sistema, chega-se a sua solução de uma maneira bem eficiente.

Em sistemas de 3 equações com 3 variáveis cada, recomenda-se encontrar 2 combinações lineares de 2 equações que eliminem a mesma variável. Para que isso não altere a solução do sistema, a equação que não for usada em uma das combinações lineares deve ser usada na outra.

Usando os algarismos romanos para numerar as equações do sistema $\begin{cases} x + y + z = 9 & \text{I} \\ x + 2y \quad z = 4 & \text{II} \\ 2x - y + z = 5 & \text{III} \end{cases}$, considere as seguintes combinações:

$$(\text{IV} = \text{II} - \text{I}) \rightarrow y - 2z = -5$$
$$(\text{V} = \text{III} - 2 \cdot \text{I}) \rightarrow -3y - z = -13$$

Observe que as duas combinações lineares eliminaram a mesma variável (x). Além disso, como a equação III não participa da 1ª combinação, ela teve que participar da 2ª, obrigatoriamente.

Essas equações formam um sistema menor $\begin{cases} y - 2z = -5 \\ -3y - \quad z = -13 \end{cases}$, que pode ser resolvido de muitas formas, mas continuando com o mesmo processo, considere uma última combinação linear das equações do sistema menor:

$$(\text{VI} = 3 \cdot \text{IV} + \text{V}) \rightarrow -7z = -28 \Leftrightarrow z = 4$$

Substituindo z na equação IV, tem-se:

$$y \quad 2 \cdot 4 = \quad 5 \Leftrightarrow y = 3$$

Então, substituindo y e z na equação I, tem-se:

$$x + 3 + 4 = 9 \Leftrightarrow x = 2$$

Portanto, o conjunto solução do sistema é S = {(2, 3, 4)}.

Todo sistema linear pode ser submetido a esse processo até gerar uma equação do tipo $a \cdot v = b$, sendo *v* a variável restante na última combinação linear (x, y ou z). Assim, uma vez conhecidos os valores do coeficiente α e do termo inde pendente *b* dessa última equação, podemos classificar o sistema de acordo com a tabela a seguir:

Coeficiente da variável	Termo independente	Classificação do sistema
$a \neq 0$	Não importa	SPD
$a = 0$	$b = 0$	SPI
$a = 0$	$b \neq 0$	SI

Exercícios resolvidos

56 **UFRGS 2013** O sistema de equações $\begin{cases} 5x + 4y + 2 = 0 \\ 3x - 4y - 18 = 0 \end{cases}$ possui

A nenhuma solução.
B uma solução.
C duas soluções.
D três soluções.
E infinitas soluções.

Resolução:

Somando-se as equações do sistema, temos: $8x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
Substituindo-se $x = 2$ na primeira equação, temos: $10 + 4y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -3$.
Portanto (2,   3) é a solução única do sistema.
Alternativa: **B**.

57 Resolva e classifique o seguinte sistema linear $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 3x + 6y - z = 2. \\ 2x + 4y + z = 2 \end{cases}$

Resolução:

Chamando de I, II e III, respectivamente, a primeira, a segunda e a terceira equações, temos:
$(VI = III - 2 \cdot I) \rightarrow 5z = -6$
$(V = 3 \cdot I - II) \rightarrow 10z = 10$
$(2 \cdot VI + V) \rightarrow 0z = -2$
Portanto, $S = \varnothing$ e o sistema é impossível.

58 **UFV** Seja (x_0, y_0, z_0) a solução do sistema linear $\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2x \;\; 3y = z \quad 2 \\ 3x - \;\; y + z = 8 \end{cases}$. Os números x_0, y_0 e z_0 formam, nessa ordem, uma progressão:

A geométrica de razão 2
B aritmética de razão 2
C geométrica de razão 3
D aritmética de razão 3

Resolução:

Escalonado o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = z \quad 4 \\ 2x - 3y + z = -2 \\ 3x \;\; + y = z \quad 8 \end{cases} \times(\;\;2) \sim \begin{cases} x + 2y \;\; = z \quad 4 \\ -7y + 3z = -10 \\ 3x + y \;\; = z \quad 8 \end{cases} \times(\;\;3) \sim \begin{cases} x + 2y \;\; = z \quad 4 \\ -7y + 3z = -10 \\ 7y \;\; 4z \quad 4 \end{cases} \times(-1) \sim \begin{cases} x + 2y \;\; = z \quad 4 \\ -7y + 3z = -2 \\ z = 6 \end{cases}$$

Substituindo o valor de z encontrado, temos: $-7y + 4 \cdot 6 = -4 \Leftrightarrow -7y + 24 = -4 \Leftrightarrow -7y = -28 \Leftrightarrow y = 4$.
Substituindo os valores de z e y encontrados, temos: $x + 2 \cdot 4 - 6 = 4 \Leftrightarrow x + 8 - 6 = 4 \Leftrightarrow x = 2$.
Logo, $(x_0, y_0, z_0) = (2, 4, 6)$ é uma progressão aritmética de razão 2.
Alternativa: **B**.

A regra de Cramer

Trata-se de um algoritmo que só pode ser aplicado na resolução de sistemas lineares cujo número de equações seja igual ao número de variáveis.

Como esse processo de resolução envolve cálculos de determinantes, deve-se considerar sempre um sistema de *n* equações com *n* variáveis cada:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1i}\cdot x_i + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2i}\cdot x_i + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + \ldots + a_{2i}\cdot x_i + \ldots + a_{3n}\cdot x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{i1}\cdot x_1 + a_{i2}\cdot x_2 + \quad + a_{ii}\cdot x_i + \quad + a_{in}\cdot x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \ldots + a_{ni}\cdot x_i + \ldots + a_{nn}\cdot x_n = b_n \end{cases}$$

Dessa forma, na representação do sistema como uma equação matricial do tipo A · X = B, a matriz principal do sistema é uma matriz quadrada de ordem *n*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Além disso, os vetores das variáveis e o dos termos independentes têm *n* entradas cada um:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

O primeiro passo para deduzir a regra de Cramer é calcular o determinante D da matriz principal do sistema.

$$D = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2i} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Depois, multiplicam se os membros da expressão D = det(A) por uma das variáveis x_i do sistema:

$$x_i \cdot D = x_i \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Como, no segundo membro dessa expressão, a variável x_i pode multiplicar qualquer fila do determinante, deve se escolher a coluna i dos coeficientes da variável multiplicada:

$$x_i \cdot D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}\cdot x_i & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}\cdot x_i & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i1} & \cdots & a_{ii}\cdot x_i & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}\cdot x_i & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

FRENTE 2

Agora, aplica se sucessivamente o teorema de Jacobi, multiplicando cada uma das outras colunas j do determinante pela respectiva variável x_j e somam-se todos os resultados obtidos na coluna i.

$$x_i \cdot D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & \left(a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \quad + a_{1i} \cdot x_i + \quad + a_{1n} \cdot x_n\right) & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \left(a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2i} \cdot x_i + \ldots + a_{2n} \cdot x_n\right) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i1} & \cdots & \left(a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \ldots + a_{ii} \cdot x_i + \ldots + a_{in} \cdot x_n\right) & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \left(a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \ldots + a_{ni} \cdot x_i + \ldots + a_{nn} \cdot x_n\right) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Então, como cada entrada da coluna i apresenta o primeiro membro da i-ésima equação do sistema, pode-se substituir essa coluna pelo vetor *b* dos termos independentes:

$$x_i \cdot D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i1} & \cdots & b_i & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & b_n & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Indicando por D_i, o determinante obtido após a substituição do vetor B chega-se à expressão que representa a regra de Cramer:

$$x_i \cdot D = D_i$$

E, quando $D \neq 0$, essa expressão implica:

$$x_i = \frac{D_i}{D}$$

Procedendo dessa forma com todas as demais variáveis do sistema, obtém-se a solução da equação matricial $A \cdot X = B$. Portanto, quando o sistema é possível e determinado, pela regra de Cramer a solução do sistema é:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1/D \\ D_2/D \\ \vdots \\ D_i/D \\ \vdots \\ D_n/D \end{pmatrix}$$

Sistemas de 2ª ordem

A regra de Cramer associa o sistema $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ aos seguintes determinantes:

$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ (Determinante principal)

$D_x = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}$ (Determinante da variável x)

$D_y = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}$ (Determinante da variável y)

Assim, quando $D \neq 0$ tem-se:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{d \cdot e - b \cdot f}{a \cdot d - b \cdot c} \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{a \cdot f - c \cdot e}{a \cdot d - b \cdot c}$$

Exercício resolvido

59 Assinale a alternativa que apresenta o valor da variável y no sistema $\begin{cases} \left(\sqrt{5}+1\right)\cdot x+\sqrt{3}\cdot y=\sqrt{5} \\ \sqrt{3}\cdot x+\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot y=\sqrt{3} \end{cases}$.

A $\sqrt{3}$ **B** $\sqrt{5}$ **C** $\sqrt{15}$ **D** 5 **E** 3

Resolução:

Da regra de Cramer, o determinante do sistema é:

$$D=\begin{vmatrix} \sqrt{5}+1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{5}-1 \end{vmatrix}=\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=5-1-3=1$$

O determinante da variável y é:

$$D_y=\begin{vmatrix} \sqrt{5}+1 & \sqrt{5} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{vmatrix}=\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\sqrt{3}\quad\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{15}+\sqrt{3}\quad\sqrt{15}=\sqrt{3}3$$

Logo, $y=\frac{D_y}{D}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$.

Alternativa: **A**.

Sistemas de 3ª ordem

A regra de Cramer associa o sistema $\begin{cases} a_1\cdot x+b_1\cdot y+c_1\cdot z=r_1 \\ a_2\cdot x+b_2\cdot y+c_2\cdot z=r_2 \\ a_3\cdot x+b_3\cdot y+c_3\cdot z=r_3 \end{cases}$ aos seguintes determinantes:

- $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ (Determinante principal)
- $D_y=\begin{vmatrix} a_1 & r_1 & c_1 \\ a_2 & r_2 & c_2 \\ a_3 & r_3 & c_3 \end{vmatrix}$ (Determinante da variável y)
- $D_x=\begin{vmatrix} r_1 & b_1 & c_1 \\ r_2 & b_2 & c_2 \\ r_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ (Determinante da variável x)
- $D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & r_1 \\ a_2 & b_2 & r_2 \\ a_3 & b_3 & r_3 \end{vmatrix}$ (Determinante da variável z)

Assim, quando $D\neq 0$ tem-se: $x=\frac{D_x}{D}$ $y=\frac{D_y}{D}$ e $z=\frac{D_z}{D}$

Discussão de um sistema linear

Em um sistema linear, quando algum coeficiente ou termo independente é desconhecido, ele costuma ser representado por um parâmetro algébrico.

Neste caso, tanto a solução quanto a classificação do sistema depende desse parâmetro ou dos parâmetros desconhecidos. Por isso, as três possibilidades de classificação (SPD, SPI ou SI) devem ser exploradas na resolução do sistema. Ao fazer isso, estamos efetuando a discussão do sistema linear

Combinando os principais algoritmos estudados neste capítulo (a regra de Cramer e o escalonamento), a discussão do sistema pode ser padronizada

Primeiro, calcula se o determinante D da matriz principal do sistema e:

- se $D\neq 0$ então o sistema é possível e determinado (SPD).
- se $D=0$, então o sistema é possível e indeterminado ou impossível (SPI ou SI).

No segundo caso, para decidir entre as classificações SPI e SI, recomenda-se o uso do escalonamento.

Saiba mais

No caso específico de sistemas de 2ª ordem é possível desenvolver toda a discussão sem o uso do escalonamento, pois nesse caso:

- Se $D\neq 0$, então o sistema é possível e determinado (SPD).
- Se $D=0$ e $D_x=D_y=0$, então o sistema é possível e indeterminado (SPI).
- Se $D=0$ e D_x ou D_y forem diferentes de zero então o sistema é impossível (SI).

Esse processo não é seguro em sistemas maiores.

FRENTE 2

Exercício resolvido

60 UFMG 2013 Considere o seguinte sistema linear nas incógnitas x e y:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 6x + ay = 3 \end{cases}$$

Observando-se que o coeficiente de *y* na segunda equação é um parâmetro **a**, determine

a) para quais valores de **a** o sistema tem solução.

b) as soluções x e y em função do parâmetro **a**, caso o sistema tenha solução.

Resolução:

a) O determinante principal do sistema é $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & a \end{vmatrix} = 2a \quad 18$.

Pela regra de Cramer, se $2a \quad 18 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 9$, então o sistema tem solução única.

Com $a = 9$, o sistema fica: $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 6x + 9y = 3 \quad \div(3) \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 = 2$ Assim, para $a = 9$, o sistema é impossível.

Logo, o sistema só admite solução quando $a \neq 9$.

b) $D_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & a \end{vmatrix} = 2a \quad 9$ e $D_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 12 = -6$.

Portanto, se $a \neq 9$, temos: $x = \frac{D_x}{D} = \frac{2a - 9}{2a \quad 18}$ e $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-6}{2a - 18} = \frac{3}{9 - a}$.

! Atenção

Existem sistemas de 3ª ordem impossíveis, em que todos os determinantes associados pela regra de Cramer são nulos.

$$D = D_x = D_y = D_z = 0$$

Veja que isso ocorre, por exemplo, no sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \quad (I) \\ x + y + z = 2 \quad (II) \\ x + y + z = 3 \quad (III) \end{cases}$ que claramente é impossível, pois subtraindo as equações (I) e (II) obtém se a sentença fechada e falsa: $0 = \quad 1$

Além disso, é fácil perceber que os determinantes associados são nulos, pois todos eles possuem duas colunas iguais:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Exercício resolvido

61 UFBA Determine os valores de *k* para que o sistema de equações $\begin{cases} 2x + 2y \quad 2z = 2 \\ 3x + 4y + (k - 1)z = 4 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases}$ seja:

a) possível e determinado.

b) possível e indeterminado.

c) impossível.

Resolução:

Da regra de Cramer, o determinante do sistema é:

$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & \quad 2 \\ 3 & 4 & k \quad 1 \\ 1 & k & 3 \end{vmatrix} = 8 \quad 2k(k \quad 1) \quad 18 + 24 + 2(k \quad 1) \quad 6k = \quad 2k^2 \quad 2k + 12 = \quad 2(k^2 + k \quad 6)$ função quadrática de variável *k*, cujas raízes são 2 e –3.

Dividindo se por 2 a primeira equação do sistema original e substituindo-se k por 2, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} x + y \quad z = 1 \\ 3x + 4y + z = 4 \\ x + 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

Escalonando-se esse sistema, temos:

$$\begin{cases} x + y \quad z = 1 & \times(-3) \\ 3x + 4y + z = 4 & \leftarrow \\ x + 2y + 3z = 2 & \end{cases} \sim \begin{cases} x + \ y \quad z = 1 & \times(-1) \\ y + 4z = 1 & \\ x + 2y + 3z = 2 & \leftarrow \end{cases} \sim \begin{cases} x + \ y \quad z = 1 & \\ y + 4z = 1 & \times(-1) \\ y + 4z = 1 & \leftarrow \end{cases} \sim \begin{cases} x + \ y \quad z = 1 \\ y + 4z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

O sistema é possível e indeterminado (SPI)

Dividindo se por 2 a primeira equação do sistema original e substituindo-se k por 3, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} x + \ y \quad z = 1 \\ 3x + 4y - 4z = 4 \\ x - 3y + 3z = 2 \end{cases}$$

Escalonando-se esse sistema, temos:

$$\begin{cases} x + \ y \quad z = 1 & \times(-3) \\ 3x + 4y - 4z = 4 & \leftarrow \\ x \quad 3y + 3z = 2 & \end{cases} \sim \begin{cases} x + \ y \quad z = 1 & \times(-1) \\ y - \ z = 1 & \\ x \quad 3y + 3z = 2 & \leftarrow \end{cases} \sim \begin{cases} x + \ y \quad z = 1 & \\ y - \ z = 1 & \times(4) \\ 4y + 4z = 1 & \leftarrow \end{cases} \sim \begin{cases} x + \ y \quad z = 1 \\ y + 4z = 1 \\ 0 = 5 \end{cases}$$

O sistema é impossível (SI).

a) O sistema é possível e determinado se $k \neq \ 3$ e $k \neq 2$.

b) O sistema é possível é indeterminado se $k = 2$.

c) O sistema é impossível se $k = \ 3$.

Sistema linear homogêneo

Discutir um sistema linear homogêneo é tarefa bem mais simples, pois é fato que todo sistema desse tipo possui a solução trivial. Sendo assim, ele não pode ser classificado como sendo impossível.

Por esse motivo, há apenas duas possibilidades (SPD ou SPI) a serem exploradas na discussão do sistema, bastando a regra de Cramer para esse fim:

- Se $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado (SPD).
- Se $D = 0$, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

Exercício resolvido

62 Discutir, quanto ao parâmetro real *m*, a solução do sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 5x + 3y + z = 0 \\ 9x + 4y + mz = 0 \end{cases}$.

Resolução:

O determinante principal do sistema é:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 9 & 4 & m \end{vmatrix} = 3m + 18 + 60 \quad 81 \quad 4 \quad 10m \ = \ 7m \quad 7$$

Assim, $D \neq 0$ implica $m \neq -1$ e como sistemas homogêneos são sempre possíveis, temos que:

- $m \neq -1 \Leftrightarrow$ SPD
- $m = \ 1 \Leftrightarrow$ SPI

FRENTE 2

Revisando

1 Escreva a forma explícita das matrizes a seguir:

a) $A_{3\times2}$ tal que $a_{ij} = 3^i - 2^j$

b) $B_{2\times4}$ tal que $b_{ij} = i + j - 1$

c) C_3 tal que $c_{ij} = i \cdot j$

d) D_2 tal que $d_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i < j \\ 0, \text{ se } i = j \\ -1, \text{ se } i > j \end{cases}$

2 Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, determine $M = A + B \quad 3 \cdot C + D^T$

3 Um sistema de controle de qualidade de uma empresa atribui pontos positivos e negativos aos seus produtos de acordo com determinados testes. As matrizes $A_{3\times2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, $B_{2\times2} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$ e $C_{2\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ apresentam alguns dos resultados desses testes. Calcule, se existir, os seguintes produtos entre essas matrizes:

a) $A \cdot B$ c) $B \cdot A$ e) $C \cdot A$

b) $A \cdot C$ d) $B \cdot C$ f) $C \cdot B$

4 A soma das soluções da equação

$$\begin{vmatrix} 3x & 7 \\ x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 9 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ é:}$$

A 0,5 B 1,5 C 2,5 D 3,5 E 4,5

5 Calcule $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 12 & -2 & 4 \\ 2 & 18 & 3 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

6 Sendo A, B e C matrizes quadradas de 2ª ordem tais que $A^{\ 1} = 3 \cdot B$ e $C = A \cdot B$. Então, se o determinante de B é igual a 6, o determinante de C deve ser igual a:

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{1}{3}$ C $\frac{1}{6}$ D $\frac{1}{8}$ E $\frac{1}{9}$

7 Resolva e classifique os seguintes sistemas lineares:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$

8 Resolva o sistema: $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + z = 2 \\ 3x + y + 3z = 5 \end{cases}$.

9 Um brinquedo infantil de montar contém peças de apenas três tipos:

Tipo X

Tipo Y

Tipo Z

O brinquedo é vendido em *kits* com quantidades diferentes de cada tipo de peça. A tabela a seguir apresenta o preço e as respectivas quantidades de peças de cada tipo:

	Peças tipo X	Peças tipo Y	Peças tipo Z	Preço
***Kit* Master**	100	100	10	R$ 99,00
***Kit* plus**	90	70	10	R$ 78,00
***Kit* básico**	70	50	10	R$ 60,00

A empresa vai lançar no mercado um novo *kit* "Mega" contendo 200 peças do tipo X, 200 peças tipo Y e 50 peças tipo Z e quer que o preço esteja de acordo com os preços dos *kits* já disponíveis no mercado, considerando se apenas a quantidade de peças de cada tipo nos *kits* e desprezando-se outros fatores como os custos de suas embalagens, por exemplo

Nessas condições o *kit* "Mega" deverá custar:

A R$ 150,00 C R$ 200,00 E R$ 250,00

B R$ 175,00 D R$ 225,00

10 Discutir, em função do parâmetro real *k*, o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ kx + y + 2z = 0 \\ x + y + kz = 0 \end{cases}$$

Exercícios propostos

1 **Enem 2014** O Ministério da Saúde e as unidades federadas promovem frequentemente campanhas nacionais e locais de incentivo à doação voluntária de sangue, em regiões com menor número de doadores por habitante, com o intuito de manter a regularidade de estoques nos serviços hemoterápicos. Em 2010, foram recolhidos dados sobre o número de doadores e o número de habitantes de cada região conforme o quadro seguinte.

Taxa de doação de sangue, por região, em 2010			
Região	Doadores	Número de habitantes	Doadores/habitantes
Nordeste	820 959	53 081 950	1,5%
Norte	232 079	15 864 454	1,5%
Sudeste	1 521 766	80 364 410	1,9%
Centro-Oeste	362 334	14 058 094	2,6%
Sul	690 391	27 386 891	2,5%
Total	3 627 529	190 755 99	1,9%

Os resultados obtidos permitiram que estados, municípios e o governo federal estabelecessem as regiões prioritárias do país para a intensificação das campanhas de doação de sangue.

A campanha deveria ser intensificada nas regiões em que o percentual de doadores por habitantes fosse menor ou igual ao do país.

Disponível em: http://bvsms.saude.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2013 (adaptado).

As regiões brasileiras onde foram intensificadas as campanhas na época são

A Norte, Centro-Oeste e Sul.
B Norte, Nordeste e Sudeste.
C Nordeste, Norte e Sul.
D Nordeste, Sudeste e Sul
E Centro-Oeste, Sul e Sudeste

2 **Enem 2011** A cor de uma estrela tem relação com a temperatura em sua superfície. Estrelas não muito quentes (cerca de 3000 K) nos parecem avermelhadas. Já as estrelas amarelas, como o Sol, possuem temperatura em torno dos 6000 K; as mais quentes são brancas ou azuis porque sua temperatura fica acima dos 10000 K. A tabela apresenta uma classificação espectral e outros dados para as estrelas dessas classes.

Estrelas da Sequência Principal

Classe Espectral	Temperatura	Luminosidade	Massa	Raio
O5	40000	5×10^5	40	18
B0	28000	2×10^4	18	7
A0	9900	80	3	2,5
G2	5770	1	1	1
M0	3480	0,06	0,5	0,6

Temperatura em Kelvin

Luminosidade, massa e raio, tomando o Sol como unidade.
Disponível em: http://www.zenite.nu. Acesso em: 1º maio 2010 (adaptado).

Se tomarmos uma estrela que tenha temperatura 5 vezes maior que a temperatura do Sol, qual será a ordem de grandeza de sua luminosidade?

A 20000 vezes a luminosidade do Sol.
B 28000 vezes a luminosidade do Sol.
C 28850 vezes a luminosidade do Sol.
D 30000 vezes a luminosidade do Sol.
E 50000 vezes a luminosidade do Sol.

3 **Enem 2012** Uma pesquisa realizada por estudantes da Faculdade de Estatística mostra, em horas por dia, como os jovens entre 12 e 18 anos gastam seu tempo, tanto durante a semana (de segunda-feira a sexta-feira), como no fim de semana (sábado e domingo). A seguinte tabela ilustra os resultados da pesquisa.

	Durante a semana	No fim de semana
Assistir à tetevisão	3	3
Atividades domésticas	1	1
Atividades escolares	5	1
Atividades de lazer	2	4
Descanso, higiene e alimentação	10	12
Outras atividades	3	3

De acordo com esta pesquisa, quantas horas de seu tempo gasta um jovem entre 12 e 18 anos, na semana inteira (de segunda-feira a domingo), nas atividades escolares?

A 20
B 21
C 24
D 25
E 27

4 **Enem** A classificação de um país no quadro de medalhas nos Jogos Olímpicos depende do número de medalhas de ouro que obteve na competição, tendo como critérios de desempate o número de medalhas de prata seguido do número de medalhas de bronze conquistados. Nas Olimpíadas de 2004, o Brasil foi o décimo sexto colocado no quadro de medalhas, tendo obtido 5 medalhas de ouro, 2 de prata e 3 de bronze. Parte desse quadro de medalhas é reproduzida a seguir.

Classificação	País	Medalhas de ouro	Medalhas de prata	Medalhas de bronze	Total de medalhas
8º	Itália	10	11	11	32
9º	Coreia do Sul	9	12	9	30
10º	Grã-Bretanha	9	9	12	30
11º	Cuba	9	7	11	27
12º	Ucrânia	9	5	9	23
13º	Hungria	8	6	3	17

Disponível em: http://www.quadroademedalhas.com.br
Acesso em: abr. 2010 (adaptado).

Se o Brasil tivesse obtido mais 4 medalhas de ouro, 4 de prata e 10 de bronze, sem alteração no número de medalhas dos demais países mostrados no quadro, qual teria sido a classificação brasileira no quadro de medalhas das Olimpíadas de 2004?

A 13º
B 12º
C 11º
D 10º
E 9º

5 **Unicamp 2016** Em uma matriz, chamam-se elementos internos aqueles que não pertencem à primeira nem à última linha ou coluna. O número de elementos internos em uma matriz com 5 linhas e 6 colunas é igual a

A 12.
B 15.
C 16.
D 20.

6 **UEL 2014** Conforme dados da Agência Nacional de Aviação Civil (ANAC), no Brasil, existem 720 aeródromos públicos e 1814 aeródromos privados certificados. Os programas computacionais utilizados para gerenciar o tráfego aéreo representam a malha aérea por meio de matrizes. Considere a malha aérea entre quatro cidades com aeroportos por meio de uma matriz. Sejam as cidades A, B, C e D indexadas nas linhas e colunas da matriz 4×4 dada a seguir. Coloca-se 1 na posição X e Y da matriz 4×4 se as cidades X e Y possuem conexão aérea direta, caso contrário coloca-se 0. A diagonal principal, que corresponde à posição X = Y, foi preenchida com 1.

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Considerando que, no trajeto, o avião não pode pousar duas ou mais vezes em uma mesma cidade nem voltar para a cidade de origem, assinale a alternativa correta.

A Pode-se ir da cidade A até B passando por outras cidades.
B Pode-se ir da cidade D até B passando por outras cidades.
C Pode-se ir diretamente da cidade D até C.
D Existem dois diferentes caminhos entre as cidades A e B.
E Existem dois diferentes caminhos entre as cidades A e C.

7 Um *site* educacional faz postagens semanais divulgando propostas pedagógicas alternativas para o Ensino Médio. Os elementos m_{ij} da matriz M a seguir registram o número de comentários feitos pelos usuários em cada proposta postada na semana de número *j* do mês de número *i*, desde que o *site* está na rede.

$$M = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 62 & 16 & 51 \\ 23 & 54 & 52 & 72 & 61 \\ 48 & 73 & 20 & 13 & 23 \\ 31 & 15 & 58 & 45 & 25 \end{pmatrix}$$

Se o *site* entrou na rede em janeiro deste ano, então a proposta pedagógica mais comentada neste *site* foi postada:

A na segunda semana de março.
B na segunda semana de abril.
C na quarta semana de fevereiro.
D na terceira semana de fevereiro.
E na terceira semana de maio.

8 **UFSM 2011**

O diagrama dado representa a cadeia alimentar simplificada de um determinado ecossistema. As setas indicam a espécie de que a outra espécie se alimenta. Atribuindo valor 1 quando uma espécie se alimenta de outra e zero, quando ocorre o contrário, tem se a seguinte tabela:

	Urso	Esquilo	Inseto	Planta
Urso	0	1	1	1
Esquilo	0	0	1	1
Inseto	0	0	0	1
Planta	0	0	0	0

A matriz $A = (a_{ij})_{4\times4}$, associada à tabela, possui a seguinte lei de formação:

A $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \leq j \\ 1, & \text{se } i > j \end{cases}$

B $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i = j \\ 1, & \text{se } i \neq j \end{cases}$

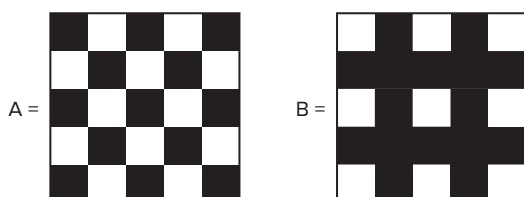
C $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \geq j \\ 1, & \text{se } i < j \end{cases}$

D $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$

E $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i < j \\ 1, & \text{se } i > j \end{cases}$

9 Um programa de computador processa os dados numéricos de uma matriz quadrada e apresenta, na tela, um mosaico quadriculado da seguinte maneira: se o elemento x_{ij} for par, então o quadrado da linha *i* e da coluna *j* do mosaico será preto, mas, se for ímpar, será branco. Assim, os mosaicos que representam as matrizes quadradas A e B de quinta ordem, cujos elementos estão definidos por $a_{ij} = i + j$ e $b_{ij} = i \cdot j$, são, respectivamente:

A =

B =

Quantos quadrados pretos deve haver no mosaico que este programa faria para representar a matriz M de quinta ordem, cujos elementos são m_{ij} = mdc (i, j)?

A 5
B 4
C 3
D 2
E 1

10 Os **quadrados mágicos** são matrizes quadradas cuja soma dos elementos de cada linha, cada coluna e das diagonais principal e secundária é constante. Na Idade Média os quadrados mágicos tornaram-se muito populares e eram usados em Talismãs, pois se acreditava que eles tinham o poder de atrair proteção astral para seus detentores.

Os algarismos de 1 a 9 podem ser distribuídos em matrizes 3×3 para formar **quadrados mágicos** de diversas maneiras. Em todas elas, a soma dos elementos de cada linha, coluna e diagonal é igual a 15. Veja o exemplo da matriz Q:

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

João quer fazer um quadrado mágico com os mesmos algarismos da matriz Q e já posicionou os algarismos 5, 8 e 9 em uma matriz J:

$$J = \begin{bmatrix} 8 & & x \\ y & 5 & \\ & 9 & \end{bmatrix}$$

Se João continuar preenchendo corretamente os outros elementos da matriz J com os demais algarismos da matriz Q, a soma dos valores que ocuparão as posições indicadas por x e y na matriz J será igual a:

A 3
B 6
C 9
D 12
E 15

11 **UCS 2012 (Adapt.)** Uma empresa vende três produtos. O preço de venda do tipo *j* está representado por a_j no vetor a = [300 225 500 700]. O número de produtos vendidos do tipo *j*, em determinado mês, está representado por b_j no vetor b = [45 25 35].

O custo para produzir cada produto do tipo *j* está representado por c_j no vetor c = [225 368 580].

A expressão que fornece o lucro obtido com a venda dos produtos, no mês em questão, é

A $a \cdot b - c \cdot a$
B $a \cdot b - c \cdot b$
C $a \cdot b$
D $c \cdot b - a \cdot b$
E $c \cdot a - a \cdot b$

12 **Enem 2012** Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz 4×4, e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando produto de matrizes Todas as provas possuíam o mesmo peso, e a tabela que ele conseguiu é mostrada a seguir

	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Matemática	5,9	6,2	4,5	5,5
Português	6,6	7,1	6,5	8,4
Geografia	8,6	6,8	7,8	9,0
História	6,2	5,6	5,9	7,7

Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por

A $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

E $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

13 Uma empresa de aluguel de automóveis oferece opções de serviços diferentes para clientes físicos e corporativos e trabalha com três modelos da fabricante Renault: Logan, Stepway e Sandero. As matrizes F e C a seguir informam o número de carros, separados por cor, alugados para cada tipo de cliente.

$$F = \begin{pmatrix} 36 & 14 & 30 \\ 41 & 22 & 44 \\ 55 & 27 & 71 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Azul} \\ \text{Branco} \\ \text{Prata} \end{matrix} \quad (\text{colunas: Logan, Stepway, Sandero})$$

$$C = \begin{pmatrix} 48 & 68 & 22 \\ 53 & 78 & 36 \\ 65 & 91 & 49 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Azul} \\ \text{Branco} \\ \text{Prata} \end{matrix} \quad (\text{colunas: Logan, Stepway, Sandero})$$

Encontre os números médios de cada tipo de carro alugado pela empresa

14 **Unicamp 2014 (Adapt.)** Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & b \\ c & 2 & 0 \end{pmatrix}$ em que a, b e c são números reais.

Encontre os valores de a, b e c de modo que $A^T = -A$.

15 Os grupos da primeira fase da Copa do Mundo são formados por quatro times de modo que cada um deles jogue contra todos os outros uma única vez A tabela a seguir é uma matriz quadrada em que cada elemento m_{ij} (da linha i e coluna j) representa o número de gols marcados pelo time da linha *i* sobre o time da coluna *j*:

	Time A	Time B	Time C	Time D
Time A	0	2	1	2
Time B	1	0	1	4
Time C	3	1	0	3
Time D	2	2	0	0

Cada vitória marca dois pontos para o vencedor, cada empate marca um ponto para cada time e classificam-se os dois times com o maior número de pontos. No caso de dois times ficarem com o mesmo número de pontos, classifica o que tiver o maior saldo de gols. Então, de acordo com a tabela e as regras mencionadas, os times classificados em primeiro e segundo lugar no grupo foram, respectivamente:

A A e B
B B e C
C C e B
D C e A
E B e A

Texto para as próximas duas questões

Uma fábrica de eletrodomésticos produz dois tipos de aparelhos X e Y que contêm três componentes distintos A, B e C. A tabela a seguir apresenta o número de componentes necessários para a fabricação de cada aparelho, bem como o número de resistores, capacitores e transistores contidos em cada um desses componentes.

Componente	A	B	C
Aparelho X	2	1	2
Aparelho Y	1	2	3
Resistores	5	8	7
Capacitores	6	10	5
Transistores	3	2	4

16 No início deste ano, a fábrica recebeu um pedido de 2000 aparelhos do tipo X e 1500 aparelhos do tipo Y Se os únicos componentes dos aparelhos X e Y que contêm resistores, capacitores e transistores são os componentes A, B e C então, sendo *n* o número total de capacitores necessários para atender esse pedido, pode-se concluir que:

A $n < 10^2$
B $10^2 < n < 10^3$
C $10^3 < n < 10^4$
D $10^4 < n < 10^5$
E $n > 10^5$

17 Considere a matriz M formada pelas duas primeiras linhas de informações numéricas apresentadas pela tabela e a matriz N formada pelas três últimas.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 6 & 10 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Sabendo que M^T e N^T designam as respectivas matrizes transpostas de M e N, assinale a alternativa que apresenta um produto entre matrizes suficiente para se obter os valores numéricos de uma tabela em que a primeira, a segunda e a terceira linha apresentem respectivamente o número de resistores, capacitores e transistores necessários para a produção de cada tipo de aparelho.

A $N \cdot M^T$
B $M^T \cdot N$
C $N^T \cdot M^T$
D $N^T \cdot M$
E $M^T \cdot N^T$

Texto para as próximas duas questões

André, Beto e Carlos trabalham numa mesma empresa e resolveram almoçar juntos numa lanchonete do tipo *fast food*. Todos os três costumam comer hambúrgueres, batatas fritas, tomar refrigerantes e comer tortas de frutas como sobremesa.
A tabela a seguir apresenta as intenções dos pedidos de cada um:

	Hambúrguer	Fritas	Refrigerante	Torta
André	2	2	2	1
Beto	1	3	1	2
Carlos	2	1	1	3

Perto da empresa em que trabalham há três opções de lanchonetes do agrado de todos e a próxima ta bela fornece o preço unitário de cada produto nas lanchonetes consideradas:

	Mc'Ronalds	Burguer-Ring	Rob's
Hambúrguer	R$ 5,00	R$ 7,00	R$ 4,00
Fritas	R$ 3,00	R$ 2,50	R$ 2,50
Refrigerante	R$ 2,00	R$ 1,50	R$ 2,00
Torta	R$ 4,00	R$ 4,00	R$ 5,00

18 Cada um dos três considerou quanto gastaria em cada lanchonete para comer exatamente o que desejava e um deles afirmou que gastaria, no máximo, R$ 30,00. Quem poderia ter feito tal afirmação?

A somente Carlos
B somente Beto
C somente André
D André ou Beto
E Beto ou Carlos

19 Depois de muita discussão, os três resolveram ir a uma dessas três lanchonetes em que apenas um deles gastou a quantia de R$ 24,00. Assim, se todos fizeram o pedido que desejavam, pode-se concluir que

A eles comeram no Mc'Ronalds.
B eles comeram no Burguer-Ring.
C eles comeram no Rob's.
D eles não comeram no Mc'Ronalds.
E eles não comeram no Burguer-Ring.

20 **UFF 2012** Se C_1, C_2, , C_k representam *k* cidades que compõem uma malha aérea, a matriz de adjacência associada à malha é a matriz A definida da seguinte maneira: o elemento na linha *i* e na coluna *j* de A é igual ao número 1 se existe exatamente um voo direto da cidade C, para a cidade C_1, caso contrário, esse elemento é igual ao número 0 Uma propriedade importante do produto com $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{\text{n fatores}}$ $n \in \mathbb{N}$ é a seguinte: o elemento na linha *i* e na coluna *j* da matriz A dá o número de voos com exatamente n 1 escalas da cidade C_i para a cidade C_j.
Considere a malha aérea composta por quatro cida des, C_1, C_2, C_3 e C_4, cuja matriz de adjacência é:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os números de voos com uma única escala de C_3 para C_1, de C_3 para C_2 e de C_3 para C_4 são, respectivamente, iguais a

A 0, 0 e 1.
B 1, 1 e 0.
C 1, 1 e 2.
D 1, 2 e 2.
E 2, 1 e 1.

21 **Unesp 2012** O mercado automobilístico brasileiro possui várias marcas de automóveis disponíveis aos consumidores. Para cinco dessas marcas (A, B, C, D e E), a matriz fornece a probabilidade de um proprietário de um carro de marca da linha i trocar para o carro de marca da linha j, quando da compra de um carro novo. Os termos da diagonal principal dessa matriz fornecem as probabilidades de um proprietário permanecer com a mesma marca de carro na compra de um novo.

	A	B	C	D	E
A	0,6	0,1	0,2	0,1	0,0
B	0,3	0,5	0,0	0,1	0,1
C	0,2	0,2	0,4	0,1	0,1
D	0,3	0,2	0,2	0,3	0,0
E	0,2	0,3	0,1	0,2	0,2

A probabilidade de um proprietário de um carro da marca B comprar um novo carro da marca C, após duas compras, é:

A 0,25
B 0,24
C 0,20
D 0,09
E 0,00

22 **Unicamp 2017** Sendo *a* um número real, considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Então, A^{2017} é igual a

A $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
B $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
C $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
D $\begin{pmatrix} 1 & a^{2017} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

23 **Unicamp 2015** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$, onde *a* e *b* são números reais. Se $A^2 = A$ e A é invertível, então

A a = 1 e b = 1.
B a = 1 e b = 0.
C a = 0 e b = 0.
D a = 0 e b = 1.

24 **Fuvest 2012** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a & 2a+1 \\ a\ \ 1 & a+1 \end{bmatrix}$ em que *a* é um número real. Sabendo que A admite inversa $A^{\ 1}$ cuja primeira coluna é $\begin{bmatrix} 2a-1 \\ 1 \end{bmatrix}$, a soma dos elementos da diagonal principal de $A^{\ 1}$ é igual a

A 5
B 6
C 7
D 8
E 9

25 **Unicamp 2018** Sejam **a** e **b** números reais tais que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ satisfaz a equação $A^2 = a_A + bI$, em que I é a matriz identidade de ordem 2. Logo, o produto ab é igual a

A 2.
B 1.
C 1.
D 2.

26 **Unesp 2016** Um ponto P, de coordenadas (x, y) do plano cartesiano ortogonal, é representado pela matriz coluna $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ assim como a matriz coluna $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ representa, no plano cartesiano ortogonal, o ponto P de coordenadas (x, y).

Sendo assim, o resultado da multiplicação matricial $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna que, no plano cartesiano ortogonal, necessariamente representa um ponto que é

A uma rotação de P em 180° no sentido horário, e com centro em (0, 0).
B uma rotação de P em 90° no sentido anti-horário, e com centro em (0, 0).
C simétrico de P em relação ao eixo horizontal x.
D simétrico de P em relação ao eixo vertical y.
E uma rotação de P em 90° no sentido horário, e com centro em (0, 0).

27 **UEPB 2012** Se a é uma matriz com det(A) = 1 e $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & 0 \end{pmatrix}$, o valor de m é:

A 1
B –1
C zero
D 2
E 2

28 **Unicamp 2020** Sabendo que *p* é um número real, considere a matriz $A = \begin{bmatrix} p & 2 \\ 0 & p \end{bmatrix}$ e sua transposta A^T.

Se $A = A^T$ é singular (não invertível), então

A $p = 0$.
B $|p| = 1$.
C $|p| = 2$.
D $p = 3$.

29 **IFSul 2015** Uma empresa de informática constatou que o custo total C(x), em reais, para produzir seus equipa mentos é dado pela função $C(x) = \det_A + \det_B \quad 10x + 2$, na qual x é o número de equipamentos produzidos, com

$A = \begin{bmatrix} x^2 & 2x \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -x^2 - 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & x & 2x \end{bmatrix}$.

A quantidade de unidades que devem ser fabricadas para que o custo seja mínimo é

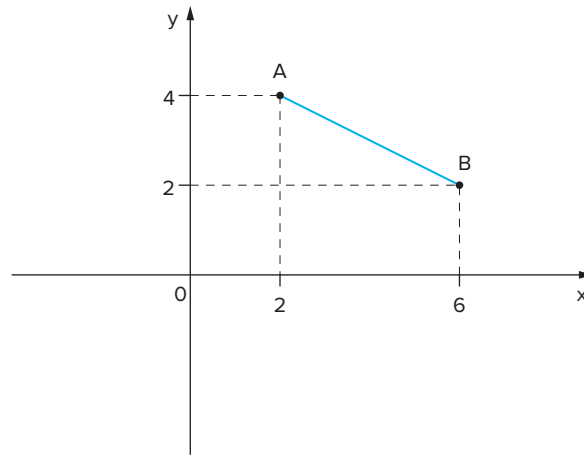
A 1 unidade.
B 2 unidades.
C 3 unidades.
D 4 unidades.

30 **Uern 2015** Considere a seguinte matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \log_2 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & \log_2 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Pela regra de Sarrus, o determinante dessa matriz é

A 8.
B 9.
C 15.
D 24.

31 Muito usadas nos sistemas de computação gráfica, as transformações lineares seguem as normas do produto matricial para obter as coordenadas dos pontos que localizam determinadas figuras geométricas no plano cartesiano. As tabelas a seguir apresentam, em duas linhas e duas colunas, a matriz M com as coordenadas cartesianas (x, y) dos vértices do segmento $\overline{AB}$ situado no primeiro quadrante, e uma matriz de transformação linear T.

$$\begin{matrix} & A & B \\ x & \multicolumn{2}{c}{} \\ y & \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = M \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = T$$

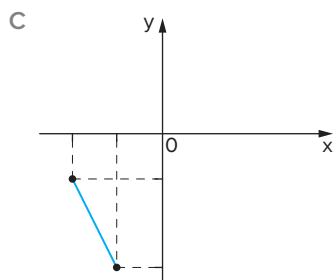
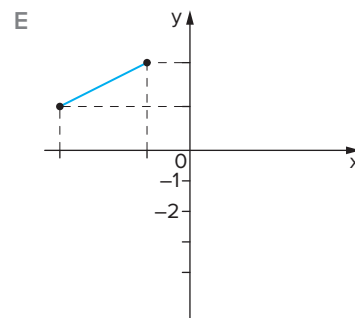
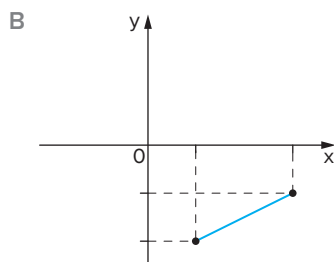
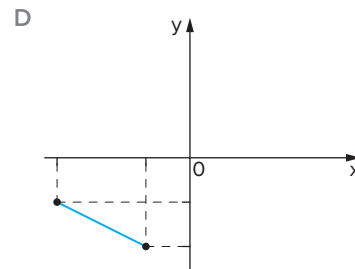
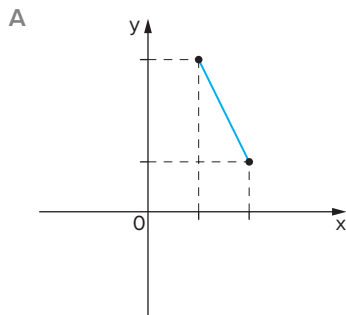
Observando que as coordenadas dos pontos A e B ocupam as colunas da matriz M, assinale a alternativa que apresenta o esboço do segmento que une os pontos cujas coordenadas ocupam as colunas da matriz resultante do produto T·M

A

B

C

D

E

32 Uern 2012 Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ x & 4 & 1 \\ -1 & 6 & y \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & y & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ x & -1 & 1 \end{bmatrix}$ cujos determinantes são iguais a 63 e 49, respectivamente Se $y = x + 3$, então a soma dos valores de x e y é:

A 7
B 8
C 10
D 12

33 Unicamp 2014 Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ b & 1 & a \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix}$ onde *a* e *b* são números reais distintos. Podemos afirmar que:

A a matriz M não é invertível.
B o determinante de M é igual a $a^2 - b^2$.
C a matriz M é igual à sua transposta.
D o determinante de M é positivo.

34 Unicamp 2016 Considere a matriz quadrada de ordem 3,

$A = \begin{bmatrix} \cos x & 0 & -\operatorname{sen} x \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} x & 0 & \cos x \end{bmatrix}$ onde *x* é um número real

Podemos afirmar que

A A não é invertível para nenhum valor de *x*.
B A é invertível para um único valor de *x*.
C A é invertível para exatamente dois valores de *x*.
D A é invertível para todos os valores de *x*.

35 FGV 2012 Seja a matriz identidade de ordem três $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e A a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Considere a equação polinomial na variável real *x* dada por det(A   x · I) = 0 em que o símbolo det(A   x · I) indi ca o determinante da matriz A   x   I O produto das raízes da equação polinomial é:

A 3
B 2
C 1
D 0
E 1

36 UEPB 2013 A equação $\begin{vmatrix} \log(x \quad 1) & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \log(x-1) & 1 & \log(x-1) \end{vmatrix} = 0$ tem como solução real os valores de *x*:

A 2 e 10
B 0 e 2
C 3 e 11
D 4 e 11
E 2 e 11

37 Acafe 2012 Analise as afirmações abaixo, sabendo que: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$

I. $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$

II. $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix} = -6$

III. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0$

IV. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+2a & e+2b & f+2c \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$

Assinale a alternativa correta.

A Apenas I, III e IV são verdadeiras.
B Apenas a afirmação III é verdadeira
C Apenas I e II são verdadeiras.
D Todas as afirmações são verdadeiras.

38 Unicamp 2019 Sabendo que a e b são números reais, considere a matriz quadrada de ordem 3,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ b & 1 & a \\ 2 & b & 2 \end{pmatrix}$$

Se a soma dos elementos em cada linha da matriz A tem sempre o mesmo valor, então o determinante de A é igual a

A 0.
B 2
C 5.
D 10.

39 Udesc 2015 Considerando que A é uma matriz quadrada de ordem 3 e inversível, se

$\det(3A) = \det(A^2)$ então det(A) é igual a:

A 9
B 0
C 3
D 6
E 27

40 Um terreno no interior do estado de Santa Catarina é quadrangular e tem seus vértices nos pontos A, B, C e D tais que:

- O ponto B está a 5 km ao leste e a 2 km ao norte do ponto A.
- O ponto C está a 4 km ao leste e a 5 km ao norte do ponto A.
- O ponto D está a 1 km ao leste e a 4 km ao norte do ponto A.
- O preço médio dos terrenos rurais nessa região do país é de R$ 2.500,00 por hectare, mas o dono desse terreno quer vendê-lo rapidamente e, por isso, vai oferecê lo por um valor 10% inferior ao preço médio praticado na região.

Então, sabendo que um hectare equivale a 10 000 m^2, o dono do terreno deverá oferecer o terreno por um valor total de:

A R$ 3 150 000,00
B R$ 3.500.000,00
C R$ 5.600.000,00
D R$ 6.300.000,00
E R$ 7.000.000,00

41 **UFSJ 2012** O determinante da matriz

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$$ é igual a S. Para quaisquer valores

reais tomados para os elementos de M, a matriz que possui determinante igual a –6S é:

A $\begin{bmatrix} 6a_4 & 6a_5 & 6a_6 \\ 6a_1 & 6a_2 & 6a_3 \\ 6a_7 & 6a_8 & 6a_9 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} a_7 & 2a_8 & a_9 \\ 3a_4 & 6a_5 & 3a_6 \\ a_1 & 2a_2 & a_3 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} -6a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & -6a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & 6a_9 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} -a_1 & a_2 & a_3 \\ 6a_4 & -6a_5 & -6a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$

42 **UFABC** No sistema de equações a seguir, *p* e *q* são constantes reais e *x* e *y* são variáveis reais:

$$\begin{cases} p \cdot x - y = 2 \\ (p + q) \cdot x + y = 3 \end{cases}$$

Calcule *p* e *q* sabendo que a solução desse sistema é o par ordenado (2, –3).

43 No sistema de equações a seguir, *m* e *n* são constan tes reais e *x*, *y* e *z* são variáveis reais:

$$\begin{cases} mx \quad y + z = 2 \\ x + y + 4z = 3 \\ 2x + nz = 7 \end{cases}$$

Sabendo que a terna ordenada (1, 6,   1) é a solução desse sistema podemos concluir que m + n é igual a:

A 9
B   5
C 6
D 4
E 0

44 Em um posto de gasolina, o litro da gasolina comum custa R$ 2,20 e o da gasolina aditivada custa R$ 2,80. Uma pessoa entra nesse posto dispondo de exatamente R$ 112,00 para encher o tanque de gasolina de seu carro, cuja capacidade é de 50 litros. Sabendo que o carro chegou no posto com 4 litros de gasolina no tanque, determine com quantos litros de gasolina comum a mais do que a aditivada essa pessoa deve abastecer seu carro para que o tanque fique cheio gastando os R$ 112,00.

A 12
B 11
C 10
D 9
E 8

45 **Enem 2013** Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde-amarelo-vermelho), a luz amarela permaneça acesa por 5 segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa seja igual a $\frac{2}{3}$ do tempo em que a luz vermelha fique acesa. A luz verde fica acesa, em cada ciclo, durante X segundos e cada ciclo dura Y segundos.

Qual é a expressão que representa a relação entre X e Y?

A 5X – 3Y + 15 = 0
B 5X – 2Y + 10 = 0
C 3X – 3Y + 15 = 0
D 3X – 2Y + 15 = 0
E 3X – 2Y + 10 = 0

46 Numa banca de frutas, uma pera custa R$ 3,00 mais meia banana, e meia dúzia de bananas custam R$ 0,80 mais meia pera. Então uma dúzia de bananas mais meia dúzia de peras custam ao todo:

A R$ 18,00
B R$ 24,00
C R$ 30,00
D R$ 36,00
E R$ 42,00

47 Marta precisa trocar as tomadas e os interruptores de sua casa. Começou a fazer isso há dois finais de semana, quando trocou o interruptor e as quatro tomadas da lavanderia. No último final de semana Marta trocou os dois interruptores e as três tomadas da cozinha e no próximo final de semana pretende trocar os quatro interruptores e as 11 tomadas dos quartos da casa.
Marta comprou os novos dispositivos elétricos na mesma loja onde gastou R$ 29,40 com as peças da lavanderia e R$ 32,30 com as peças da cozinha.
Sabendo que não houve e nem haverá reajuste nos preços das mercadorias dessa loja, no próximo final de semana Marta deverá gastar com as peças neces sárias para os quartos de sua casa, nessa mesma loja, a quantia de:

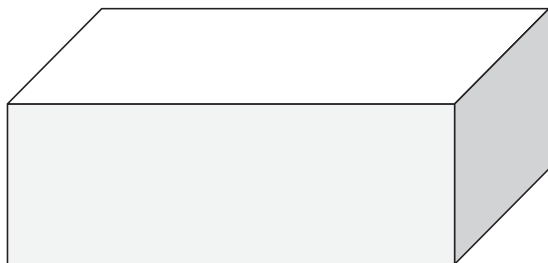
A R$ 58,80
B R$ 85,50
C R$ 91,10
D R$ 102,40
E R$ 123,80

48 **UEMG 2014** Uma pequena empresa fabrica dois tipos de colchão: solteiro e casal. A tabela a seguir refere-se ao faturamento da empresa nos meses de agosto e setembro:

	Faturamento mensal com colchão de solteiro	Faturamento mensal com colchão de casal	TOTAL
AGOSTO	(?)	(?)	R$ 8.320,00
SETEMBRO	Metade do valor faturado em agosto	Um terço do valor faturado em agosto	R$ 3.200,00

Cada colchão de solteiro custa R$ 320,00, e cada col chão de casal custa R$ 480,00
A quantidade de colchões de solteiro vendidos em agosto corresponde a

A 6
B 8.
C 10.
D 11

49 Em um bloco retangular há faces com perímetros iguais a 22 cm, 24 cm e 30 cm.

A área da maior face desse bloco mede:

A 56 cm²
B 52 cm²
C 48 cm²
D 44 cm²
E 40 cm²

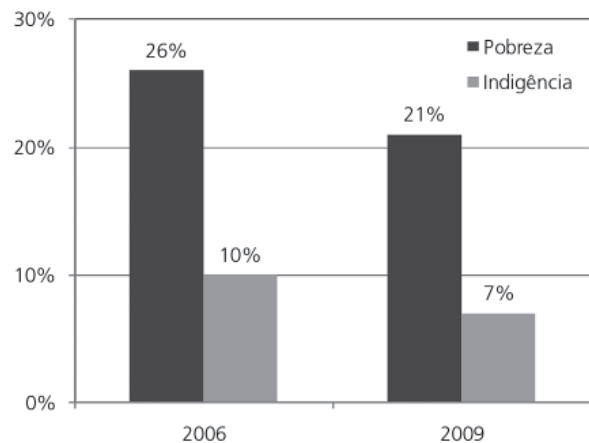
50 **Unicamp 2012** As companhias aéreas costumam estabelecer um limite de peso para a bagagem de cada passageiro, cobrando uma taxa por quilograma de ex cesso de peso. Quando dois passageiros compartilham a bagagem, seus limites são considerados em conjunto. Em um determinado voo, tanto um casal como um senhor que viajava sozinho transportaram 60 kg de bagagem e foram obrigados a pagar pelo excesso de peso. O valor que o senhor pagou correspondeu a 3,5 vezes o valor pago pelo casal
Para determinar o peso excedente das bagagens do casal (x) e do senhor que viajava sozinho (y), bem como o limite de peso que um passageiro pode transportar sem pagar qualquer taxa (z), pode-se resolver o seguinte sistema linear:

A $\begin{cases} x + 2z = 60 \\ y + z = 60 \\ 3{,}5x + y = 0 \end{cases}$

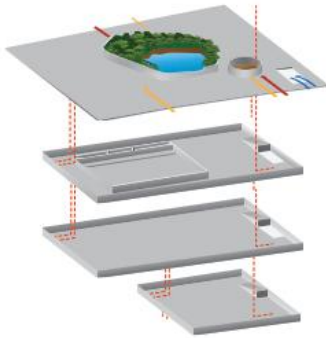
B $\begin{cases} x + 2z = 60 \\ y + z = 60 \\ 3{,}5x + y = 0 \end{cases}$

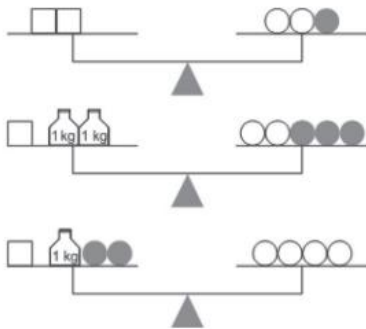
C $\begin{cases} x + z = 60 \\ y + 2z = 60 \\ 3{,}5x - y = 0 \end{cases}$

D $\begin{cases} x + z = 60 \\ y + 2z = 60 \\ 3{,}5x + y = 0 \end{cases}$

51 Recentemente, um órgão governamental de pesquisa divulgou que, entre 2006 e 2009, cerca de 5,2 milhões de brasileiros saíram da condição de indigência. Nesse mesmo período, 8,2 milhões de brasileiros dei xaram a condição de pobreza. Observe que a faixa de pobreza inclui os indigentes. O gráfico abaixo mostra os percentuais da população brasileira enquadrados nessas duas categorias, em 2006 e 2009.

Após determinar a população brasileira em 2006 e em 2009, resolvendo um sistema linear, verifica-se que

A o número de brasileiros indigentes passou de 19,0 milhões, em 2006, para 13,3 milhões, em 2009.
B 12,9 milhões de brasileiros eram indigentes em 2009.
C 18,5 milhões de brasileiros eram indigentes em 2006.
D entre 2006 e 2009, o total de brasileiros incluídos nas faixas de pobreza e de indigência passou de 36% para 28% da população.

52 Um estacionamento construído no subsolo abaixo de um parque municipal tem três pavimentos e um total de 800 vagas. A figura a seguir representa o projeto de sua construção.

Como os sanitários do parque ocupam uma área do primeiro subsolo, o número de vagas neste pavimento é menor que nos outros dois. Além disso, devido às dificuldades impostas pela geologia do terreno, o terceiro subsolo foi construído com uma área menor que a dos outros dois.
Se o número de vagas do segundo subsolo é igual ao número de vagas nos outros dois pavimentos e igual a quatro vezes a diferença entre o número de vagas dos outros dois pavimentos, podemos concluir que:
A no primeiro subsolo há 250 vagas.
B no primeiro subsolo há 150 vagas.
C no primeiro subsolo há 100 vagas.
D no terceiro subsolo há 150 vagas.
E no terceiro subsolo há 100 vagas.

53 **Cefet-MG 2015** Analise o esquema seguinte.

Se os pratos da balança estão equilibrados, então a soma dos pesos dos objetos □, ○ e ●, em kg, é
A menor que 1.
B maior que 2,5.
C maior que 1 e menor que 1,5.
D maior que 1,5 e menor que 2.
E maior que 2 e menor que 2,5.

54 **Unesp 2015** Em uma floricultura, os preços dos buquês de flores se diferenciam pelo tipo e pela quantidade de flores usadas em sua montagem. Quatro desses buquês estão representados na figura a seguir, sendo que três deles estão com os respectivos preços.

De acordo com a representação, nessa floricultura, o buquê 4, sem preço indicado, custa
A R$ 15,30.
B R$ 16,20.
C R$ 14,80.
D R$ 17,00.
E R$ 15,50.

55 Um restaurante japonês oferece três tipos de combos para seus clientes na hora do almoço. Cada um deles é formado por quantidades diferentes de *temakis*, *sushis* e *oniguiris*.
Tanto os *temakis* quanto os *sushis* são enrolados em alga, mas o primeiro tem formato cônico e o segundo tem formato cilíndrico. Já os *oniguiris* só levam arroz e peixe.
Logo na entrada do restaurante, há um cartaz com as fotos e os preços dos combos:

De acordo com as informações do cartaz, e supondo que o preço de cada item seja sempre o mesmo independentemente do combo, pode-se concluir que o valor cobrado por cada *temaki* nos combos desse restaurante é de:
A R$ 5,50
B R$ 5,00
C R$ 4,50
D R$ 3,00
E R$ 2,50

56 **Fuvest** João entrou na lanchonete BOG e pediu 3 hambúrgueres, 1 suco de laranja e 2 cocadas, gastando R$ 21,50. Na mesa ao lado, algumas pessoas pediram 8 hambúrgueres, 3 sucos de laranja e 5 cocadas, gastando R$ 57,00. Sabendo-se que o preço de um hambúrguer, mais o de um suco de laranja, mais o de uma cocada totaliza R$ 10,00, calcule o preço de cada um desses itens.

57 **UEG 2015** Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ tal que $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$ os valores de x, y e z são, respectivamente:
A 1, –2 e –1
B 0, –1 e 1
C 1, 0 e –2
D 0, –2 e 1

58 **Unicamp 2017** Sejam *a* e *b* números reais. Considere, então, os dois sistemas lineares abaixo, nas variáveis *x*, *y* e *z*:

$$\begin{cases} x \quad \not{y} \quad a \\ z \quad \not{y} \quad 1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x+y=2 \\ y+z=b \end{cases}$$

Sabendo que esses dois sistemas possuem uma solução em comum, podemos afirmar corretamente que

A a   b = 0.
B $a + b = 1$.
C a   b = 2.
D $a + b = 3$.

59 **Unicamp 2018** Sabendo que *k* é um número real, considere o sistema linear nas variáveis reais *x* e *y*,

$$\begin{cases} x+ky=1 \\ x+y=k \end{cases}$$

É correto afirmar que esse sistema

A tem solução para todo *k*.
B não tem solução única para nenhum *k*.
C não tem solução se $k \neq 1$.
D tem infinitas soluções se $k \neq 1$.

60 No sistema de equações a seguir, *m* e *n* são constantes reais e *x*, *y* e *z* são variáveis reais:

$$\begin{cases} mx-y+z=2 \\ x+y+4z=3 \\ 2x+nz=7 \end{cases}$$

Sabendo que a terna ordenada (1, 6, –1) é a solução desse sistema podemos concluir que $m + n$ é igual a:

A 9
B –5
C 6
D 4
E 0

61 **Upe 2013** Em uma floricultura, é possível montar arranjos diferentes com rosas, lírios e margaridas. Um arranjo com 4 margaridas, 2 lírios e 3 rosas custa 42 reais. No entanto, se o arranjo tiver uma margarida, 2 lírios e uma rosa, ele custa 20 reais. Entretanto, se o arranjo tiver 2 margaridas, 4 lírios e uma rosa, custará 32 reais. Nessa floricultura, quanto custará um arranjo simples, com uma margarida, um lírio e uma rosa?

A 5 reais
B 8 reais
C 10 reais
D 15 reais
E 24 reais

62 Carla foi ao *petshop* com seus três cãezinhos: Rex, Ray e Buz. Chegando lá, viu uma balança e resolveu pesá-los de dois em dois, verificando que:

- Rex e Ray pesam juntos 8 kg.
- Rex e Buz pesam juntos 10 kg.
- Ray e Buz pesam juntos 11 kg.

Se Carla tivesse pesado os três cãezinhos ao mesmo tempo, a balança acusaria:

A 13,5 kg
B 14,5 kg
C 14,5 kg
D 16,5 kg
E 17,5 kg

63 **UPE 2015** No quadro abaixo, observa-se o balanço de vendas das três vendedoras da Perfumaria Soxeiro para os três perfumes mais vendidos no último sábado.

Vendedora	Perfumes (nº de vidros)			Faturamento R$
	Alfa	Beta	Gama	
Amanda	7	3	4	1.950
Bruna	5	10	8	3.600
Carol	4	5	6	2.350
Total	16	18	18	7.900

De acordo com esses dados, quanto custa um vidro do perfume Beta?

A R$ 100,00
B R$ 150,00
C R$ 160,00
D R$ 180,00
E R$ 200,00

64 **UFRGS 2013** O sistema de equações $\begin{cases} 5x + 4y + 2 = 0 \\ 3x - 4y - 18 = 0 \end{cases}$ possui

A nenhuma solução.
B uma solução.
C duas soluções
D três soluções.
E infinitas soluções

65 Resolver o seguinte sistema linear $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 3x+6y-z=2 \\ 2x+4y+z=2 \end{cases}$.

66 **UFSM 2012** Na peça “Um xadrez diferente”, que encenava a vida de um preso condenado por crime de “colarinho branco”, foi utilizado como cenário um mosaico formado por retângulos de três materiais diferentes, nas cores verde, violeta e vermelha. Considere que x, y e z são, respectivamente, as quantidades, em quilos, dos materiais verde, violeta e vermelho utilizados na confecção do painel e que essas quantidades satisfazem o sistema linear

$$\begin{cases} x+3y+2z=250 \\ 2x+5y+3z=420 \\ 3x+5y+2z=430 \end{cases}$$

Sobre a solução desse sistema e a quantidade dos materiais verde, violeta e vermelho utilizada no painel, afirma-se:

I. O sistema tem solução única e $x + y + z = 120$, isto é, a soma das quantidades dos três materiais empregados é 120 quilos.
II. O sistema não tem solução, é impossível determinar a quantidade de cada material empregado.
III. O determinante da matriz dos coeficientes a qual está associada ao sistema é diferente de zero e $x = 2y$ e $y = 3z$.

IV. O determinante da matriz dos coeficientes a qual está associada ao sistema é zero. O sistema tem solução, porém, para determinar a quantidade dos materiais utilizados, é necessário saber previamente a quantidade de um desses materiais.

Está(ão) correta(s)

A apenas I.
B apenas II.
C apenas III.
D apenas I e III.
E apenas IV.

67 Unicamp 2016 Considere o sistema linear nas variáveis reais *x*, *y*, *z* e *w*,

$$\begin{cases} x \quad = y \quad 1, \\ y + z = 2, \\ w \quad = z \quad 3. \end{cases}$$

Logo, a soma $x = y + z + w$ é igual a

A 2.
B 0.
C 6.
D 8.

68 Em relação ao sistema linear $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x \ = \dfrac{y}{2} \quad 1 \end{cases}$ é correto afirmar que:

A é possível e determinado.
B é possível e indeterminado.
C é impossível.
D é homogêneo.

69 Em relação ao sistema linear $\begin{cases} 2 \ = x \quad 3y \\ x + 5y = 2(y + 5) \end{cases}$ é correto afirmar que:

A é possível e determinado.
B é possível e indeterminado.
C é impossível.
D é homogêneo.

70 Em relação ao sistema linear $\begin{cases} 2x \ = 5y \quad 6 \\ +x \ = y \quad 3 \quad \dfrac{y}{2} \end{cases}$ é correto afirmar que:

A é possível e determinado.
B é possível e indeterminado.
C é impossível.
D é homogêneo.

71 UFMG 2013 Considere o seguinte sistema linear nas incógnitas x e y:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 6x + ay = 3 \end{cases}$$

Observando-se que o coeficiente de *y* na segunda equação é um parâmetro *a*,

a) DETERMINE para quais valores de *a* o sistema tem solução.
b) DETERMINE as soluções *x* e *y* em função do parâmetro *a*, caso o sistema tenha solução

72 Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e X tal que $A \cdot X = B$.

Considere também o conjunto C de todos os valores reais do elemento *m* localizado na terceira linha e primeira coluna da matriz A, para os quais a equação $A \cdot X = B$ admite mais de uma solução. Sobre o conjunto considerado, é correto afirmar que:

A $0 \in C$
B $3 \in C$
C $-3 \in C$
D C é unitário
E C é vazio

73 Fuvest 2015 No sistema linear $\begin{cases} ax - y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = m \end{cases}$ nas variáveis x, y e z, a e m são constantes reais. É correto afirmar:

A No caso em que a = 1, o sistema tem solução se, e somente se, m = 2.
B O sistema tem solução, quaisquer que sejam os valores de a e de m.
C No caso em que m = 2, o sistema tem solução se, e somente se, a = 1.
D O sistema só tem solução se a = m = 1.
E O sistema não tem solução, quaisquer que sejam os valores de a e de m.

74 Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ assinale a alternativa que apresenta os valores reais de λ tais que a equação matricial $A \cdot X = \lambda \cdot X$ tenha solução não nula:

A 1 e –5
B –1 e 5
C 1 e –4
D –1 e 4
E 4 e –5

75 Unicamp 2015 Considere o sistema linear nas variáveis *x*, *y* e *z*

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 20 \\ 7x + 8y \ = mz \quad 26 \end{cases}$$

onde *m* é um número real Sejam a < b < c números inteiros consecutivos tais que (x, y, z) = (a, b, c) é uma solução desse sistema O valor de m é igual a

A 3
B 2
C 1
D 0.

76 Qual o valor de *m* para que o sistema $\begin{cases} x + 2y + \ z = 0 \\ 2x + 5y \ = z \quad 0 \\ my + 6z = 0 \end{cases}$ admita solução não nula?

A 1
B –1
C 2
D –2
E 0

FRENTE 2

77 **Fuvest** Sabendo que x, y e z são números reais e $(2x+y-z)^2+(x-y)^2+(z-3)^2=0$ então, x + y + z é igual a

A 3
B 4
C 5
D 6
E 7

78 Quantas são as soluções do sistema $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x^2-2y^2=1 \end{cases}$?

A 0
B 1
C 2
D 4
E 8

79 Quantas soluções distintas o sistema

$$\begin{cases} (x\quad 1)(y\quad 2)(z\ =3)\quad 0 \\ (x+y)^2+(z-3x)^2=0 \end{cases}$$ admite?

A 0
B 1
C 2
D 3
E 6

80 **Fuvest 2016** Uma dieta de emagrecimento atribui a cada alimento um certo número de pontos, que equivale ao valor calórico do alimento ao ser ingerido. Assim, por exemplo, as combinações abaixo somam, cada uma, 85 pontos:

- 4 colheres de arroz + 2 colheres de azeite + 1 fatia de queijo branco.
- 1 colher de arroz + 1 bife + 2 fatias de queijo branco.
- 4 colheres de arroz + 1 colher de azeite + 2 fatias de queijo branco.
- 4 colheres de arroz + 1 bife.

Note e adote:

	1 colher de arroz	1 colher de azeite	1 bife
Massa de alimento (g)	20	5	100
% de umidade + macronutriente minoritário + micronutrientes	75	0	60
% de macronutriente majoritário	25	100	40

São macronutrientes as proteínas, os carboidratos e os lipídeos.

Com base nas informações fornecidas, e na composição nutricional dos alimentos, considere as seguintes afirmações:

I. A pontuação de um bife de 100 g é 45.
II. O macronutriente presente em maior quantidade no arroz são os carboidratos.
III. Para uma mesma massa de lipídeo de origem vegetal e de carboidrato, a razão $\dfrac{\text{número de pontos do lipídeo}}{\text{número de pontos do carboidrato}}$ é 1,5.

É correto o que se afirma em

A I, apenas.
B II, apenas.
C I e II, apenas.
D II e III, apenas.
E I, II e III.

81 **Fuvest 2017** João tem R$ 150,00 para comprar cane tas em 3 lojas. Na loja A, as canetas são vendidas em dúzias, cada dúzia custa R$ 40,00 e há apenas 2 dúzias em estoque. Na loja B, as canetas são vendidas em pares, cada par custa R$ 7,60 e há 10 pares em estoque. Na loja C, as canetas são vendidas avulsas, cada caneta custa R$ 3,20 e há 25 canetas em estoque O maior número de canetas que João pode comprar nas lojas A, B e C utilizando no máximo R$ 150,00 é igual a

A 46
B 45
C 44
D 43
E 42

82 Considere as equações lineares:

(I) $2x\ +y\ +z\ = w\quad 4$
(II) $x+y\ +5z\ = 3w\quad 3$
(III) $2x-2y+z+3w=7$
(IV) $3x+2y-2z-2w=-1$

A respeito da solução do sistema formado por essas equações, é correto afirmar que:

A $x=1$
B $y=1$
C $z=1$
D $w=1$

83 **Enem 2019** Um professor aplica, durante os cinco dias úteis de uma semana, testes com quatro questões de múltipla escolha a cinco alunos. Os resultados foram representados na matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Nessa matriz os elementos das linhas de 1 a 5 representam as quantidades de questões acertadas pelos alunos Ana, Bruno, Carlos, Denis e Érica, respectivamente, enquanto que as colunas de 1 a 5 indicam os dias da semana, de segunda feira a sexta-feira, res pectivamente, em que os testes foram aplicados.

O teste que apresentou maior quantidade de acertos foi o aplicado na

A segunda feira
B terça-feira.
C quarta-feira.
D quinta-feira.
E sexta-feira.

84 Imed 2018 Em uma grande cidade, para estudar o nível de ruído a que estavam expostos os habitantes, a prefeitura realizou quatro medições diárias durante cinco dias em um cruzamento de grande movimento. Cada elemento a_{ij} da matriz a seguir representa o nível de ruído, em decibéis (dB), registrado na medição *i* do dia *j*.

$$\begin{bmatrix} 45 & 62 & 68 & 44 & 63 \\ 51 & 49 & 72 & 48 & 68 \\ 39 & 52 & 71 & 52 & 62 \\ 51 & 45 & 63 & 40 & 69 \end{bmatrix}$$

De acordo com a Organização Mundial de Saúde (OMS), 50 dB é o nível máximo recomendável à exposição do ouvido humano.
Com as informações apresentadas, determine o nível médio de ruídos registrados no quarto dia e assinale a alternativa correta:

A 46 dB
B 46,5 dB
C 52 dB
D 65,5 dB
E 68,5 dB

85 Enem 2018 A Transferência Eletrônica Disponível (TED) é uma transação financeira de valores entre diferentes bancos. Um economista decide analisar os valores enviados por meio de TEDs entre cinco bancos (1, 2, 3, 4 e 5) durante um mês. Para isso, ele dispõe esses valores em uma matriz $A = [a_{ij}]$, em que $1 \leq i \leq 5$ e $1 \leq j \leq 5$ e o elemento a_{ij} corresponde ao total proveniente das operações feitas via TED, em milhão de real, transferidos do banco *i* para o banco *j* durante o mês. Observe que os elementos $a_{ii} = 0$, uma vez que TED é uma transferência entre bancos distintos. Esta é a matriz obtida para essa análise:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com base nessas informações, o banco que transferiu a maior quantia via TED é o banco

A 1.
B 2.
C 3.
D 4.
E 5.

86 UEL 2018 Leia o texto a seguir.

Segundo o Sistema de Informações sobre Mortalidade (SIM), do Ministério da Saúde, em 2014 houve 59 627 homicídios no Brasil, o que representa 4,9% do total de óbitos do mesmo ano. Restringindo esses dados ao sexo masculino, obtemos que 7,9% desse novo total de óbitos são homicídios De forma análoga, se restringirmos os dados ao sexo feminino, observamos que aqueles causados por homicídio representam 0,9% desse total

(Adaptado de: Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada e Fórum Brasileiro de Segurança Pública. *Atlas da Violência 2016*. p. 6).

Um pesquisador decide representar as informações presentes no texto através do uso de incógnitas de acordo com a tabela a seguir.

Incógnita	Significado
M	Número de óbitos do sexo masculino
F	Número de óbitos do sexo feminino
m	Número de homicídios do sexo masculino
f	Número de homicídios do sexo feminino

Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a forma matricial do sistema de equações lineares que representa as informações contidas no texto.

A $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{49}{10^3} & \frac{49}{10^3} & 0 & 0 \\ \frac{79}{10^3} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{9}{10^3} & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M \\ F \\ m \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59627 \\ 59627 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

B $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{49}{10^2} & \frac{49}{10^2} & 0 & 0 \\ \frac{79}{10^2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{9}{10^2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M \\ F \\ m \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59627 \\ 59627 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}049 & 0{,}049 & 0 & 0 \\ 0{,}079 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0{,}09 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M \\ F \\ m \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59627 \\ 59627 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{49}{103} & 0 & \frac{49}{103} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{79}{103} \\ 0 & \frac{9}{103} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M \\ F \\ m \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59627 \\ 59627 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

E $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4{,}9 & 1 & 0 & 4{,}90 \\ 0 & 0 & 1 & 7{,}9 \\ 0 & 0{,}9 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M \\ F \\ m \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59627 \\ 59627 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

87 Udesc 2018 Analise as proposições abaixo.

I. O produto de uma matriz linha por uma matriz li nha é uma matriz linha.
II. Uma matriz identidade elevada ao quadrado é uma matriz identidade.
III. O produto de uma matriz por sua transposta é a matriz identidade.

Assinale a alternativa **correta**.

A Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.
B Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
C Somente a afirmativa II é verdadeira.
D Somente as afirmativas II e III são verdadeiras
E Todas as afirmativas são verdadeiras

FRENTE 2

Texto para as próximas duas questões.

Leia o texto para responder à(s) questão(ões) a seguir
A tabela a seguir será usada para a transmissão de mensagens criptografadas em matrizes. A criptografia é feita ao se multiplicar a matriz C pela matriz-mensagem M, gerando a matriz criptografada $M_C = C \cdot M$

0		7	G	14	N	21	U
1	A	8	H	15	O	22	V
2	B	9	I	16	P	23	W
3	C	10	J	17	Q	24	X
4	D	11	K	18	R	25	Y
5	E	12	L	19	S	26	Z
6	F	13	M	20	T	27	?

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Por exemplo, a matriz-mensagem

$M = \begin{bmatrix} 5 & 19 & 20 & 15 & 21 & 0 \\ 14 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 14 & 19 & 16 & 5 & 18 \end{bmatrix}$, que significa ESTOU NO INSPER, depois de criptografada por C vira a matriz

$M_C = \begin{bmatrix} 33 & 67 & 59 & 46 & 5 & 18 \\ 28 & 48 & 39 & 31 & 5 & 18 \\ 70 & 111 & 78 & 62 & 10 & 36 \end{bmatrix}$.

Ao receber M_C, o destinatário deve multiplicá-la pela matriz decodificadora D, da mesma ordem da matriz C, para recuperar a mensagem original.

88 **Insper 2018** Modificando-se ligeiramente a matriz C, o envio da mensagem EU ESTUDEI NO INSPER torna-se possível no sistema descrito. Uma matriz C que funcione para a transmissão dessa mensagem tem que ser, necessariamente,

A quadrada e igual à sua transposta.
B de ordem 4x7 e inversível
C de ordem 4x4 e inversível.
D de ordem 7x7 e inversível.
E quadrada com determinante negativo.

89 **Insper 2018** A matriz decodificadora D será

A $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 4 \\ 11 & 11 & 9 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

E $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

90 **Udesc 2017** Sejam A, B, X e Y matrizes quadradas de ordem 2 tais que, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

A soma dos determinantes das matrizes X e Y saben do que $2X \quad 2Y = A \cdot B$ e $X + 2Y = A^t$ é igual a:

A 4
B 72
C 144
D 24
E 102

91 **Fac. Albert Einstein 2017** Uma matriz quadrada de ordem n é chamada triangular superior se $a_{ij} = 0$ para $i > j$. Os elementos de uma matriz triangular superior T, de ordem 3, onde $i \leq j$ são obtidos a partir da lei de formação $t_{ij} = 2i^2 \quad j$. Sendo $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ uma matriz de ordem 1×3 e A^t sua transposta, o produto $A \cdot T \cdot A^t$ é a matriz 1×1 cujo único elemento vale

A 0.
B 4.
C 7
D 28.

92 **Fac. Albert Einstein 2017** Uma matriz B possui i linhas e j colunas e seus elementos são obtidos a partir da expressão $bij = i - 2j$. Seja uma matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ cujos elementos da primeira coluna são nulos e I_2 a matriz identidade de ordem 2, tal que $A \cdot B = I_2$. O valor numérico do maior elemento da matriz A é igual a

A 0
B 1
C 2
D 3

93 **FGV 2017** Uma matriz A de ordem 2 transmite uma palavra de 4 letras em que cada elemento da matriz representa uma letra do alfabeto.
A fim de dificultar a leitura da palavra, por se tratar de informação secreta, a matriz A é multiplicada pela matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ obtendo-se a matriz codificada $B \cdot A$.

Sabendo que a matriz $B \cdot A$ é igual a $\begin{bmatrix} -10 & 27 \\ 21 & 39 \end{bmatrix}$, podemos afirmar que a soma dos elementos da matriz A é:

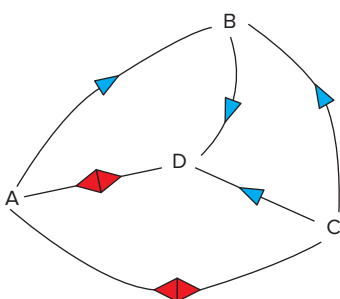
A 48
B 46
C 47
D 49
E 50

94 Uefs 2017 Se $M = (a_{ij})$, i = 1, 2, e j = 1, 2, é a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ então o elemento da matriz oposta ou simétrica da adjunta de M, associado ao a_{21} é

A −3 B −2 C −1 D 2 E 3

95 Uece 2017 Se o produto das matrizes $M = \begin{pmatrix} 1 & p \\ q & 1 \end{pmatrix}$ e $K = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$ satisfaz a condição M · K = K · M então, a expressão pq – xy é igual a

A $p^2 - x^2$ ou −xy.
B $p^2 + x^2$ ou −xy.
C $p^2 - q^2$ ou $-x^2$.
D $p^2 + q^2$ ou $-x^2$.

96 FGV-SP 2016 Os marcos A, B, C e D de uma cidade estão conectados por pistas de rodagem, conforme mostra a malha viária indicada no diagrama da figura 1. A figura 2 indica uma matriz que representa as quantidades de caminhos possíveis de deslocamento entre os marcos (dois a dois). Considera-se um caminho entre dois marcos qualquer percurso que não viole o sentido da pista, que não passe novamente pelo marco de onde partiu e que termine quando se atinge o marco de destino final pela primeira vez. As flechas da figura 1 indicam o sentido das pistas de rodagem.

Pista de mão dupla

Pista de mão simples

Figura 1

	A	B	C	D
A	0	2	1	4
B	1	0	1	1
C	3	3	0	4
D	1	2	1	0

Figura 2

Durante período de obras na malha viária descrita, a pista de rodagem entre os marcos A e D passou a ser de mão simples (sentido de A para D), e a pista do mar co C para o marco D, ainda que tenha permanecido com mão simples, teve seu sentido invertido, passan do a ser de D para C. Comparando os 16 elementos da matriz da figura 2 com seus correspondentes na matriz da nova configuração de malha viária, a quan tidade de elementos que mudarão de valor é igual a

A 5. C 7 E 9
B 6. D 8.

97 FGV-SP 2016 Os pontos de coordenadas (x, y) do plano cartesiano que satisfazem a equação matricial

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$ representam:

A uma elipse com centro no ponto (0, 0).
B um par de retas paralelas com declividade 3.
C uma hipérbole com um dos focos de coordenadas (3, 0).
D uma circunferência de raio $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
E uma parábola com concavidade voltada para cima.

98 Fac. Albert Einstein 2016 Uma matriz quadrada se diz ortogonal se sua inversa é igual à sua transposta. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} x-3 & -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & x \quad 3 \end{pmatrix}$ em que $x \in \mathbb{C}^*$ a soma dos valores de x que a tornam uma matriz ortogonal é igual a

A 6 + 4i
B 6 – 4i
C 6
D 4

99 Uern 2015 Considere a seguinte operação entre matrizes: $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot K = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

A soma de todos os elementos da matriz K é:

A 1
B 3
C 4.
D 7

100 Uece 2019 Os elementos *a*, *b*, *c*, *d* da matriz $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ são distintos entre si e escolhidos aleatoriamente no conjunto {1, 3, 5, 7}. Considerando-se, para cada es colha destes elementos, D o determinante de M, o número de valores distintos que D pode assumir é

A 6.
B 8.
C 16.
D 24.

101 Udesc 2019 Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$D = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$ o valor $\dfrac{\det(A) \cdot \det(B)}{\det(C) \cdot \det(D)}$ é igual a:

A 0
B 15
C 20
D 10
E 25

102 Uece 2019 Considere as matrizes $M=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ e $N=\begin{bmatrix}p & q\\ u & v\end{bmatrix}$. Se M · N = N · M, é correto afirmar que o determinante da matriz N é igual a

A $\dfrac{2p^2 \quad 3q^2}{3}$.

B $\dfrac{3p^2-2q^2}{3}$

C $\dfrac{3p^2-2q^2}{2}$

D $\dfrac{2p^2-3q^2}{2}$

103 Uece 2018 A solução real da equação

$$\begin{vmatrix}1 & \log_2(x) & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & \log_2(x) & 1\end{vmatrix}=8 \text{ é um número inteiro}$$

log2(x) é o logaritmo de x na base 2.

A par.
B primo.
C múltiplo de 3.
D múltiplo de 5.

104 Famema 2018 Considere as matrizes $A=(a_{ij})_{2\times 3}$ com $a_{ij} = 2i - j$ $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ m^2-1 & 2\end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix}-m & 0\\ 3m & 6\end{pmatrix}$ sendo *m* um número real. Sabendo que C = A · B, então det(C) é igual a

A 0.
B –12.
C –8.
D 6.
E –4.

105 UPF 2018 Sabendo que *x* é um número real, o determinante da matriz abaixo é dado por:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & \text{sen}\,x & 0\\ \cos x & 2 & \cos x\end{pmatrix}$$

A $\det A=\text{sen}^2 x\cdot\cos^2 x+4$

B $\det A=\text{sen}2x \quad 4$

C $\det A=4+\cos 2x$

D $\det A=\dfrac{1}{2}\text{sen}2x-2$

E $\det A=2\cdot\text{sen}^2 x+2$

106 Unisc 2017 Dadas as matrizes $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ o determinante da matriz $A\cdot B$ é

A 4
B 6
C 8
D 12
E 27

107 PUC-RS 2017 Sendo o determinante $\Delta=\begin{vmatrix}x & 4\\ 1 & x \quad 2\end{vmatrix}$ e A = {x ∈ ℝ; Δ = 0} o número de elementos do conjunto A é igual a

A 0
B 1
C 2
D 3
E 4

108 Famerp 2017 No estudo da dinâmica de populações é comum ser necessário determinar o número real λ na equação det(M – λI) em que M é uma matriz quadrada, I é a matriz identidade, da mesma ordem de M, e det representa o determinante da matriz (M – λI)

Se, em um desses estudos, tem-se $M=\begin{bmatrix}0 & 17 & 2\\ 2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ o valor positivo de λ é igual a

A 5.
B 8.
C 9.
D 12.
E 6.

109 Uece 2017 Uma matriz quadrada $X = (a_{ij})$ é simétrica quando $a_{ij} = a_{ji}$. Se o determinante da matriz simétrica $M=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ x & 1 & y\\ z & w & 1\end{pmatrix}$ é igual a 8, então, o valor da soma $x+y+z+w$ pode ser

A 9 ou 11.
B 9 ou 25.
C 11 ou 25.
D 9 ou 25.

110 Uerj 2017 Observe a matriz:

$$\begin{bmatrix}3+t & 4\\ 3 & t \quad 4\end{bmatrix}$$

Para que o determinante dessa matriz seja nulo, o maior valor real de t deve ser igual a:

A 1
B 2
C 3
D 4

111 Unigranrio 2017 Considere as funções $f(x)=\begin{vmatrix}x & 0 & x\\ 1 & x & 2\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}$ e $g(x)=\begin{vmatrix}x & 11 & -4\\ 10 & 11 & x\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}$. Desta forma, pode-se afirmar que o ponto de interseção das funções f(x) e g(x), é:

A (6, 30)
B (9, –90)
C (9, 72)
D (6, –42)
E (6, 42)

112 Famema 2017 Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 3 & 2 & k \end{pmatrix}$ sendo k um número real, com k < 2, $B = (b_{ij})_{3X2}$, com $b_{ij} = (i - j)^2$, e $C = A \cdot B$. Sabendo que det C = 12, o valor de k^2 é

A 0.
B 9.
C 4.
D 16.
E 1.

113 Feevale 2016 O determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(x) & 0 & 1 \\ 1 & \sec(x) & 0 \\ 0 & 0 & \text{cotg}(x) \end{bmatrix} \text{ é}$$

A 0
B 1
C sen(x)
D cos(x)
E tg(x)

114 Udesc 2016 Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} x & 1 & 4 & x \\ & 2 & & x \end{bmatrix}$ onde $x \in \mathbb{R}$. A quantidade de números inteiros que pertencem ao conjunto solução da inequação $48 \leq \det(A) \leq 116$ é igual a:

A 13
B 22
C 8
D 10
E 6

115 Udesc 2015 Considerando que A é uma matriz quadrada de ordem 3 e inversível, se $\det(3A) = \det(A^2)$ então det(A) é igual a:

A 9
B 0
C 3
D 6
E 27

116 IFSul 2015 Sejam as matrizes A_{2X2}, onde $a_{ij} = \begin{cases} 2^j, \text{ se } i \leq j \\ j^i, \text{ se } i > j \end{cases}$ $B = I_2$, e I é a matriz identidade. Sabendo que A^t é a matriz transposta de A, qual é o determinante de $(A^t + B)$?

A 11
B –11
C 9
D –9

117 Uern 2015 Considere a seguinte matriz $A = (a_{ij})_{3\times3}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \log_2 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & \log_2 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Pela regra de Sarrus, o determinante dessa matriz é

A 8.
B 9.
C 15.
D 24.

118 Udesc 2014 Se A^T e $A^{\;1}$ representam, respectivamente, a transposta e a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ então o determinante da matriz $B = A^T \quad 2A^{-1}$ é igual a:

A $\frac{-111}{2}$

B $\frac{-83}{2}$

C –166

D $\frac{97}{2}$

E 62

119 UEPB 2014 Se *x* e *y* são números reais não nulos e $\begin{vmatrix} x & y & x^2+y^2 \\ x & 0 & x^2 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$, então o valor de 2x + 3y é:

A 10
B 4
C 7
D –5
E 5

120 UEG 2019 Considerando o sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases},$$

verifica se que

A as retas que representam esse sistema são para lelas.
B as retas que representam esse sistema são coin cidentes.
C o determinante da matriz dos coeficientes desse sistema é igual a zero.
D esse sistema não possui solução.
E a solução desse sistema é $\left\{\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$

Resumindo

Matrizes

Uma matriz é um arranjo retangular de números, dispostos em linhas e colunas.

- $A = (a_{ij})_{m \times n}$ indica uma matriz com *m* linhas e *n* colunas, cujos elementos são a_{ij}.
- a_{ij} indica a entrada ou elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz tal que $1 \leq j \leq m$ e $1 \leq j \leq n$

Quando m = n, dizemos que a matriz é quadrada

A matriz identidade de ordem *n*, representada por I_n, é a matriz quadrada de ordem *n* em que a diagonal principal é composta apenas de elementos unitários e os demais elementos são todos nulos

A transposta A^T de uma matriz A é obtida trocando-se ordenadamente as linhas pelas colunas de A.

A adição de duas matrizes A e B, de mesma ordem $m \times n$, resulta na matriz C, de mesmas dimensões, em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para $1 \leq j \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. A adição de matrizes é comutativa [A + B = B + A], associativa [A + (B + C) = (A + B) + C] e não é alterada pela transposição.

A multiplicação de uma matriz A por um escalar λ resulta numa matriz B, de mesmas dimensões que A, em que todo elemento b_{ij} de B é igual a $\lambda \quad a_{ij}$

O produto escalar $\langle u, v\rangle$ de dois vetores *u* e *v* de *n* elementos é igual à soma dos produtos de termos correspondentes de *u* e *v*: $\langle u, v\rangle = u_1 \quad v_1 + u_2 \quad v_2 + ... + u_n \cdot v_n$

A multiplicação de duas matrizes $A = (A_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{p \times q}$ só está definida, nessa ordem, quando n = p, e resulta na matriz $C = (c_{ij})_{m \times q}$ em que cada elemento de C é o produto escalar da respectiva linha de A pela respectiva coluna de B: $c_{ij} = \left\langle nnn_i(A),\ nnn_j(B)\right\rangle$. A multiplicação de matrizes não é comutativa, mas é associativa e também distributiva em relação à adição. Além disso, $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ e $(K \cdot A) \cdot B = K \cdot (A \cdot B) = A \cdot (K \cdot B)$, em que K é um número real.

A inversa de uma matriz quadrada A de ordem *n* é a matriz A^{-1} tal que $A \cdot A^{\ 1} = A^{-1} \cdot A = I_n$. Se A não possuir inversa, dizemos que A é uma matriz singular.

Se A for uma matriz de ordem 2, existe uma regra prática para o cálculo de A^{-1}:

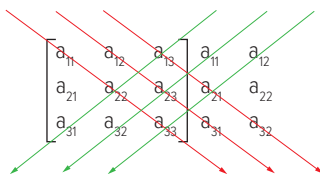
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} Þ\ A^{-1} = \frac{1}{a \times d \quad b \times c} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Se A é uma matriz quadrada de ordem *n*, então $A \cdot X = B$ em que X é um vetor de variáveis e B é um vetor de números reais, é um sistema de *n* equações e *n* incógnitas. A matriz A é chamada de matriz de coeficientes do sistema, X é o vetor de incógnitas e B é o vetor resposta. Se A for uma matriz inversível, a solução do sistema é única e é dada por $X = A^{-1} \cdot B$

Determinantes

Determinante é um número associado a toda matriz quadrada. O determinante de uma matriz A é representado por det(A).

Se A for de ordem 2, o determinante de A é igual à diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária, nessa ordem.

Para calcular o determinante de matrizes de ordem 3, podemos utilizar a regra de Sarrus:

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

O teorema de Laplace diz que, escolhendo uma fila (linha ou coluna) de uma matriz A de ordem *n*, seu determinante é igual à soma dos produtos entre cada elemento da fila e seu respectivo cofator.

Propriedades dos determinantes:

- O determinante de uma matriz é igual ao de sua transposta: $\det(A) = \det(A)^T$
- O determinante de uma matriz é zero se uma fila puder ser escrita como uma combinação linear de duas filas paralelas. Isso inclui o caso em que uma fila é inteira igual a zero e o caso em que duas filas são iguais ou proporcionais
- O determinante de uma matriz triangular ou diagonal é igual ao produto dos elementos de sua diagonal principal. Usando essa propriedade, demonstra-se que o determinante da matriz identidade é igual a 1.
- Se uma matriz B puder ser obtida a partir de uma matriz A por meio da troca de duas de suas filas paralelas, det(B) = –det(A). Na prática, dizemos que trocar duas filas paralelas de uma matriz muda o sinal de seu determinante.

- Ao multiplicar uma fila de uma matriz por um número real *k*, seu determinante fica multiplicado por esse mesmo número. Se a matriz for de ordem n, ao multiplicar toda a matriz por k, seu determinante fica multiplicado por k^n:

$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A)$$

- Se cada elemento de uma fila de uma matriz A puder ser escrito como a soma de duas parcelas, o determinante de A pode ser escrito como a soma de dois determinantes, cada um obtido substituindo a fila escolhida por uma das parcelas, sem alterar o restante da matriz:

$$\begin{vmatrix} a & x_1 + x_2 & b \\ c & y_1 + y_2 & d \\ e & z_1 + z_2 & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x_1 & b \\ c & y_1 & d \\ e & z_1 & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x_2 & b \\ c & y_2 & d \\ e & z_2 & f \end{vmatrix}$$

- O teorema de Binet afirma que, se A e B têm a mesma dimensão, $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$. Por isso, uma matriz é inversível se, e somente se, seu determinante for não nulo.
- O teorema de Jacobi diz que podemos substituir qualquer fila por uma soma entre ela própria e qualquer combinação linear de filas paralelas.

Sistemas lineares

Se existir apenas uma sequência $(x_1, x_2, ..., x_n)$ que satisfaça simultaneamente todas as equações de um sistema linear, então esse sistema é possível e determinado.

Se existirem infinitas sequências $(x_1, x_2, ..., x_n)$ que tornem o sistema verdadeiro, então ele é um sistema possível e indeterminado.

Se não existir nenhuma sequência $(x_1, x_2, ..., x_n)$ que satisfaça todas as equações de um sistema, então ele é um sistema impossível.

Para sistemas com o mesmo número de variáveis e equações, pode-se usar a regra de Cramer, em que:

- Se $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado e o valor de cada variável pode ser dado por:

$$x_i = \frac{D_{x_i}}{D}$$

- Se $D = 0$, o sistema pode ser impossível ou possível e indeterminado e, para decidir corretamente sua classificação, deve-se escalonar o sistema.

Texto complementar

Interpolação polinomial e a matriz de Vandermonde

Depois de muita observação, o proprietário de uma loja chegou à conclusão de que o lucro L(x) diário de seu estabelecimento pode ser calculado em função do número x de produtos vendidos. A função L(x) é da forma $L(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2$ em que a_1, a_2 e a_3 são números reais desconhecidos. São conhecidos, no entanto, três valores assumidos pela função: sabe-se que ao vender duas unidades o prejuízo é de R$ 69,00; ao vender 5 unidades, a loja não tem lucro nem prejuízo; e ao vender 20 unidades, o lucro é de R$ 75,00 Qual é a função L(x)?

Sabemos que a função passa pelos pontos (2, –69), (5, 0) e (20, 75). Então, descobrir os coeficientes a_1, a_2 e a_3 é um problema de interpolação polinomial (descobrir os coeficientes de um polinômio que passa por determinados pontos) e equivale a resolver o sistema que obtemos ao substituir cada um dos valores na equação da função:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 2^2a_3 = -69 \\ a_1 + 5a_2 + 5^2a_3 = 0 \\ a_1 + 20a_2 + 20^2a_3 = 75 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $L(x) = -x^2 + 30x - 125$

Vamos observar a matriz dos coeficientes do sistema: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 5 & 5^2 \\ 1 & 20 & 20^2 \end{pmatrix}$. Uma matriz como esta, em que cada linha é composta de termos de uma progressão geométrica com termo inicial igual a 1, é chamada de matriz de Vandermonde.

Uma matriz de Vandermonde é uma matriz V quadrada, de ordem *n*, em que cada uma de suas linhas é uma progressão geométrica com termo inicial unitário.

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & (x_1)^2 & \cdots & (x_1)^{n-1} \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 & \cdots & (x_2)^{n\ 1} \\ 1 & x_3 & (x_3)^2 & \cdots & (x_3)^{n\ 1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \cdots & (x_n)^{n-1} \end{pmatrix}$$

O determinante da matriz de Vandermonde é o produto de todas as diferenças possíveis entre os termos de expoente unitário. Para convencionar o sinal do produto, as diferenças $(x_j - x_i)$ são tomadas de maneira que $j > i$ (em outras palavras, na hora de listar a diferença entre, por exemplo, x_1 e x_3, fazemos $x_3 - x_1$, pois $3 > 1$). Ou seja:

$$\det(V) = (x_n - x_1) \cdot (x_n - x_2) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_{n-1}) \cdot (x_{n-1} - x_1) \cdot (x_{n-1} - x_2) \cdot \ldots \cdot (x_{n-1} - x_{n-2}) \cdot \ldots \cdot v(x_2 - x_1)$$

Claramente, o determinante de Vandermonde só se anula se há dois pontos x_i e x_j iguais. Como a matriz de Vandermonde aparece na solução de interpolações polinomiais, esse resultado significa que a interpolação é sempre possível se forem usados *n* pontos de abscissas diferentes.

Observando que $V = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 8 & 64 & 512 \end{pmatrix}$ é uma matriz de Vandermonde, seu determinante é:

$$\det(V) = (8 \quad 2) \quad (8 \quad 3) \quad (8 \quad 5) \quad (5 \quad 2) \quad (5 \quad 3) \quad (3 \quad 2) = 6 \quad 5 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 1 = 540$$

Quer saber mais?

Sites

- Para uma rápida revisão das técnicas básicas de resolução e das classificações dos sistemas de equações lineares de segunda ordem:
  Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/sistemas-de-equacoes/>
- Para revisar os conceitos matemáticos das matrizes e suas principais operações:
  Disponível em: <https://www.infoescola.com/matematica/matrizes/>
- Para aprofundar a relação entre os determinantes e as matrizes:
  Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=QHsAqlPYBkE>
- Reveja as regras de Sarrus e de Chió:
  Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/regra-sarrus.htm>; <https://matika.com.br/determinante/regra-de-chio
- Reveja o significado e as aplicações das matrizes inversas:
  Disponível em: <https://matematicabasica.net/matriz-inversa/>
- Veja como obter a matriz inversa pelo método de Gauss:
  Disponível em: <https://luisricardomelo200.wixsite.com/meusite/single-post/2017/06/12/M%C3%A9todo-de-Gauss---Jordan-na-Invers%C3%A3o-de-Matrizes>
- Reveja a técnica do escalonamento de um sistema linear:
  Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/emedio/sistemas/sistemas5.php>
- Reveja a regra de Cramer:
  Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/regra-cramer.htm>

Exercícios complementares

1 **Unicamp 2012** Um supermercado vende dois tipos de cebola, conforme se descreve na tabela abaixo:

Tipo de cebola	Peso unitário aproximado (g)	Raio médio (cm)
Pequena	25	2
Grande	200	4

a) Uma consumidora selecionou cebolas pequenas e grandes, somando 40 unidades, que pesaram 1700 g. Formule um sistema linear que permita encontrar a quantidade de cebolas de cada tipo escolhidas pela consumidora e resolva-o para determinar esses valores.

b) Geralmente, as cebolas são consumidas sem casca. Determine a área de casca correspondente a 600 g de cebolas pequenas, supondo que elas sejam esféricas. Sabendo que 600 g de cebolas grandes possuem 192π cm^2 de área de casca, indique que tipo de cebola fornece o menor desperdício com cascas.

2 Ao fim do ano escolar, Otávio deseja saber se conseguiu a aprovação em todas as disciplinas Para isso, a partir do conhecimento de suas médias (matriz N) e dos pesos (matriz P) de cada bimestre, deve calcular suas médias finais (MF), utilizando uma média ponderada.

$$N = \begin{pmatrix} 5{,}5 & 6{,}5 & 8{,}5 & 7 \\ 6{,}5 & 7 & 8 & 8 \\ 8 & 7 & 7 & 6{,}5 \\ 9 & 10 & 10 & 9 \\ 8 & 8{,}5 & 7{,}5 & 8 \end{pmatrix}$$

(colunas: 1º B, 2º B, 3º B, 4º B; linhas: Matemática, Português, História, Geografia, Ciências)

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(linhas: 1º B, 2º B, 3º B, 4º B)

Como calcular, por exemplo, a média de matemática a partir das informações dadas?

3 **FGV-SP 2013** Um determinado produto deve ser distribuído a partir de 3 fábricas para 4 lojas consumidoras. Seja $C = (c_{ij})_{3\times4}$ a matriz do custo unitário de transporte da fábrica *i* para a loja *j*, com $c_{ij} = (2i - 3j)_2$. Seja $B = (b_{ij})_{3\times4}$ a matriz que representa a quantidade de produtos transportados da fábrica i para a loja j, em milhares de unidades, com $b_{ij} = i + j$.

a) Determine as matrizes $C = (c_{ij})_{3\times4}$ e B^t sendo que B^t é a transposta da matriz $B = (b_{ij})_{3\times4}$.

b) Sendo $D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{4\times1}$ e $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1\times3}$, determine as matrizes $X = (x_{ij})_{3\times1}$ e $Y = (y_{ij})_{1\times3}$ tais que $X = B \cdot D$ e $Y = E \cdot (C \cdot B)$. Em seguida, determine o significado econômico de x_{ij} e de y_{ij}.

4 Os elementos de uma matriz quadrada de terceira ordem $M = (m_{ij})_{3\times3}$ são tais que:

- Na terceira linha os elementos formam uma progressão geométrica de razão 3 da esquerda para a direita.
- Na segunda linha os elementos formam uma progressão aritmética de razão 2 da direita para a esquerda.
- Na primeira linha, cada elemento é igual à soma dos elementos que estão abaixo dele na mesma coluna.

Sabendo que os elementos da primeira linha dessa matriz são $m_{11} = 20$, $m_{12} = 30$ e $m_{13} = 64$ então, sendo m_{ij} o menor dos elementos da matriz M, a diferença $j - i$ é igual a:

A 2
B 1
C 0
D –1
E –2

5 **Fuvest 2013** Sejam α e β números reais com $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $0 < \beta < \pi$ Se o sistema de equações, dado em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} tg\alpha \\ \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

for satisfeito, então $\alpha + \beta$ é igual a

A $\frac{\pi}{3}$
B $-\frac{\pi}{6}$
C 0
D $\frac{\pi}{6}$
E $\frac{\pi}{3}$

6 **UnB 2012** Uma equipe de pesquisa de mercado conduziu, durante vários meses, um levantamento para determinar a preferência dos consumidores em relação a duas marcas de detergentes, marca 1 e marca 2. Verificou-se, inicialmente, que, entre 200 pessoas pesquisadas, 120 usavam a marca 1 e 80, a marca 2. Com base no levantamento inicial, a equipe compilou a seguinte estatística:

- 70% dos usuários da marca 1, em qualquer mês, continuaram a utilizá-la no mês seguinte, e 30% mudaram para a marca 2;
- 80% dos usuários da marca 2, em qualquer mês, continuaram a utilizá-la no mês seguinte, e 20% mudaram para a marca 1.

Esses resultados podem ser expressos pela matriz $P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix}$, em que p_{ij}, $1 \le i, j \le 2$, representa a probabilidade do consumidor da marca j consumir a marca i após um mês, supondo-se que tais probabilidades sejam mantidas constantes de um mês para o outro. Dessa forma, obtém-se a fórmula de recorrência $X_k + 1 = P \cdot X_k$, $k \ge 0$, em que $X_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$ representa

a distribuição, no mercado, ao final do mês k, dos usuários de cada detergente pesquisado; a_k e b_k representam os percentuais de usuários das marcas 1 e 2, respectivamente, no referido período.

Com base nessas informações, julgue os itens subsequentes.

a) A sequência b_1 b_0, b_2 b_1, b_3 b_2 represen ta uma progressão geométrica decrescente de razão 0,5.

b) Se $X_k = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ é tal que $X_{k+1} = X_k$, para algum $k \geq 0$, então α 0,4 e β 0,6.

c) A probabilidade de um consumidor do detergente da marca 1 comprar o da marca 2 ao final do 2º mês é superior a 50%.

7 Considere uma matriz de números reais não nulos $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que seja invertível e considere também um número real λ tal que: $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Escreva uma função y = f(x), para todo $x \neq -\frac{d}{c}$, usando como parâmetros apenas os elementos da matriz M.

b) Mostre que f(x) não é uma função constante.

c) Determine a função inversa $f^{-1}(x)$.

8 **Fuvest 2019** A multiplicação de matrizes permite codificar mensagens. Para tanto, cria-se uma numeração das letras do alfabeto, como na tabela abaixo. (O símbolo * corresponde a um espaço).

A	B	C	D	E	F	G	H
1	2	3	4	5	6	7	8

I	J	K	L	M	N
9	10	11	12	13	14

O	P	Q	R	S	T
15	16	17	18	19	20

U	V	W	X	Y	Z	*
21	22	23	24	25	26	27

Como exemplo, suponha que a mensagem a ser transferida seja **FUVEST**, e que as matrizes codificadora e decodificadora sejam $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, respectivamente A matriz em que se escreve a mensagem é $M = \begin{pmatrix} F & U & V \\ E & S & T \end{pmatrix}$ que, numericamente, corresponde a $M = \begin{pmatrix} 6 & 21 & 22 \\ 5 & 19 & 20 \end{pmatrix}$. Para fazer a codificação da mensagem, é feito o produto de matrizes

$$N = A \cdot M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 21 & 22 \\ 5 & 19 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 101 & 106 \\ 11 & 40 & 42 \end{pmatrix}$$

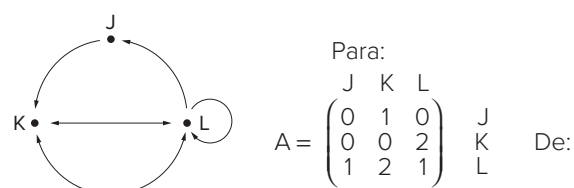
O destinatário, para decifrar a mensagem, deve fazer o produto da matriz decodificadora com a matriz codi ficada recebida: $M = B \cdot N = \begin{pmatrix} 6 & 21 & 22 \\ 5 & 19 & 20 \end{pmatrix}$

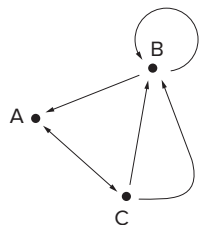
a) Se a matriz codificadora é $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, e a men sagem a ser transmitida é **ESCOLA**, qual é a mensagem codificada que o destinatário recebe?

b) Se a matriz codificadora é $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, e o destinatário recebe a matriz codificada $N = \begin{pmatrix} 33 & 9 & 8 & 48 \\ 47 & 13 & 9 & 75 \end{pmatrix}$, qual foi a mensagem enviada?

c) Nem toda matriz A é uma matriz eficaz para enviar mensagens. Por exemplo, se $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 4 & -11 \end{pmatrix}$ encontre 4 sequências de 4 letras de forma que as respectivas matrizes codificadas sejam sempre iguais a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9 No Campeonato Brasileiro de 2015, cada um dos 20 times jogou contra todos os outros duas vezes, em turno e returno. Cada vitória garantia 3 pontos, cada empate somava 1 ponto e as derrotas não contavam pontos. Ao fim do Campeonato, o São Paulo somou 62 pontos, tendo vencido 10 jogos a mais do que o número de jogos que empatou. Quantas vezes o São Paulo venceu, empatou e perdeu no campeonato?

10 Uma rede é um conjunto finito de pontos conectados entre si. Cada um desses pontos é chamado de **nó** ou **vértice** e cada conexão entre dois vértices é chamada de **aresta** da rede. Um **rede orientada** é uma rede com sentidos de tráfego definidos entre os vértices (as ares tas são direcionadas). Redes podem ser utilizadas para representar muitas situações, desde computadores conectados à Internet até cidades conectadas por estradas. Podemos representar uma rede por uma **matriz de adjacências**, que indica quantos caminhos de comprimento unitário (que passam por apenas uma aresta) existem entre dois vértices. Um exemplo de rede orientada e sua matriz de adjacências corresponden te estão dispostos a seguir

Se A faz a matriz de adjacências de uma rede, o produto $A \cdot A = A^2$ fornece o número de caminhos de comprimento 2 (que percorrem duas arestas) de um vértice a outro. Ou seja: o número de maneiras de chegar de um vértice a outro, tendo um vértice intermediário. Na rede do exemplo, isso acontece por exemplo se formos de L até K, passando por J.

Considere a rede orientada a seguir

a) Escreva a matriz M de adjacências da rede.

b) Encontre a matriz que fornece o número de caminhos de comprimento 2.

c) Interprete o elemento m_{21} na matriz M^2 e liste os caminhos correspondentes.

11 UEPB 2013 A equação $\begin{vmatrix} \log(x-1) & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \log(x-1) & 1 & \log(x-1) \end{vmatrix} = 0$ tem como solução real os valores de x:

A 2 e 10
B 0 e 2
C 3 e 11
D 4 e 11
E 2 e 11

12 UFPR 2012 Considere o polinômio $p(x) = \begin{vmatrix} 3 & x & x \\ 3 & x & -4 \\ x & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

Calcule as raízes de p(x). Justifique sua resposta, deixando claro se utilizou propriedades de determinantes ou algum método para obter as raízes do polinômio.

13 Uece 2014 Se os números reais *x, y, z, m, n, p, u, v e w* formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão q, então o valor do determinante da matriz

$$M = \begin{bmatrix} x & y & z \\ m & n & p \\ u & v & w \end{bmatrix} \text{ é}$$

A 1.
B 0.
C xnw.
D q^3

14 Unicamp 2014 Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & b \\ c & -2 & 0 \end{pmatrix}$, onde a, b e c são números reais.

a) Encontre os valores de *a*, *b* e *c* de modo que $A^T = -A$.

b) Dados a = 1 e b = 1, para que os valores de c e *d* o sistema linear $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ d \end{pmatrix}$ tem infinitas soluções?

15 Insper 2012 Dado um número real *a*, com *a* > 1, define-se a seguinte sequência de matrizes quadradas:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} a^2 & a & 1 \\ 0 & a^2 & a \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix},$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ 0 & a^3 & a^2 & a \\ 0 & 0 & a^3 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{bmatrix}, \ldots$$

Representando o determinante de uma matriz quadrada M por det(M), considere agora a sequência numérica

$$(\det(A_1), \det(A_2), \det(A_3), \det(A_4), \ldots).$$

Essa sequência numérica

A é uma progressão aritmética de razão 2.
B é uma progressão aritmética de razão a^2.
C é uma progressão geométrica de razão a.
D é uma progressão geométrica de razão a^2.
E não é uma progressão aritmética nem uma progressão geométrica.

16 UFSC 2020 (Adapt.) Some os números associados às proposições corretas

01 Se as matrizes $\begin{pmatrix} 3m+2n & \log(10) \\ \sqrt{2} & 3m-2n \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ \frac{\sqrt{8}}{2} & \log\left(\frac{1}{1000}\right) \end{pmatrix}$ são iguais, então $m \cdot n = \frac{5}{3}$.

02 A matriz $\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 5 & -4 & 1 \\ \sqrt{27} & \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$ admite inversa

04 Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = (b_{ij})_{3\times 3}$ tal que $b_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i \geq j \\ 2i - j, \text{ se } i < j \end{cases}$, então B^t $A + I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 6 \\ 7 & 3 & 8 \end{pmatrix}$, sendo I a matriz identidade.

08 O sistema $\begin{cases} x \quad +2y \quad \mp mz \quad 1 \\ x - y - z = 2 \\ -x + 2y - 2z = p \end{cases}$ é indeterminado para m = 2 e p = –1.

16 Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, então $(A \cdot B)^t = A^t \cdot B^t$.

Soma:

FRENTE 2

17 UFPE 2013 Sobre o sistema de equações lineares apresentado abaixo, analise as proposições a seguir, sendo *a* um parâmetro real.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+ay+2z=1 \\ 2x+y+z=3 \end{cases}$$

( ) Se $a = 2$ então o sistema admite infinitas soluções.
( ) O sistema sempre admite solução.
( ) Quando o sistema admite solução, temos que $x = 1$.
( ) Se $a \neq 2$, então o sistema admite uma única solução.
( ) Se $a = 1$, então o sistema admite a solução (1, 2, –1).

18 UEL 2014 Uma padaria possui 3 tipos de padeiros, classificados como A, B e C. Essa padaria é bem conhecida na cidade pela qualidade do pão francês, da baguete e do pão de batata.

Cada padeiro do tipo A produz, diariamente, 30 pães franceses, 100 baguetes e 20 pães de batata

Cada padeiro do tipo B produz, diariamente, 30 pães franceses, 70 baguetes e 20 pães de batata.

Cada padeiro do tipo C produz, diariamente, 90 pães franceses, 30 baguetes e 100 pães de batata.

Quantos padeiros do tipo A, do tipo B e do tipo C são necessários para que em um dia a padaria produza, exatamente, 420 pães franceses, 770 baguetes e 360 pães de batata?

Apresente os cálculos realizados na resolução desta questão.

19 UFSJ 2013 Observe o sistema de variáveis *x*, *y*, *z* e *t*.

$$\begin{cases} x+y+z+t=4 \\ x+y+z=0 \\ x+y+t=2 \\ x+z+t=4 \end{cases}$$

Com base no sistema, é **CORRETO** afirmar que sua solução, considerando *x*, *y*, *z* e *t*, nessa ordem, forma uma progressão

A geométrica decrescente.
B aritmética decrescente.
C geométrica crescente.
D aritmética crescente.

20 PUC RS 2014 Dadas as matrizes $A = [\,1\ 2\ 3\,]$ e $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ o determinante $\det(A \cdot B)$ é igual a

A 18.
B 21.
C 32.
D 126.
E 720.

21 Udesc 2013 Seja X o conjunto formado por todas as matrizes diagonais de ordem 2×2 Analise as proposições:

I. A multiplicação de matrizes pertencentes a X satisfaz a propriedade comutativa
II. Todas as matrizes pertencentes ao conjunto X possuem inversa.
III. A matriz identidade de ordem 2×2 pertence ao conjunto X.
IV. Se A e B são dois elementos pertencentes a X, então $A + B$ também pertence a X.

Assinale a alternativa **correta.**

A Somente a afirmativa II é verdadeira.
B Somente as afirmativas I, III e IV são verdadeiras.
C Somente as afirmativas I e IV são verdadeiras.
D Somente a afirmativa III é verdadeira.
E Todas as afirmativas são verdadeiras.

22 Feevale 2012 Sendo $\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$ o valor de $\begin{vmatrix} 3x+1 & 8 \\ 3y+1 & 8 \end{vmatrix}$ é:

A 6
B 8
C 24
D 128
E 144

23 Udesc 2012 Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} x+1 & x^2 \\ 2 & x \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Se I representa a matriz identidade de ordem dois, então o produto entre todos os valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem a equação $\det(A \cdot B) + \det(B + I) = \det(2B^T)$ é igual a:

A $\frac{4}{3}$
B $\frac{2}{3}$
C $\frac{3}{2}$
D $\frac{5}{2}$
E $\frac{1}{3}$

24 ESPM 2011 Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & x \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ a diferença entre os valores de *x*, tais que $\det(A \cdot B) = 3x$ pode ser igual a:

A 3
B –2
C 5
D 4
E 1

25 FWB 2011 O determinante da matriz $A_{4 \times 4}$ onde os elementos da primeira linha são 4, 3, 5 e 1; os elementos da segunda linha são 0, 3, 0 e 2; os da terceira linha são 2, 7, 0 e 0 e os da quarta linha, 8, 6, 10 e 2,

A –5
B 0
C 5
D 15

26 Se *n* é um número inteiro positivo e X é a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, então o valor do determinante da matriz $Y = X_n$ é

A 2^n
B 3^n
C 6^n
D 9^n

27 Mackenzie Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{3X3}$ tal que

$$\begin{cases} a_{ij} = 10, \text{ se } i = j \\ a_{ij} = 0, \text{ se } i \neq j \end{cases} \text{ e } B = (b_{ij})_{3X3} \text{ tal que } \begin{cases} b_{ij} = 3, \text{ se } i = j \\ b_{ij} = 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

o valor de $\det(A \cdot B)$ é

A 27×10^3
B 9×10^3
C 27×10^2
D 32×10^2
E 27×10^4

28 Udesc Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ seja a matriz B tal que $A^{-1}BA = D$, onde $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ então o determinante de B é igual a:

A 3
B –5
C 2
D 5
E 3

29 UEL Se o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} x & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2x & -1 & 3 \end{bmatrix}$ é nulo, então:

A $x = -3$
B $x = \frac{7}{4}$
C $x = 1$
D $x = 0$
E $x = \frac{7}{4}$

30 Ufla O determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} \text{sen } x & \cos^2 x & \cos x \\ \cos x & 0 & -\text{sen } x \\ \text{sen } x & -\text{sen}^2 x & \cos x \end{pmatrix} \text{ é:}$$

A –1 **B** 1 **C** 0 **D** $\text{sen}^2 x$

31 Unicamp 2017 Sabendo que *m* é um número real, considere o sistema linear nas variáveis *x*, *y* e *z*:

$$\begin{cases} mx + 2z = 4 \\ x + y = z \quad 3 \\ 2x + mz = 4 \end{cases}$$

a) Seja A a matriz dos coeficientes desse sistema. Determine os valores de *m* para os quais a soma dos quadrados dos elementos da matriz A é igual à soma dos elementos da matriz $A_2 = A \cdot A$.
b) Para m = 2, encontre a solução do sistema linear para a qual o produto xyz é mínimo.

32 Um acampamento infantil possui sete piscinas de montar idênticas, mas apenas duas mangueiras diferentes para enchê las

As duas mangueiras juntas são capazes de encher as sete piscinas em duas horas, mas em cada piscina há um ralo que se for deixado aberto fará com que cada piscina demore mais para ficar cheia.
Com o ralo aberto, a torneira de maior vazão levaria uma hora e meia para encher uma única piscina. Já a torneira de menor vazão levaria 6 horas para encher uma piscina com o ralo aberto.
Quanto tempo leva para cada torneira sozinha encher uma única piscina?

33 Unicamp 2015 Seja (a, b, c, d) uma progressão geométrica (PG) de números reais, com razão $q \neq 0$ e $a \neq 0$.

a) Mostre que $x = -\frac{1}{q}$ é uma raiz do polinômio cúbico $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$.
b) Sejam *e* e *f* números reais quaisquer e considere o sistema linear nas variáveis *x* e *y*,

$$\begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

Determine para que valores da razão *q* esse sistema tem solução única.

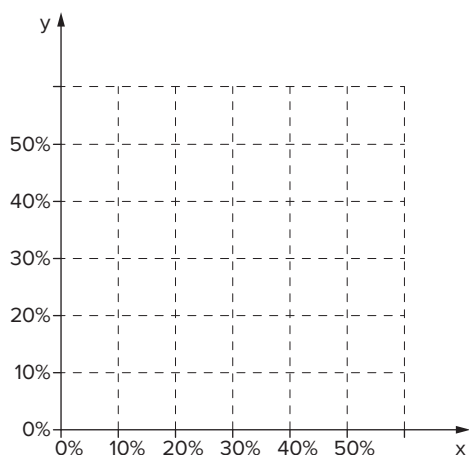
FRENTE 2

34 **Unicamp 2013** Na formulação de fertilizantes, os teores percentuais dos macronutrientes N, P e K, associados respectivamente a nitrogênio, fósforo e potássio, são representados por x, y e z.

a) Os teores de certo fertilizante satisfazem o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 3x + y = z \quad 0{,}20 \\ 2y + z = 0{,}55 \\ z = 0{,}25 \end{cases}$$

Calcule x e y nesse caso.

b) Suponha que para outro fertilizante valem as relações $24\% \leq x + y + z \leq 54\%$, $x \geq 10\%$, $y \geq 20\%$ e $z = 10\%$. Indique no plano cartesiano abaixo a região de teores (x, y) admissíveis para tal fertilizante.

35 **Unicamp 2013** Considere a matriz $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \frac{1}{\alpha} & 1 \end{bmatrix}$ que depende do parâmetro real $\alpha > 0$.

a) Calcule a matriz $(A_\alpha + A_{2\alpha})^2$.

b) Um ponto no plano cartesiano com as coordenadas $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é transformado pela matriz $A\alpha$ em um novo ponto da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A_\alpha \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \alpha y \\ -\frac{1}{\alpha}x - y \end{bmatrix}$$

Calcule o valor de α, sabendo que o sistema $A_\alpha \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$ admite solução.

36 **Unicamp 2018** Sabendo que p e q são números reais, considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & p \\ 1 & p & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ q \end{pmatrix}$

a) Prove que para quaisquer p e q teremos $B^T AB \geq 0$.

b) Determine os valores de p e q para os quais o sistema linear nas variáveis x, y e z, $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$ tem infinitas soluções

37 **Unicamp 2016** Considere o polinômio cúbico $p(x) = x^3 - 3x + a$, onde a é um número real.

a) No caso em que $p(1) = 0$, determine os valores de x para os quais a matriz A abaixo não é invertível

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ a & 3 & x \end{bmatrix}$$

b) Seja b um número real não nulo e i a unidade imaginária, isto é, $i_2 = -1$. Se o número complexo $z = 2 + bi$ é uma raiz de p(x), determine o valor de |z|

38 **Unicamp 2012** Seja dada a matriz $A = \begin{bmatrix} x & 2 & 0 \\ 2 & x & 6 \\ 0 & 6 & 16x \end{bmatrix}$ em que x é um número real.

a) Determine para quais valores de x o determinante de A é positivo

b) Tomando $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ e supondo que, na matriz A, $x = \ \ 2$, calcule $B = A \cdot C$.

39 **AFA 2020** Três amigas, Tereza, Ana e Kely, entram juntas numa loja de chocolates. A tabela abaixo indica a quantidade de caixas e o tipo de trufas que cada uma comprou na loja

	Trufas de morango	Trufas de nozes	Trufas de coco
Tereza	3	7	1
Ana	4	10	1
Kely	1	1	1

Com as compras, Tereza gastou 315 reais e Kely gastou 105 reais.

Analise cada proposição abaixo quanto a ser (V) Verdadeira ou (F) Falsa

( ) O valor da caixa de trufas de coco é o dobro do valor da caixa de trufas de nozes.

( ) Ana gastou o quádruplo do que Kely gastou

( ) As três juntas gastaram menos de 800 reais

Sobre as proposições, tem-se que

A todas são verdadeiras.

B apenas uma é falsa.

C apenas duas são falsas

D todas são falsas

40 **AFA 2020** Considere:

• a matriz $A = \begin{pmatrix} x+1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ x+2 & 1 & x+1 \end{pmatrix}$ cujo determinante é det A = M;

- a matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ cujo determinante é

  $\det B = N$; e $T = 3 - x$

Seja **f** uma função real definida por $f(x) = \log_T M + \log_T N$. Sobre o domínio de **f**, é correto afirmar que

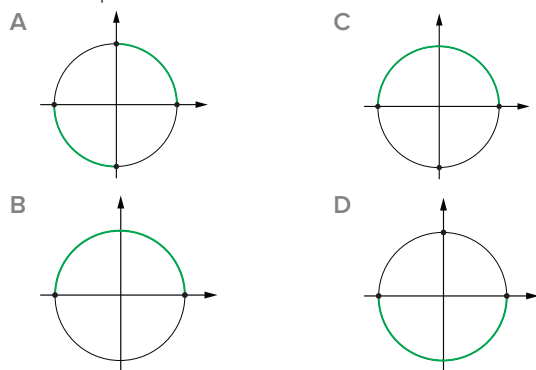
A é o conjunto dos números reais.
B possui apenas elementos negativos.
C não tem o número 2 como elemento.
D possui três elementos que são números naturais.

41 AFA 2018 Sejam a e b números positivos tais que o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ vale 24.

Dessa forma o determinante da matriz $\begin{bmatrix} \sqrt{b} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{a} \end{bmatrix}$ é igual a

A 0 **B** 6 **C** –6 **D** $\sqrt{6}$

42 AFA 2019 Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} \text{sen}\,x & -1 \\ 1 & \text{sen}\,x \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \text{sen}\,x & \text{sen}\,x \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Se o determinante do produto matricial $A \cdot B$ é um número real positivo ou nulo, então os valores de *x*, no ciclo trigonométrico, que satisfazem essa condição estão representados em

43 AFA 2017 Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & \cos x & \text{sen}x \\ \cos x & 1 & 0 \\ \text{sen}x & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \det A$.
Sobre a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$g(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot |\,f(x)\,|$, em que $|f(x)|$ é módulo de f(x), é correto afirmar que

A possui período π.
B seu conjunto imagem é $\left[\ \frac{1}{2}, 0\right]$.
C é par
D é crescente no intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right]$.

44 AFA 2016 Seja A a matriz $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ Sabe-se que

$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{n \text{ vezes}}$

Então, o determinante da matriz $S = A + A^2 + A^3 + ... + A^{11}$ é igual a

A 1 **B** 31 **C** 875 **D** –11

45 AFA 2015 Considere as seguintes simbologias em relação à matriz M:

- M^t é a matriz transposta de M
- M^{-1} é a matriz inversa de M
- det M é o determinante da matriz M

Da equação $(X^t)^{-1} = A \cdot (B + C)$, em que A e (B + C) são matrizes quadradas de ordem *n* e inversíveis, afirma-se que

I. $X = (A^{-1})^t \cdot \left[(B + C)^{-1}\right]^t$

II $\det X = \dfrac{1}{\det A \cdot \det(B + C)}$

III. $X^{-1} = (B^t + C^t) \cdot A^t$

São corretas

A apenas I e II.
B apenas II e III.
C apenas I e III.
D I, II e III.

46 AFA 2013 Considere as matrizes A e B, inversíveis e de ordem *n*, bem como a matriz identidade I. Sabendo que det(A) = 5 e $\det\left(I \cdot B^{-1} \cdot A\right) = \frac{1}{3}$, então o $\det\left[3 \cdot \left(B^{-1} \cdot A^{-1}\right)^t\right]$ é igual a

A $5 \cdot 3^n$ **B** $\frac{3^{n-1}}{5^2}$ **C** $\frac{3^n}{15}$ **D** $3^{n\quad 1}$

47 AFA 2012 Uma montadora de automóveis prepara três modelos de carros, a saber:

MODELO	1	2	3
CILINDRADA (em litro)	1.0	1.4	1.8

Essa montadora divulgou a matriz abaixo em que cada termo a_{ij} representa a distância percorrida, em km, pelo modelo i, com um litro de combustível, à veloci dade 10j km/h

$$\begin{bmatrix} 6 & 7{,}6 & 7{,}2 & 8{,}9 & 8{,}2 & 11 & 10 & 12 & 11{,}8 \\ 5 & 7{,}5 & 7 & 8{,}5 & 8 & 10{,}5 & 9{,}5 & 11{,}5 & 11 \\ 3 & 2{,}7 & 5{,}9 & 5{,}5 & 8{,}1 & 7{,}4 & 9{,}8 & 9{,}4 & 13{,}1 \end{bmatrix}$$

Com base nisso, é correto dizer que

A para motoristas que somente trafegam a 30 km/h, o carro 1.4 é o mais econômico.
B se durante um mesmo período de tempo um carro 1.4 e um 1.8 trafegam a 50 km/h, o 1.4 será o mais econômico.
C para motoristas que somente trafegam a velocidade de 70 km/h, o carro 1.8 é o de maior consumo.
D para motoristas que somente trafegam a 80 km/h, o carro 1.0 é o mais econômico.

48 **AFA 2012** Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} k \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Em relação à equação matricial $A \cdot X = B$, é correto afirmar que

A é impossível para $k = \frac{7}{2}$

B admite solução única para $k = \frac{7}{2}$

C toda solução satisfaz à condição $x_1 + x_2 = 4$

D admite a terna ordenada $\left(2,\ 1,\ \frac{1}{2}\right)$ como solução.

49 **Uece 2014** Uma matriz quadrada $P = (a_{ij})$ é simétrica quando $a_{ij} = a_{ji}$. Por exemplo, a matriz $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica. Se a matriz $M = \begin{bmatrix} x+y & x-y & xy \\ 1 & y \quad x & 2y \\ 6 & x+1 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica, pode-se afirmar corretamente que o determinante de M é igual a

A 1

B 2

C 1

D 2

50 **FGV-SP 2011** O sistema linear nas incógnitas *x*, *y* e *z*

$$\begin{cases} x - y = 10 + z \\ y \quad z = 5 \quad x \\ z + x = 7 + y \end{cases}$$

pode ser escrito na forma matricial $A \cdot X = B$, em que:

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

Nessas condições, o determinante da matriz A é igual a:

A 5

B 4

C 3

D 2

E 1

51 **Unioeste 2019** José precisa pesar três peças de metal A, B e C. Mas, a balança que ele dispõe não é precisa para pesos menores do que 1 kg. José decide então pesar as peças de duas em duas. A e B juntas pesam 1600 g, B e C juntas pesam 1400 g e A e C juntas pesam 1700 g.

Nestas condições, qual o peso da peça mais leve?

A 550 g.

B 650 g.

C 700 g.

D 950 g.

E 1400 g.

52 **UFJF/Pism 2018** Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x \quad 4y \quad = 0 \end{cases}$$

É **CORRETO** afirmar que:

A O sistema é possível e indeterminado.

B $x = 4$, $y = 1$ e $z = 0$ é a única solução do sistema

C $x = -4$, $y = 1$ e $z = 1$ é a única solução do sistema.

D O sistema é impossível.

E $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ é a única solução do sistema.

53 **Enem PPL 2018** Visando atingir metas econômicas previamente estabelecidas, é comum no final do mês algumas lojas colocarem certos produtos em promoção. Uma determinada loja de departamentos colocou em oferta os seguintes produtos: televisão, sofá e estante. Na compra da televisão mais o sofá, o cliente pagaria R$ 3.800,00. Se ele levasse o sofá mais a estante, pagaria R$ 3.400,00. A televisão mais a estante sairiam por R$ 4.200,00. Um cliente resolveu levar duas televisões e um sofá que estavam na promoção, conseguindo ainda mais 5% de desconto pelo pagamento à vista

O valor total, em real, pago pelo cliente foi de

A 3.610,00.

B 5.035,00.

C 5 415,00

D 5.795,00.

E 6 100,00

54 **ESPM-SP 2018** André comprou uma calça, três camisetas e duas cuecas por R$ 420,00. Se tivesse comprado duas calças e uma cueca teria gasto R$ 285,00. Se ele tivesse comprado apenas uma peça de cada tipo, teria pago a importância de:

A R$ 195,00

B R$ 200,00

C R$ 215,00

D R$ 220,00

E R$ 235,00

55 **Unioeste 2018** Existem dois valores reais, α_1 e α_2, que α pode assumir de modo que a equação matricial $\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ admita solução não trivial Assim, é CORRETO afirmar que

A $\alpha_1 \in \mathbb{Z}$, $\alpha_2 \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = 20$.

B $\alpha_1 \in \mathbb{Z}$, $\alpha_2 \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = 100$.

C $\alpha_1 \notin \mathbb{Z}$, $\alpha_2 \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = 20$.

D $\alpha_1 \in \mathbb{Z}$, $\alpha_2 \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = 16$.

E $\alpha_1 \in \mathbb{Z}$, $\alpha_2 \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = 84$.

56 Famema 2017 Uma pessoa comprou 2 pacotes de algodão, 5 rolos de gaze e 3 rolos de esparadrapo. Na farmácia onde realizou a compra, o preço de um pacote de algodão mais um rolo de gaze e mais um rolo de esparadrapo é R$ 16,00. Um rolo de esparadrapo custa R$ 2,00 a menos que um pacote de algodão e R$ 1,00 a mais que um rolo de gaze. Sabendo que essa pessoa pagou a compra com uma nota de R$ 50,00, o valor do troco recebido foi

A R$ 0,50.
B R$ 1,00.
C R$ 1,50.
D R$ 2,50.
E R$ 2,00.

57 PUC-PR 2017 Clarice e suas colegas de Engenharia resolveram organizar uma festa junina para arrecadar fundos para a formatura. Com esse intuito, montaram três quiosques, nos quais eram vendidos pipoca, cachorro quente e quentão. Ao término da festa, foi feito o levantamento das vendas nos três quiosques:

- No primeiro, foram vendidos 10 sacos de pipoca, 20 cachorros quentes e 10 copos de quentão.
- No segundo, foram vendidos 50 sacos de pipoca, 40 cachorros quentes e 20 copos de quentão.
- No terceiro, foram vendidos 20 sacos de pipoca, 10 cachorros quentes e 30 copos de quentão.
- Os três quiosques lucraram R$ 150,00, R$ 450,00 e R$ 250,00, respectivamente.

Assinale a alternativa que apresenta o preço de cada saco de pipoca, cachorro quente e copo de quentão, respectivamente.

A R$ 3,00, R$ 2,00 e R$ 4,00.
B R$ 3,00, R$ 4,00 e R$ 5,00.
C R$ 3,50, R$ 4,50 e R$ 5,50.
D R$ 1,50, R$ 2,50 e R$ 3,50.
E R$ 5,00, R$ 3,00 e R$ 4,00.

58 FGV-SP 2017 Chama-se solução trivial de um sistema linear aquela em que todos os valores das incógnitas são nulos.

O sistema linear, nas incógnitas *x*, *y* e *z*:

$$\begin{cases} x \quad 2y + z = 0 \\ -x - y + 5z = 0 \\ -5x + y + mz = 0 \end{cases}$$

A é impossível para qualquer valor de *m*.
B admite apenas a solução trivial para qualquer valor de *m*.
C admite soluções diferentes da solução trivial para m = 13.
D admite soluções diferentes da solução trivial para m = 10.
E não admite a solução trivial para $m \neq 13$.

59 Uece 2017 O produto dos valores dos números reais λ para os quais a igualdade entre pontos do $\mathbb{R}^2$, $(2x + y, x - y) = (\lambda x, \lambda y)$ ocorre para algum $(x, y) \neq (0, 0)$ é igual a

A –2.
B –3.
C –4.
D –5.

60 Efomm 2017 Dado o sistema linear abaixo, analise as seguintes afirmativas:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 0 & 16 & b \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ a \\ 3 \end{bmatrix}$$

I. Se $b \neq -12$, o sistema linear terá uma única solução.
II. Se $a = b = -12$, o sistema linear terá infinitas soluções.
III. Se $b = -12$, o sistema será impossível.

A Todas as afirmativas são corretas.
B Todas as afirmativas são incorretas.
C Somente as afirmativas I e III são corretas.
D Somente as afirmativas I e II são corretas.
E Somente as afirmativas II e III são corretas.

61 UFJF/Pism 3 2017 Sobre um sistema: $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, é CORRETO afirmar que:

A Se $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ e $\frac{c}{b} = \frac{f}{e}$, o sistema possui uma única solução
B Se $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ e $\frac{c}{b} \neq \frac{f}{e}$, o sistema não possui solução.
C Se $\frac{a}{b} \neq \frac{d}{e}$, o sistema possui infinitas soluções
D Se $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ e $\frac{a}{b} \neq \frac{d}{e}$, o sistema não possui solução.
E Se $\frac{a}{b} \neq \frac{d}{e}$, o sistema não possui solução.

62 Udesc 2017 Um supermercado publicou três anúncios:

- Anúncio 1: 2 facas, 2 garfos e 3 colheres por 27 reais;
- Anúncio 2: 3 facas, 4 garfos e 4 colheres por 44 reais;
- Anúncio 3: 4 facas, 5 garfos e 6 colheres por 59 reais.

Supondo que o preço unitário de cada tipo de talher é o mesmo nos três anúncios, sendo *x*, *y* e *z* o preço de cada faca, garfo e colher, respectivamente, tem-se que:

A $x < y < z$
B $z < x < y$
C $y < z < x$
D $z < y = x$
E $y < x = z$

63 UEG 2017 Cinco jovens, que representaremos por a, b, c, d, e, foram a um restaurante e observaram que o consumo de cada um obedecia ao seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a + d = 20 \\ b + c \quad e = 30 \\ a \quad c = 15 \\ e - a = 10 \\ c + e = 25 \end{cases}$$

O total da conta nesse restaurante foi de

A R$ 50,00.
B R$ 80,00.
C R$ 100,00.
D R$ 120,00.
E R$ 135,00.

64 Unioeste 2017 Sobre o sistema de equações lineares $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 3x + \beta y = 7 \end{cases}$, é CORRETO afirmar que

A possui uma única solução, qualquer que seja β.
B possui infinitas soluções, qualquer que seja β.
C possui ao menos uma solução, qualquer que seja β.
D só tem solução se $\beta = 5$.
E é impossível se $\beta \neq \ 5$.

65 PUC-Rio 2016 Considere o sistema $\begin{cases} 2x + ay = 3 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ e assinale a alternativa correta:

A O sistema tem solução para todo $a \in \mathbb{R}$.
B O sistema tem exatamente uma solução para $a = 2$.
C O sistema tem infinitas soluções para $a = 1$.
D O sistema tem solução para $a = 4$.
E O sistema tem exatamente três soluções para $a = \ 1$.

66 AFA 2011 Sendo $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & a \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & b \\ -1 & 0 & 2 & c \end{vmatrix} = 70$, o valor de $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & a \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & b \\ 7 & -1 & 0 & b+3c \end{vmatrix}$ é

A 280
B 0
C -70
D -210

67 ITA 2018 Sejam $x_1, ..., x_5$ e $y_1, ..., y_5$ números reais arbitrários e $A = (a_{ij})$uma matriz 5×5 definida por $a_{ij} = x_1 + y_1$, $1 \leq i, j \leq 5$. Se r é a característica da matriz A, então o maior valor possível de r é

A 1.
B 2.
C 3.
D 4.
E 5.

68 ITA 2018 Sejam A e B matrizes quadradas $n \times n$ tais que $A + B = A \cdot B$ e I_n a matriz identidade $n \times n$. Das afirmações:

I. $I_n - B$ é inversível;
II. $I_n - A$ é inversível;
III. $A \cdot B = B \cdot A$

é(são) verdadeira(s)

A Somente I.
B Somente II.
C Somente III.
D Somente I e II.
E Todas.

69 ITA 2018 Considere a matriz $\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

Se o polinômio p(x) é dado por p(x) = det A, então o produto das raízes de p(x) é

A $\frac{1}{2}$
B $\frac{1}{3}$
C $\frac{1}{5}$
D $\frac{1}{7}$
E $\frac{1}{11}$

70 ITA 2018 Uma progressão aritmética $(a_1, a_2, ..., a_n)$ satisfaz a propriedade: para cada $n \in \mathbb{N}$, a soma da progressão é igual a $2n^2 + 5n$. Nessas condições, o determinante da matriz $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 + 2 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$ é

A -96
B -85
C 63
D 99
E 115

71 ITA 2017 Sejam $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Considere $A = P^{-1} \cdot D \cdot P$. O valor de $\det(A^2 + A)$ é

A 144.
B 188.
C 240.
D 324.
E 360.

72 ITA 2016 Se $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, então $M \cdot N^T - M^{\ 1} \cdot N$ é igual a

A $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

E $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

73 ITA 2016 Seja A a matriz de ordem 3 X 2, dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Determine todas as matrizes B tais que $B \cdot A = I_2$.

b) Existe uma matriz B com B A = I_2 que satisfaça $B \cdot B_T = I_2$? Se sim, dê um exemplo de uma dessas matrizes

74 ITA 2015 Considere a matriz $M = (m_{ij})_{22}$ tal que $m_{ij} = j \quad i + 1$, com i, j = 1, 2. Sabendo se que

$$\det\left(\sum_{k=1}^{n} M^k \quad n\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 252,$$

então o valor de *n* é igual a

A 4.

B 5.

C 6.

D 7.

E 8.

75 ITA 2014 Considere as seguintes afirmações sobre as matrizes quadradas A e B de ordem *n*, com A inversí vel e B antissimétrica:

I. Se o produto AB for inversível, então *n* é par;

II. Se o produto AB não for inversível, então *n* é ímpar;

III. Se B for inversível, então *n* é par.

Destas afirmações, é(são) verdadeira(s)

A apenas I.

B apenas I e II.

C apenas I e III.

D apenas II e III

E todas.

76 ITA 2014 Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & -x & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x+1 & x \\ y & 2 & y \\ z+3 & z \end{bmatrix}$ matrizes reais tais que o produto A B é uma matriz antissimétrica. Das afirmações abaixo:

I. $B \cdot A$ é antissimétrica;

II. $B \cdot A$ não é inversível;

III. O sistema $(B \cdot A) \cdot X = 0$, com $X^t = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$, admite infinitas soluções.

é(são) verdadeira(s)

A apenas I e II.

B apenas II e III.

C apenas I.

D apenas II.

E apenas III.

77 ITA 2014 Considere a equação $A(t) \cdot X = B(t)$, $t \in \mathbb{R}$, em que $A(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} & -e^{2t} & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $B(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$.

Sabendo que det A(t) = 1 e t ≠ 0, os valores de *x*, *y* e *z* são, respectivamente,

A $2\sqrt{2}$, 0, $-3\sqrt{2}$

B $-2\sqrt{2}$, 0, $-3\sqrt{2}$

C 0, $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$

D 0, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$

E $2\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, 0

78 ITA 2014 Seja M uma matriz quadrada de ordem 3, inversível, que satisfaz a igualdade

$$\det\left(2M^2\right) - \det\left(\sqrt[3]{2}M^3\right) = \frac{2}{9}\det\left(3M\right).$$

Então, um valor possível para o determinante da in versa de M é

A $\frac{1}{3}$

B $\frac{1}{2}$

C $\frac{2}{3}$

D $\frac{4}{5}$

E $\frac{5}{4}$

79 ITA 2013 Considere $A \in M_{5\times5}(\mathbb{R})$ com $\det(A) = \sqrt{6}$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se $\det\left(\alpha A^t A A^t\right) = \sqrt{6}\alpha^2$, o valor de α é

A $\frac{1}{6}$

B $\frac{\sqrt{6}}{6}$

C $\frac{\sqrt[3]{36}}{6}$

D 1

E $\sqrt{216}$

80 ITA 2012 Considere a matriz quadrada A em que os termos da diagonal principal são $1+x_1, 1+x_2, ..., 1+x_n$ e todos os outros termos são iguais a 1 Sabe-se que $(x_1, x_2, ..., x_n)$ é uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $\frac{1}{2}$ e a razão é 4. Determine a ordem da matriz A para que o seu determinante seja igual a 256.

81 **ITA 2011** Considere as afirmações abaixo:

I. Se M é uma matriz quadrada de ordem n > 1, não nula e não inversível, então existe matriz não nula N, de mesma ordem, tal que MN é matriz nula.

II. Se M é uma matriz quadrada inversível de ordem *n* tal que det $(M^2 - M) = 0$, então existe matriz não nula X, de ordem n X 1, tal que MX = X.

III. A matriz $\begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen }\theta \\ \dfrac{\text{tg }\theta}{\sec\theta} & 1-2\,\text{sen}^2\dfrac{\theta}{2} \end{bmatrix}$ é inversível, $\forall\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Destas, é(são) verdadeira(s)

A apenas II.
B apenas I e II.
C apenas I e III.
D apenas II e III.
E todas.

82 **ITA 2012** Seja *n* um número natural. Sabendo que o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} n & \log_2 2 & \log_2 \dfrac{1}{2} \\ n+5 & \log_3 3^n & \log_3 243 \\ -5 & \log_5 \dfrac{1}{125} & -\log_5 25 \end{bmatrix}$$

é igual a 9, determine *n* e também a soma dos elementos da primeira coluna da matriz inversa A^{-1}.

83 **ITA 2011** Determine todas as matrizes $M \in M_{22}(\mathbb{R})$ tais que MN = NM, $\in N \in M_{22}(\mathbb{R})$.

84 **ITA** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{bmatrix} \in M_{3x3}(\mathbb{R}),$$

em que $a_4 = 10$, det A = –1000 e a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 e a_6 formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão d > 0. Pode-se afirmar que $\dfrac{a_1}{d}$ é igual a

A 4
B 3
C 2
D 1
E 1

85 **ITA** Sobre os elementos da matriz

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{4\times4}(\mathbb{R}).$$

Sabe-se que (x_1, x_2, x_3, x_4) e (y_1, y_2, y_3, y_4) são duas pro gressões geométricas de razão 3 e 4 e de soma 80 e 255, respectivamente. Então, det (A^{-1}) e o elemento $(A^{-1})_{23}$ valem, respectivamente,

A $\dfrac{1}{72}$ e 12

B $\dfrac{1}{72}$ e 12

C $\dfrac{1}{72}$ e 12

D $-\dfrac{1}{72}$ e $\dfrac{1}{12}$

E $\dfrac{1}{72}$ e $\dfrac{1}{12}$

86 **ITA** Considere as matrizes $A \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$ e X, $B \in M^{4\times1}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & b & 1 \\ b & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -a & 2 & b & 1 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}.$$

a) Encontre todos os valores reais de *a* e *b* tais que a equação matricial AX = B tenha solução única.

b) Se $a_2 - b_2 = 0$, $a \neq 0$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^t$, encontre X tal que AX = B.

87 **ITA** Dados $A \in M_{32}(\mathbb{R})$ e $b \in M_{31}(\mathbb{R})$, dizemos que $X_0 \in M_{21}(\mathbb{R})$ é a melhor aproximação quadrática do sis tema AX = b quando $\sqrt{(AX_0 \quad b)^t(AX_0 \quad b)}$ assume o menor valor possível Então, dado o sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

a sua melhor aproximação quadrática é

A $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

E $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

88 **ITA** Seja $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica e não nula, cujos elementos são tais que a_{11}, a_{12} e a_{22} formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$ e $trA = 5a_{11}$ Sabendo-se que o sistema AX = X admite solução não nula $X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, pode-se afirmar que $a_{11}^2 + q^2$ é igual a

A $\frac{101}{25}$

B $\frac{121}{25}$

C 5

D $\frac{49}{9}$

E $\frac{25}{4}$

89 **ITA** Sejam $A, B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Mostre as propriedades abaixo:

a) Se AX é matriz coluna nula, para todo $X \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$, então A é a matriz nula.

b) Se A e B são não nulas e tais que AB é matriz nula, então det A = det B = 0.

90 **ITA** Considere o sistema Ax = b, em que $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & k & 6 \\ -1 & 3 & k-3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $k \in \mathbb{R}$

Sendo T a soma de todos os valores de *k* que tornam o sistema impossível e sendo S a soma de todos os valores de *k* que tornam o sistema possível e indeterminado, então o valor de T – S é

A –4.

B –3.

C 0.

D 1.

E 4.

91 **ITA** Sejam A e C matrizes n × n inversíveis tais que $\det\left(I + C^{-1}A\right) = \frac{1}{3}$ e det A = 5 Sabendo-se que $B = 3(A^{-1} + C^{-1})^t$, então o determinante de B é igual a

A 3^n

B $2 \cdot \frac{3^n}{5^2}$

C $\frac{1}{5}$

D $\frac{3^{n-1}}{5}$

E $5 \cdot 3^{n-1}$

92 **ITA** Uma matriz real quadrada A é ortogonal se A é inversível e $A^{-1} = A^t$. Determine todas as matrizes 2 × 2 que são simétricas e ortogonais, expressando-as, quando for o caso, em termos de seus elementos que estão fora da diagonal principal.

93 **IME** Os elementos da matriz dos coeficientes de um sistema de quatro equações lineares e quatro incógnitas (x, y, z e w) são função de quatro constantes a, b, c e d. Determine as relações entre a, b, c e d para que o referido sistema admita uma solução não trivial, sabendo que CD = DC, onde $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$.

94 **IME** Assinale a opção correspondente ao valor da soma das raízes reais da equação:

$$\begin{vmatrix} \log x & \log x & \log x \\ \log 6x & \log 3x & \cos x \\ 1 & 1 & \log^2 x \end{vmatrix} = 0$$

A 1,0

B π

C 10,0

D 11,0

E 11,1

95 **IME** Sejam **L**, **D** e **U** matrizes quadradas de ordem *n* cujos elementos da i-ésima linha e j ésima coluna l_{i+j}, d_{i+j} e u_{i+j}, respectivamente, são dados por:

$$l_{i,j} = \begin{cases} \frac{i^2}{i \cdot j}, \text{ para } i \geq j \\ 0, \text{ para } i < j \end{cases}, \quad d_{i,j} = \begin{cases} \frac{i+1}{i}, \text{ para } i = j \\ 0, \text{ para } i \neq j \end{cases} \quad \text{e}$$

$$u_{i,j} = \begin{cases} \frac{2i}{i+j}, \text{ para } i \leq j \\ 0, \text{ para } i > j \end{cases}$$

O valor do determinante de **A** = **LDU** é igual a:

A 0

B 1

C *n*

D n + 1

E $\frac{n+1}{n}$

96 **IME 2018** Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} k & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, com *k* real

Determine a faixa de valores de *k* para que exista uma matriz de números reais P tal que as condições abaixo sejam atendidas simultaneamente:

A $A^TP + PA + I$ em que A^T é a transposta da matriz A e I é a matriz identidade;

B P seja simétrica;

C $p_{11} > 0$, em que p_{11} é o elemento da linha 1 e coluna 1 de P; e

D $|P| > 0$, em que $|P|$ é o determinante da matriz P.

97 IME 2020 Uma matriz A é semelhante a uma matriz B se e somente se existe uma matriz invertível P tal que $A = PBP^{-1}$.

a) Se A e B forem semelhantes, mostre que det(A) = = det(B).

b) Dadas $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, verifique se essas matrizes são semelhantes.

98 IME 2019 Calcule o valor do determinante:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ \log 81 & \log 900 & \log 300 \\ (\log 9)^2 & 2+4\log 3+2(\log 3)^2 & (\log 3+2)^2 \end{vmatrix}$$

A 1
B 2
C 4
D 8
E 16

99 IME 2018 Sejam x_1, x_2, x_3 e x_4 os quatro primeiros termos de uma PA com $x_1 = x$ e razão r, com $x, r \in \mathbb{R}$.

O determinante de $\begin{bmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_2 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ é:

A 0
B $x_4 \cdot r$
C $x_4 \cdot r_3$
D $x \cdot r_4$
E $x \cdot r_3$

100 IME 2018 Seja P(x) o polinômio de menor grau que passa pelos pontos $A(2, -4+3\sqrt{3})$, $B(1, 3\sqrt{2}-2)$, $C(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ e $D(\sqrt{3}, \sqrt{2})$. O resto da divisão de P(x) por (x – 3) é:

A $8\sqrt{3} \quad 5\sqrt{2} \quad 6$

B $6\sqrt{3} \quad 4\sqrt{2} \quad 1$

C $9\sqrt{3} \quad 8\sqrt{2} \quad 2$

D $4\sqrt{3} - 10\sqrt{2} - 3$

E $4\sqrt{3} \quad \sqrt{2} \quad 2$

101 IME 2015 Dada a matriz A, a soma do módulo dos valores de *x* que tornam o determinante da matriz A nulo é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2x & 0 & 0 \\ x^2 & 1 & x \quad 1 & 2 \\ 1 & x+4 & 0 & 0 \\ x & 1 & 1 & x \quad 2 \end{bmatrix}$$

A 7
B 8
C 9
D 10
E 11

102 IME 2017 Seja M uma matriz real 2 × 2. Defina uma função f na qual cada elemento da matriz se desloca para a posição seguinte no sentido horário, ou seja, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, implica que $f(M) = \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$. Encontre todas as matrizes simétricas 2 × 2 reais na qual $M_2 = f(M)$.

103 IME 2016 Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$. O maior valor de a, com $a \neq 1$, que satisfaz $A^{24} = I$ é:

A $\dfrac{1}{2}$

B $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

D $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} \quad 1\right)$

E $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$

Observação: I é a matriz identidade 2 × 2.

104 IME 2017 Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ a-2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ com $a \in \mathbb{R}$ Sabe-se que $\det(A^2 \quad 2A + I) + 16$. A soma dos valores de **a** que satisfazem essa condição é:

A 0
B 1
C 2
D 3
E 4

Obs: det(X) denota o determinante da matriz X

105 IME 2016 Define-se A como a matriz 2016 × 2016, cujos elementos satisfazem a igualdade:

$$a_{i,j} = \binom{i+j-2}{j-1}, \ i, j \in \{1, 2, ..., 2016\}.$$

Calcule o determinante de A.

106 IME 2014 Calcule o determinante abaixo, no qual

$\omega = \text{cis}\dfrac{2\pi}{3}$ e $i = \sqrt{-1}$

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & 0 & i \\ i & 1 & -i & \omega^2 \\ 1 \quad i & \omega & 1 \quad i & 1 \\ 0 & \omega & 1 & i \end{vmatrix}$$

107 IME 2013 Seja Δ o determinante da matriz

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & x^2 & x^3 \\ x & x & 1 \end{bmatrix}$. O número de possíveis valores de *x* reais que anulam Δ é:

A 0
B 1
C 2
D 3
E 4

108 IME 2013 Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Seja a matriz $B = \sum_{k=1}^{n} A^k$, com *k* e *n* números inteiros. Determine a soma, em função de *n*, dos quatro elementos da matriz B.

109 IME 2013 São dadas duas matrizes A e B tais que

$AB = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} x & 14 \\ 14 & y \end{bmatrix}$, com *x* e *y* reais e $x > y$.

Determine:

a) o(s) valor(es) de *x* e *y*;
b) as matrizes A e B que satisfazem as equações apresentadas.

110 IME 2013 Considere a seguinte definição:

"Dois pontos P e Q, de coordenadas (x_p, y_p) e (x_q, y_q), respectivamente, possuem coordenadas em comum se e somente se $x_p = x_q$ ou $y_p = y_q$."

Dado o conjunto S = {(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)}. Determine quantas funções bijetoras $f: S \rightarrow S$ existem, tais que para todos os pontos P e Q pertencentes ao conjunto S, f(P) e f(Q) possuem coordenadas em comum se, e somente se, P e Q pos suem coordenadas em comum.

111 IME 2012 São dadas as matrizes quadradas inversíveis A, B e C, de ordem 3. Sabe-se que o determinante de C vale (4 – x), onde *x* é um número real, o determinante da matriz inversa B vale $-\frac{1}{3}$ e que $(CA^t)^t = P^{-1}BP$, onde P é uma matriz inversível. Sabendo que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, determine os possíveis valores de *x*.

Observação: (M)t é a matriz transposta de M.

A –1 e 3
B 1 e 3
C 2 e 3
D 1 e 3
E –2 e –3

112 IME 2012 Calcule as raízes de f(x) em função de a, b e c, sendo a, b, c e $x \in \mathbb{R}$ (real) e $f(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}$.

113 IME 2012 Os nove elementos de uma matriz M quadrada de ordem 3 são preenchidos aleatoriamente com os números 1 ou –1, com a mesma probabilidade de ocorrência. Determine:

a) o maior valor possível para o determinante de M;
b) a probabilidade de que o determinante de M tenha este valor máximo.

114 IME 2011 Sejam $x_1, \quad , x_n$ os *n* primeiros termos de uma progressão aritmética O primeiro termo e a razão desta progressão são os números reais x_1 e r, respectivamente O determinante $\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_2 & \cdots & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$ é:

A $x_1^n \cdot r^n$
B $x_1^n \cdot r$
C $x_1^n \cdot r^{n-1}$
D $x_1 \cdot r^n$
E $x_1 \cdot r^{n \quad 1}$

115 IME 2011 Considere o sistema de equações lineares representado abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ 7 \\ 9 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Os valores de *a* e *d* são, respectivamente:

A 1 e 2
B 2 e 3
C 3 e 2
D 2 e 2
E 3 e 1

116 IME 2011 Determine o valor da excentricidade da cônica dada pela equação $x^2 - 10\sqrt{3}xy + 11y^2 + 16 = 0$.

117 IME Considere o determinante de uma matriz de ordem n definido por:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Sabendo que $\Delta_1 = 1$, o valor de Δ_{10} é

A 59 049
B 48 725
C 29 524
D 9 841
E 364

118 IME Demonstre que a matriz

$$\begin{pmatrix} y^2+z^2 & xy & xz \\ xy & x^2+z^2 & yz \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}$$, onde x, y, z ∈ ℕ, pode ser

escrita como o quadrado de uma matriz simétrica, com traço igual a zero, cujos elementos pertencem ao conjunto dos números naturais.
Obs: Traço de uma matriz é a soma dos elementos de sua diagonal principal.

119 ITA 2019 Considere as seguintes afirmações a respeito de matrizes A de ordem n × n inversíveis, tais que os seus elementos e os de sua inversa sejam todos números inteiros:

I. |det(A)| = 1
II. AT = A ^{1}
III. A + A ^{1} é uma matriz diagonal.

É(são) sempre VERDADEIRA(S)

A apenas I.
B apenas III.
C apenas I e II.
D apenas I e III.
E todas.

120 IME Seja o sistema $\begin{cases} tg(x) \cdot tg(y - z) = a \\ tg(y) \cdot tg(z \quad x) = b \\ tg(z) \cdot tg(x \quad y) = c \end{cases}$, onde a, b, c, x, y, z ∈ ℝ. Determine as condições que a, b e c devem satisfazer para que o sistema admita pelo menos uma solução.

photomatz/ Shutterstock.com

FRENTE 3

CAPÍTULO

6

Áreas das figuras planas

A necessidade de medir grandes extensões de terra talvez tenha sido o maior incentivo ao estudo da Geometria na Antiguidade. No Antigo Egito, por exemplo, nas cheias do Rio Nilo, a correnteza levava consigo todas as marcações dos limites entre duas propriedades, tornando necessário recalculá-los e demarcá-los novamente a cada ano.

Atualmente, há profissionais que utilizam a Geometria diariamente, seja em ambientes rurais ou urbanos: são os chamados agrimensores. Seus instrumentos de medição são a trena, que mede comprimentos, e o teodolito, que mensura ângulos verticais e horizontais.

A grandeza da superfície

Após o estudo das grandezas angulares e lineares, aprofundaremos nosso conhecimento sobre a grandeza da superfície Dos átomos aos planetas, tudo o que é concreto possui superfície, como as mesas, as casas e até o nosso corpo

As superfícies podem ser planas ou curvas. Em ambos os casos, é possível medi las e compará las umas às outras de acordo com os valores de sua grandeza, chamada de área

Portanto, área é o nome da grandeza geométrica que avalia a extensão de uma superfície Assim, toda superfície possui uma área, que deve ser expressa por um número real positivo acompanhado de uma unidade de área

Neste capítulo, estudaremos como calcular as áreas de algumas superfícies planas.

Unidades de área

No Sistema Internacional de Pesos e Medidas (SI), a principal unidade de medida adotada para expressar a área de uma superfície é o metro quadrado (m^2).

Assim como a unidade metro (m), usada para expressar a grandeza do comprimento, o metro quadrado também admite múltiplos e submúltiplos no SI:

O quilômetro quadrado:	$1\ km^2 = 1000000\ m^2$
O hectômetro quadrado:	$1\ hm^2 = 10000\ m^2$
O decâmetro quadrado:	$1\ dam^2 = 100\ m^2$
O decímetro quadrado:	$1\ dm^2 = 0{,}01\ m^2$
O centímetro quadrado:	$1\ cm^2 = 0{,}0001\ m^2$
O milímetro quadrado:	$1\ mm^2 = 0{,}000001\ m^2$

Perceba que $1\ m^2 = 10000\ cm^2$ e que $1\ cm^2 = 100\ mm^2$ Para compreender as transformações de unidades, observe os exemplos a seguir

- 20 quilômetros quadrados em metros quadrados, considerando que 1 km = 1000 m:
  $20\ km^2 = 20 \cdot (1\ km)^2$
  $20\ km^2 = 20 \cdot (1000\ m)^2$
  $20\ km^2 = 20 \cdot 1000^2\ m^2$
  $20\ km^2 = 20 \cdot 1000000\ m^2$
  $20\ km^2 = 20000000\ m^2$

- 500 centímetros quadrados em metros quadrados, considerando que 1 cm = 0,01 m:
  $500\ cm^2 = 500 \cdot (1\ cm)^2$
  $500\ cm^2 = 500 \cdot (0{,}01\ m)^2$
  $500\ cm^2 = 500 \cdot (0{,}01)^2\ m^2$
  $500\ cm^2 = 500 \cdot 0{,}0001\ m^2$
  $500\ cm^2 = 0{,}05\ m^2$

Outra unidade aceita no SI para expressar a extensão de uma superfície é o **are**, representado pela letra (**a**). O principal múltiplo dessa unidade é o **hectare** (**ha**), muito usado para expressar áreas de terrenos rurais:

$1\ a = 100\ m^2$
$1\ ha = 10000\ m^2$

! Atenção

Simbologia e notação

Não há uma notação padronizada para a representação algébrica da área de uma superfície Alguns estudiosos usam a letra **A** maiúscula, pois essa é a inicial da palavra "área"; outros usam a letra **S**, de "superfícies", pois apenas elas possuem área.

De modo geral, quando há mais de uma área a ser representada algebricamente, as letras A ou S vêm acompanhadas de um índice, como A_1 e A_2 ou S_1 e S_2.

Os índices também podem ser figuras, letras ou siglas, como S_Δ e $S_\odot$ para áreas de um triângulo e de um círculo, S_P e S_L para áreas de um paralelogramo e de um losango ou, ainda, $S_{Trapézio}$ e S_{Setor} para áreas de um trapézio e de um setor circular.

No caso dos polígonos, podemos fazer a representação algébrica da área usando colchetes em torno da sucessão das letras que expressam seus vértices, seja no sentido horário ou anti-horário Assim:

- Área do triângulo ABC = [ABC].
- Área do quadrilátero MNPQ = [MNPQ].
- Área do pentágono DEFGH = [DEFGH]

Exercícios resolvidos

1 O território da Rússia estende-se por dois continentes e cobre uma área de, aproximadamente, 17 milhões de quilômetros quadrados. Usando a notação científica, expresse a área do território russo em metros quadrados.

Resolução:

Sendo S a área do território russo:
$S = 17000000\ km^2$
$S = 17 \cdot 10^6\ km^2$
$S = 1{,}7 \cdot 10^7 \cdot (1\ km)^2$
$S = 1{,}7 \cdot 10^7 \cdot (10^3\ m)^2$
$S = 1{,}7 \cdot 10^7 \cdot (10^3)^2\ m^2$
$S = 1{,}7 \cdot 10^7 \cdot 10^6\ m^2$
$S = 1{,}7 \cdot 10^{7+6}\ m^2$
$S = 1{,}7 \cdot 10^{13}\ m^2$

2 Um terreno de 30 hectares é oferecido no interior do estado por R$ 960000,00. Qual o preço do metro quadrado desse terreno?

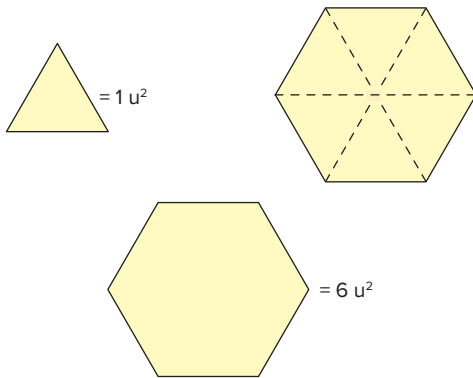
Resolução:

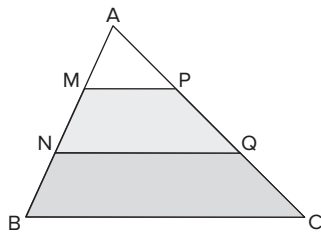
Como 30 ha equivale a $30 \cdot 10000\ m^2 = 300000\ m^2$, o preço do metro quadrado desse terreno é:

$$\frac{\text{R\$ } 960000{,}00}{300000\ m^2} = \text{R\$ } 3{,}20/m^2$$

Embora existam muitas opções de unidades para medir áreas, podemos resolver os problemas que tratam de comparações entre duas ou mais áreas adotando como unidade de medida a área de uma das figuras comparadas ou parte dela.

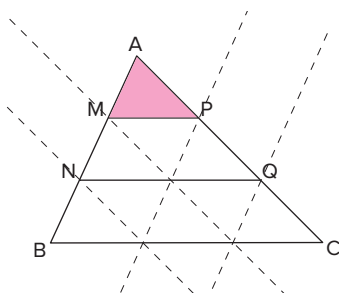
Quando adotamos, para resolver um problema, uma unidade de comparação que não pertence ao sistema métrico ou a outros sistemas existentes, devemos representá la por $\mathbf{u^2}$ ou, ainda, pela sigla **ua** (unidades de área).

Desse modo, podemos observar, por exemplo, que a área de um hexágono regular é igual a 6 vezes a área de um triângulo equilátero que tenha o mesmo lado do hexágono.

Exercícios resolvidos

3 Na figura a seguir, os pontos M e N dividem o lado $\overline{AB}$ em três partes congruentes, e os segmentos $\overline{MP}$ e $\overline{NQ}$ são paralelos à base $\overline{BC}$ do triângulo ABC.

A razão entre as áreas dos trapézios MNQP e BNQC é igual a:

A 0,55
B 0,60
C 0,75
D 0,80
E 0,85

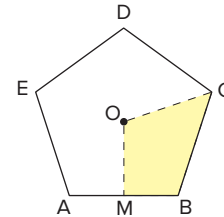
Resolução:

Traçando retas paralelas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ do triângulo ABC pelos pontos M, N, P e Q, obtém-se uma figura composta do triângulo APM e de mais 8 triângulos congruentes a ele:

Adotando a área do triângulo AMP como unidade de área u^2, tem-se que as áreas dos trapézios medirão:

$$\begin{cases} [MNQP] = 3\ u^2 \\ [BNQC] = 5\ u^2 \end{cases}$$

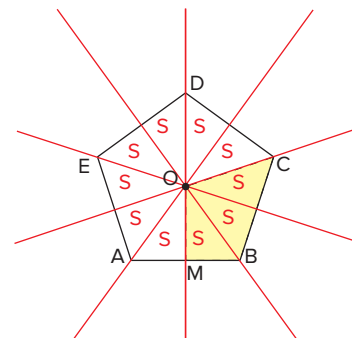
Portanto, a razão entre essas áreas é $\dfrac{3\ u^2}{5\ u^2} = 0{,}60$.

Alternativa: B

4 A figura a seguir apresenta um pentágono regular com $8\ m^2$ de área.

Se M é o ponto médio do lado $\overline{AB}$ e O é o centro do pentágono, então a área do quadrilátero BCOM é igual a:

A $2{,}0\ m^2$
B $2{,}2\ m^2$
C $2{,}4\ m^2$
D $2{,}5\ m^2$
E $3{,}0\ m^2$

Resolução:

Traçando todos os eixos de simetria do pentágono, tem-se:

Agora, adotando a área S de cada triângulo retângulo como unidade para a comparação das áreas do pen tágono e do quadrilátero, tem-se que:

$$\frac{[BCOM]}{[ABCDE]} = \frac{3S}{10S}$$

Então, simplificando a unidade momentânea S na fra ção do segundo membro e substituindo o valor da área do pentágono:

$$\frac{[BCOM]}{8\ m^2} = \frac{3}{10}$$

$$[BCOM] = \frac{3 \cdot 8\ m^2}{10}$$

$$[BCOM] = 2{,}4\ m^2$$

Alternativa: C

FRENTE 3

Equivalência no plano

O conceito geométrico de equivalência entre fi guras depende do número de dimensões das figuras mensuradas Ângulos equivalentes têm a mesma medida, linhas equivalentes têm o mesmo comprimento, formas bidimensionais equivalentes têm a mesma área, e formas tridimensionais têm o mesmo volume Desse modo, superfícies planas, polígonos, circunferências e outras formas fechadas são equivalentes quando cobrem regiões de mesma área no plano.

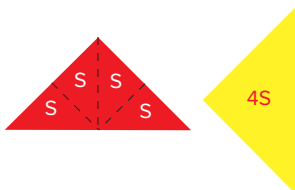
Observe que, embora as figuras formadas pela justaposição de uma coleção de polígonos possam ter formatos muito diferentes, todas elas possuem a mesma área Isso se deve ao fato de que os polígonos que compõem um formato são congruentes aos polígonos que compõem os outros.

Tangram

As figuras mostradas na ilustração são obtidas pela mesma coleção de polígonos. Adotando como unidade a área S do menor deles, podemos afirmar que essa coleção é composta de:

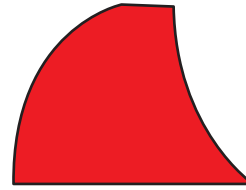
- Dois triângulos retângulos e isósceles pequenos com área **S**

- Um triângulo retângulo e isósceles com área 2**S**.

- Dois triângulos retângulos e isósceles grandes com área 4**S**.

- Um quadrado com área 2**S**.

- Um paralelogramo com área 2**S**.

Princípio de Cavalieri

A ideia intuitiva de que as superfícies planas podem ser cobertas por uma infinidade de segmentos de reta parale los, postos um ao lado do outro, é muito antiga

Essa concepção está presente nos trabalhos de grandes pensadores da Antiguidade, como Eudoxo e Arquimedes, mas só foi formalizada nas obras do matemático italiano Bonaventura Cavalieri, que utilizou em seus estudos ferramentas matemáticas mais modernas, como os logaritmos e as funções trigonométricas.

Publicado em 1635, o livro *Nova Geometria dos indivisíveis contínuos*, de autoria desse italiano discípulo de Galileu, é considerado um dos precursores do cálculo integral.

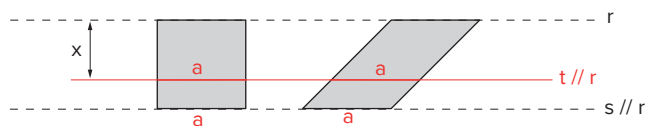
Segundo o princípio de Cavalieri, dadas duas regiões planas inscritas em um mesmo par de retas paralelas r e s, sendo S_1 e S_2 suas respectivas áreas:

- Se toda reta t paralela a r e s interceptar as duas regiões, determinando segmentos de reta com o mesmo comprimento, então essas duas regiões têm a mesma área.

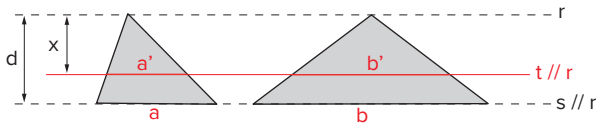
$$f(x) = g(x) \Rightarrow S_1 = S_2$$

- Se toda reta t paralela a r e s interceptar as duas regiões, determinando segmentos de reta com a mesma razão, então as áreas dessas duas regiões também estão nessa razão.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = k \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = k$$

Considere que sejam dados um retângulo e um para lelogramo, ambos com bases de comprimento **a** e inscritos no mesmo par de retas paralelas, como mostra a figura

Nesse caso, toda reta paralela a esse par de retas determina segmentos de comprimento **a**, tanto no retângulo quanto no paralelogramo, independentemente da distância **x** entre a terceira paralela t e a reta r, por exemplo. Portanto, pelo princípio de Cavalieri, um retângulo e um paralelogramo com bases congruentes e mesma altura possuem a mesma área.

$$S_{Retângulo} = S_{Paralelogramo}$$

Considere, agora, que sejam dados dois triângulos cujas bases tenham comprimentos **a** e **b** diferentes um do outro, mas que estejam inscritos no mesmo par de retas paralelas.

Nesse caso, toda reta paralela a r e s determina segmentos cujos comprimentos **a’** e **b’** são diretamente proporcionais aos comprimentos **a** e **b** das bases do triângulo, independentemente de qual seja a distância **x** entre a terceira paralela e a reta que contém as bases dos triângulos dados Isso pode ser demonstrado da seguinte maneira:

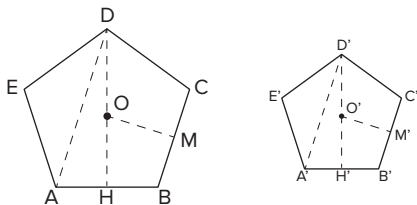
- Sendo **d** a distância entre as retas **r** e **s** na segunda figura, pela semelhança entre os triângulos dados e os triângulos determinados pela terceira reta paralela, tem-se:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a}{a'}=\frac{d}{x}\\ \frac{b}{b'}=\frac{d}{x}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$$

- Portanto, pelo princípio de Cavalieri, a razão entre as áreas de dois triângulos com a mesma altura é igual à razão $\frac{a}{b}$ entre os comprimentos de suas bases.

$$\frac{S_A}{S_B}=\frac{a}{b}$$

Teorema da razão de semelhança entre figuras planas

Uma vez estabelecida uma correspondência entre os pontos de duas figuras planas, a relação de semelhança entre elas está garantida quando a divisão de quaisquer pares de comprimentos correspondentes, em uma determinada ordem, produzir sempre o mesmo quociente, o qual é denominado razão de semelhança.

Considerando dois pentágonos regulares de tamanhos diferentes e dividindo o comprimento do lado do maior pelo comprimento do lado do menor, encontra-se um quociente k:

$$\frac{AB}{A'B'}=k$$

Dividindo a altura do maior pela altura do menor, também se encontra o quociente k:

$$\frac{DH}{D'H'}=k$$

Dividindo o comprimento da diagonal do maior pelo comprimento da diagonal do menor, encontra-se o mesmo quociente k:

$$\frac{AD}{A'D'}=k$$

Dividindo o comprimento do apótema do maior pelo comprimento do apótema do menor, encontra-se novamente o quociente k:

$$\frac{OM}{O'M'}=k$$

O mesmo ocorre quando o perímetro do pentágono maior é dividido pelo perímetro do menor:

$$\frac{AB+BC+CD+DE+AE}{A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+A'E'}=k$$

Mas isso não acontece quando as áreas dos pentágonos são divididas uma pela outra. Nesse caso, se a área do pentágono maior for dividida pela do menor, o quociente produzido será k^2, ou seja, o quadrado da razão de semelhança

$$\frac{[ABCDE]}{[A'B'C'D'E']}=k^2$$

Teorema: se duas figuras planas são semelhantes entre si e k é a razão dessa semelhança, então a razão entre as áreas dessas figuras é igual a k^2.

De acordo com esse teorema, se as medidas angulares forem mantidas, ao duplicarmos os lados de um polígono, quadruplicamos sua área, pois $2^2 = 4$. Se triplicarmos os lados, a área passará ao nônuplo de seu valor inicial, pois $3^2 = 9$, e assim por diante.

Exercício resolvido

5 O que acontece com a área de um retângulo quando aumentamos suas dimensões em 30%?

A Aumenta exatamente 30%.
B Aumenta aproximadamente 40%.
C Aumenta aproximadamente 50%.
D Aumenta exatamente 30%.
E Aumenta aproximadamente 70%.

Resolução:

Como aumentamos as dimensões do retângulo em uma mesma proporção (30%), o retângulo inicial é semelhante ao retângulo obtido depois do aumento Assim, sendo x o comprimento de um dos lados do retângulo original, o comprimento do lado correspondente no retângulo aumentado será:

$$y = x + 30\% \cdot x$$
$$y = 100\% \cdot x + 30\% \cdot x$$
$$y = 130\% \cdot x$$

A razão de semelhança do retângulo aumentado para o retângulo original é:

$$k=\frac{y}{x}=\frac{130\% \cdot x}{100\% \cdot x}\Rightarrow k=1{,}3$$

FRENTE 3

A razão entre a área do retângulo aumentado para a área do retângulo original é:

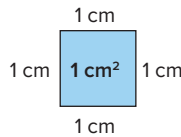
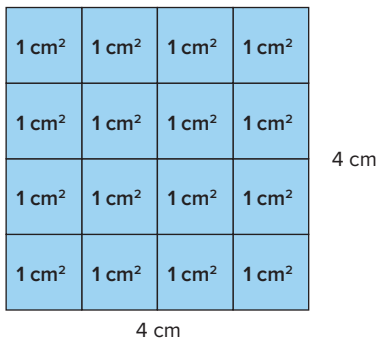
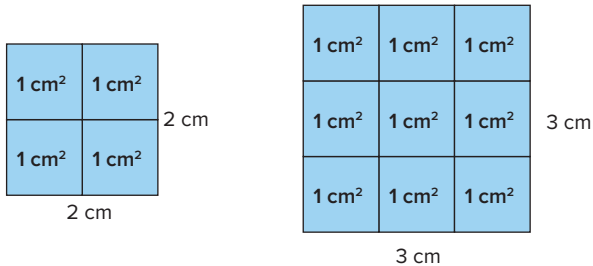
$$k^2 = (1{,}3)^2 = 1{,}69$$

Portanto, a área do novo retângulo é 169% da área do retângulo original, o que indica um aumento de 69% (aproximadamente 70%) na área do retângulo original.
Alternativa: E

Fórmulas básicas para o cálculo de áreas

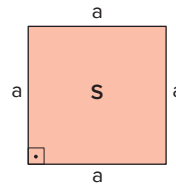
É possível determinar corretamente os valores de áreas de figuras planas complexas a partir de um número razoável de fórmulas algébricas que expressam as áreas das figuras mais básicas, como os triângulos e alguns quadriláteros

Área do quadrado

A principal unidade de medida de área do SI é o metro quadrado (m^2), que equivale à porção da superfície do plano coberta por um quadrado cujos lados têm 1 metro de comprimento. Da mesma forma, 1 centímetro quadrado equivale a um quadrado cujos lados têm 1 centímetro.

Então, usando pequenos quadrados com 1 cm de lado, é possível medir as áreas de quadrados maiores, em cm^2, apenas contando quantos quadrados pequenos cabem justapostos em seu interior.

Lado do quadrado	Área do quadrado
1 cm	1 cm^2
2 cm	4 cm^2
3 cm	9 cm^2
4 cm	16 cm^2

Tab. 1

A tabela apresentada nos permite induzir que a área da superfície delimitada pelos lados de um quadrado é dada pela segunda potência do comprimento de um de seus lados:

$$(1\text{ cm})^2 = 1\text{ cm}^2$$
$$(2\text{ cm})^2 = 4\text{ cm}^2$$
$$(3\text{ cm})^2 = 9\text{ cm}^2$$
$$(4\text{ cm})^2 = 16\text{ cm}^2$$
$$\vdots$$
$$(\mathbf{a}\text{ cm})^2 = \mathbf{a}^2\text{ cm}^2$$

$$S_{Quadrado} = a^2$$

Por esse motivo, as segundas potências dos números reais positivos são frequentemente chamadas de quadrados desses números.

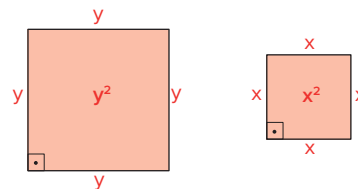
Média quadrática

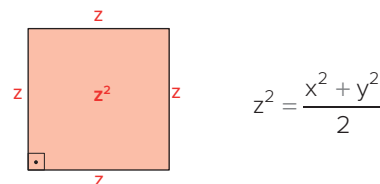
Entre dois valores, um grande e outro pequeno, cujas medidas podem variar no conjunto dos números reais positivos, existem infinitos valores médios. Muitos deles podem ser expressos algebricamente em função dos valores grande e pequeno, sendo chamados de médias. A média aritmética e a média quadrática são exemplos importantes.

Assim, dados os números reais x e y:

- A média aritmética de x e y é $\dfrac{x+y}{2}$.
- A média quadrática de x e y é $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$.

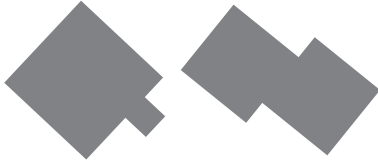
O conceito de média quadrática de números reais é um dos mais usados no estudo da Estatística, sendo o fundamento principal de medidas de dispersão como a variância e o desvio padrão. Geometricamente, a média quadrática pode ser interpretada da seguinte maneira:

Considere os quadrados de lados x, y, com $x < y$.

Considere, agora, o quadrado de lado z cuja área é igual à média aritmética das áreas dos quadrados de lados x e y.

$$z^2 = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

Nesse caso, dizemos que o lado z do quadrado médio é a média quadrática dos lados x e y dos quadrados dados inicialmente:

$$z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

Exercício resolvido

6 As figuras a seguir são compostas de dois quadrados cada

Na primeira, um dos quadrados tem 5 cm de lado e o outro 35 cm. Na segunda, os quadrados são congruentes. Determine o comprimento dos lados dos quadrados congruentes sabendo que as regiões do plano cobertas pelas duas figuras têm a mesma área.

Resolução:

Sendo x o comprimento, em centímetros, dos lados dos quadrados congruentes, considerando a igualda de entre as áreas da figura, temos:

$$x^2 + x^2 = 5^2 + 35^2$$
$$2x^2 = 25 + 1225$$
$$2x^2 = 1250$$
$$x^2 = 625$$
$$x = 25 \text{ cm}$$

Saiba mais

Relação de ordem entre as médias aritmética e quadrática

Sendo x e y dois números reais positivos, mesmo com $x < y$, tem-se que $(x \quad y)^2 > 0$.

Assim, pela identidade do trinômio quadrado perfeito:

$$x^2 - 2xy + y^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 > 2xy$$

Somando $x^2 + y^2$ a ambos os membros:

$$x^2 + y^2 + x^2 + y^2 > 2xy + x^2 + y^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 > x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 > (x + y)^2$$

Dividindo a desigualdade por 4:

$$\frac{2x^2 + 2y^2}{4} > \frac{(x+y)^2}{4} \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{2} > \frac{(x+y)^2}{4}$$

Então, das raízes quadradas de cada termo:

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} > \sqrt{\frac{(x+y)^2}{4}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} > \frac{x+y}{2}$$

Isso prova que a média quadrática de dois números reais positivos distintos é sempre maior que a média aritmética entre esses números.

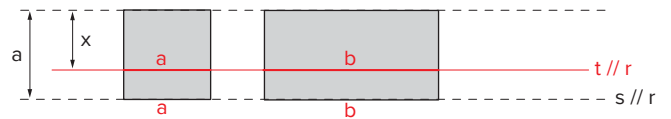
Como a igualdade entre essas médias acontece quando $y = x$, é correto afirmar, de maneira genérica, que entre números reais positivos:

média quadrática ≥ média aritmética

Área do retângulo

Considere as seguintes figuras geométricas:

- Um quadrado de lado **a**.
- Um retângulo de base **b** e altura **a**

Postas as figuras em um mesmo plano de modo que suas bases fiquem alinhadas, se uma reta paralela às bases interceptar ambas as figuras, ela determinará segmentos congruentes a essas bases

Segundo o princípio de Cavalieri, a razão entre a área do quadrado e a área do retângulo deve ser igual à razão entre os comprimentos de suas bases. Assim:

$$\frac{S_{Quadrado}}{S_{Retângulo}} = \frac{a}{b}$$

Substituindo a área do quadrado:

$$\frac{a^2}{S_{Retângulo}} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow a \cdot S_{Retângulo} = a^2 \cdot b$$

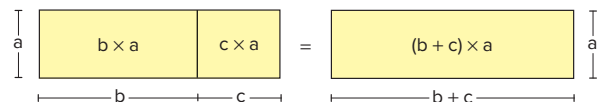
Como $a \neq 0$, dividindo por a toda a expressão, temos:

$$S_{Retângulo} = a \cdot b$$

Saiba mais

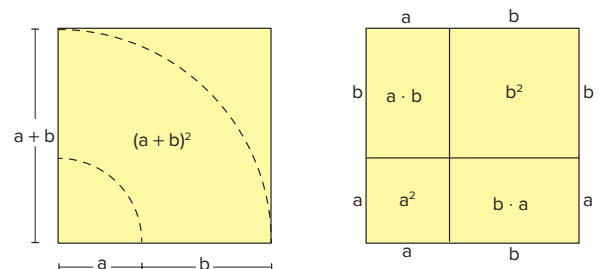
Muitas expressões algébricas oriundas da propriedade distributiva podem ser representadas geometricamente pelas relações entre as áreas de retângulos justapostos.

a | b × a | c × a = (b + c) × a | a

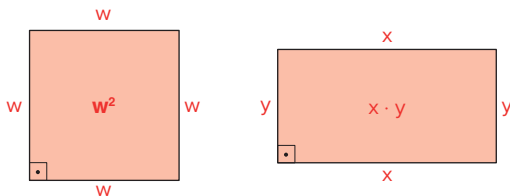
b — c — b + c

$$b \cdot a + c \cdot a = (b + c) \cdot a \quad \text{ou} \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

A identidade entre o quadrado da soma e o trinômio quadrado perfeito também pode ser representada geometricamente por justaposição de quadrados e retângulos.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

FRENTE 3

Média geométrica

Outro importante valor médio entre dois valores reais positivos é conhecido como média geométrica Algebri camente, a média geométrica de dois números reais positivos x e y é expressa pela raiz quadrada positiva do produto de seus valores, ou seja, $+\sqrt[2]{x\ \ y}$ ou, simplesmente, $\sqrt{x\ \ y}$

Geometricamente, essa média corresponde ao comprimento do lado de um quadrado cuja área coincide com a de um retângulo de dimensões x e y. Assim, sendo w o comprimento do lado do quadrado cuja área é igual à de um retângulo como o da figura a seguir, então:

$$w^2 = x \cdot y$$

Nesse caso, dizemos que w é a média geométrica de x e y:

$$w = \sqrt{x \cdot y}$$

Saiba mais

Relação de ordem entre as médias aritmética e geométrica

Sendo x e y dois números reais positivos, mesmo com x < y, tem-se que $\left(\sqrt{x}\ \ \sqrt{y}\right)^2\ \ 0$

Assim, pela identidade do trinômio quadrado perfeito:

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} + \left(\sqrt{y}\right)^2 > 0$$

$$x - 2\sqrt{x \cdot y} + y > 0$$

$$x + y > 2\sqrt{x\ \ y}$$

Dividindo a desigualdade por 2:

$$\frac{x+y}{2} > \frac{2\sqrt{x \cdot y}}{2} \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} > \sqrt{x \cdot y}$$

Isso prova que a média aritmética de dois números reais positi vos distintos é sempre maior que a média geométrica entre esses números.

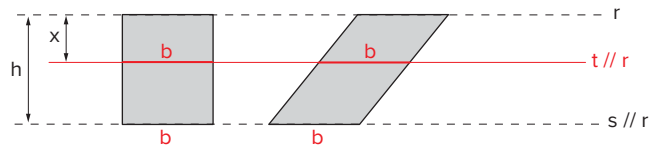
Novamente, como a igualdade entre as médias acontece quando y = x, é correto afirmar, de maneira genérica, que entre números reais positivos:

média quadrática ≥ média aritmética ≥ média geométrica

Área do paralelogramo

Considere as seguintes figuras geométricas:

- Um retângulo de base **b** e altura **h**.
- Um paralelogramo de base **b** e altura **h**.

Novamente, postas as figuras em um mesmo plano de modo que suas bases fiquem alinhadas, se uma reta para lela às bases interceptar ambas as figuras, ela determinará segmentos congruentes a essas bases.

Segundo o princípio de Cavalieri, ambas as figuras pos suem a mesma área. Portanto, sendo $S_{Retângulo}$ e $S_{Paralelogramo}$, respectivamente, as áreas do retângulo e do paralelogramo, temos que:

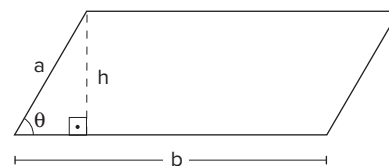
$$S_{Retângulo} = S_{Paralelogramo}$$

Substituindo a área do retângulo:

$$S_{Paralelogramo} = b \cdot h$$

O fato de a altura do retângulo ter o mesmo compri mento de dois de seus lados garante que sua área seja equivalente ao produto dos comprimentos de dois lados adjacentes. No entanto, no caso dos paralelogramos com inclinações diferentes de 90°, essa regra não se aplica.

Podemos expressar a área de um paralelogramo em função dos comprimentos de dois lados adjacentes consi derando a medida θ do ângulo formado por esses lados e um pouco de trigonometria.

Traçando uma altura relativa à base cuja extremidade seja um dos vértices do paralelogramo, obtém-se um triângulo retângulo em que a hipotenusa é um dos lados do paralelogramo e a altura é o cateto oposto ao ângulo agudo de medida θ.

Assim, nesse triângulo retângulo, verificamos que $sen(\theta) = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a\ \ sen(\theta)$.

Como todos os ângulos internos de um paralelogramo possuem o mesmo seno, com h = a · sen(θ), é possível expressar a área do paralelogramo em função dos compri mentos de dois lados adjacentes e da medida do ângulo que eles formam:

$$S_{Paralelogramo} = a \cdot b \cdot sen(\theta)$$

! Atenção

A fórmula para a área dos paralelogramos $S_{Paralelogramo} = a \cdot b \cdot sen(\theta)$, que acaba de ser deduzida, também pode ser usada como referência para o cálculo da área dos retângulos, losangos e quadrados.

- Os ângulos dos retângulos são retos, logo:

$$S_{Retângulo} = a \cdot b \cdot sen(90°)$$
$$S_{Retângulo} = a \cdot b \cdot 1$$
$$S_{Retângulo} = a \cdot b$$

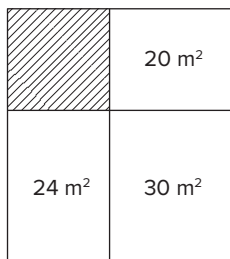
- Os lados de um losango têm o mesmo comprimento $a = b$, assim:

$$S_{Losango} = a \cdot a \cdot sen(\theta)$$
$$S_{Losango} = a^2 \cdot sen(\theta)$$

- Os lados de um quadrado têm o mesmo comprimento e os ângulos são retos, então:

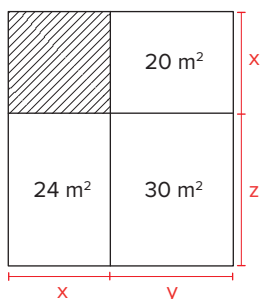
$$S_{Quadrado} = a \cdot a \cdot sen(90°)$$
$$S_{Quadrado} = a^2 \cdot 1$$
$$S_{Quadrado} = a^2$$

Exercícios resolvidos

7 Na figura a seguir, o retângulo maior está dividido em três regiões retangulares e a região hachurada é quadrada.

Considerando as áreas indicadas na figura, a área da região quadrada deve ser de:

A 12 m²
B 16 m²
C 18 m²
D 22 m²
E 26 m²

Resolução:

Sejam x, y e z as medidas, em metros, dos lados do quadrado e dos retângulos, como mostra a figura:

Assim, das áreas das regiões retangulares, temos as equações: $\begin{cases} x \cdot z = 24 & (I) \\ y \cdot z = 30 & (II) \\ y \cdot x = 20 & (III) \end{cases}$

Multiplicando as equações (I) e (III), obtemos:

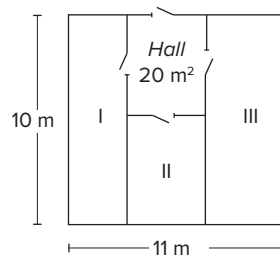
$$x^2 \cdot y \cdot z = 24 \cdot 20$$

Substituindo y z pelo valor indicado na equação (II):

$$x^2 \ 30 = 480$$

Portanto, $x^2 = 16$, ou seja, a área da região quadrada é de 16 m².

Alternativa: B

8 **Enem** Em uma empresa, existe um galpão que precisa ser dividido em três depósitos e um *hall* de entrada de 20 m², conforme a figura a seguir Os depósitos I, II e III serão construídos para o armazenamento de, respectivamente, 90, 60 e 120 fardos de igual volume, e suas áreas devem ser proporcionais a essas capacidades

A largura do depósito III deve ser, em metros, igual a:

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

Resolução:

Como as áreas A_I, A_{II} e A_{III} devem ser proporcionais aos números 90, 60 e 120, temos que:

$$\frac{A_I}{90} = \frac{A_{II}}{60} = \frac{A_{III}}{120} = k \Rightarrow \begin{cases} A_I = 90k \\ A_{II} = 60k \\ A_{III} = 120k \end{cases}$$

Então, como $A_I + A_{II} + A_{III} = (11 \cdot 10 - 20)\ m^2$, temos que:

$$90k + 60k + 120k = (110 - 20)\ m^2$$
$$270k = 90\ m^2$$
$$3k = 1\ m^2$$

Sendo x a largura do depósito III, temos que:

$$x \ 10 = 120k = 40 \ 3k = 40 \ 1 = 40\ m^2 \Rightarrow x = 4\ m$$

Alternativa: D

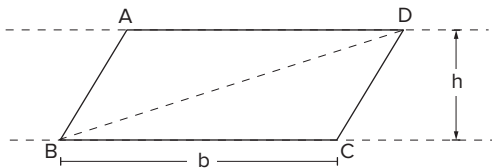
9 Determine a área de um paralelogramo cujos lados medem 5 cm e 8 cm e os ângulos internos medem 30° e 150°.

Resolução:

Sendo S a área do paralelogramo:

$$S = 5 \cdot 8 \cdot sen(30°) = 40 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow S = 20\ cm^2$$

Área do triângulo a partir do paralelogramo

O traçado de qualquer diagonal de um paralelogramo determina um par de triângulos congruentes.

$$\Delta ABD \cong \Delta CDB$$

Essa congruência se justifica pelo caso LLL, uma vez que os lados opostos de um paralelogramo têm o mesmo comprimento e que a diagonal traçada é lado comum aos triângulos determinados.

Desse modo, como figuras congruentes possuem a mesma área, podemos observar que a área do paralelogramo equivale ao dobro da área de um dos triângulos. Assim, sendo $S_{\text{Triângulo}}$ e $S_{\text{Paralelogramo}}$, respectivamente, as áreas do triângulo e do paralelogramo, tem-se:

$$2 \cdot S_{\text{Triângulo}} = S_{\text{Paralelogramo}}$$
$$2 \cdot S_{\text{Triângulo}} = b \cdot h$$
$$S_{\text{Triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

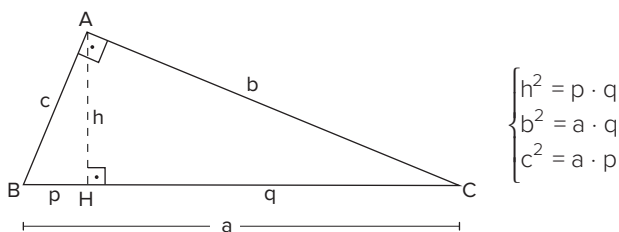
Uma notação mais eficiente da expressão para a área de um triângulo em função de um de seus lados e da altura correspondente é:

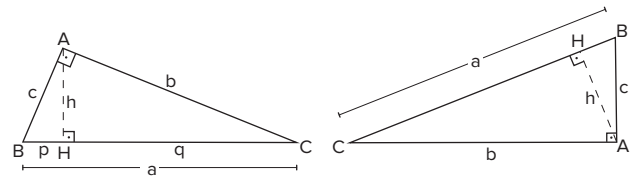
$$S_{\text{Triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$

Nesse caso, quando os valores de b ou h são fracionários, evitam-se as frações de frações.

Relações de equivalência no triângulo retângulo

Também conhecidas como relações métricas, as expressões a seguir, já estudadas no capítulo 3, também dizem respeito a equivalências de áreas

$$\begin{cases} h^2 = p \cdot q \\ b^2 = a \cdot q \\ c^2 = a \cdot p \end{cases}$$

Qualquer um dos lados do triângulo pode ser considerado como base para o cálculo da área. Assim, a metade do produto da base pela altura resultará na área desse triângulo, desde que seja usada sempre a altura relativa à base escolhida.

Particularmente no caso do triângulo retângulo, quando se escolhe um dos catetos como base, a medida do outro torna-se a altura relativa.

Por esse motivo, sendo h a medida da altura relativa à hipotenusa de um triângulo de lados com medidas a, b e c, a área desse triângulo pode ser expressa tanto por $\frac{a \cdot h}{2}$ quanto por $\frac{b \cdot c}{2}$. Portanto:

$$\frac{a \cdot h}{2} = \frac{b \cdot c}{2} \Leftrightarrow a \cdot h = b \cdot c$$

Essas e as outras relações métricas do triângulo retângulo que foram estudadas no capítulo 3 e demonstradas a partir da semelhança de triângulos também podem ser compreendidas como relações de equivalência entre áreas.

Assim, $a \cdot h = b \cdot c$ é consequência da área do triângulo retângulo, independentemente do lado que se escolhe como base para o cálculo

Veja como interpretar as outras relações:

- $b^2 = a \cdot q$ significa que a área de um quadrado de lado **b** equivale à área de um retângulo de dimensões **a** e **q**
- $c^2 = a \cdot p$ significa que a área de um quadrado de lado **c** equivale à área de um retângulo de dimensões **a** e **p**.
- $h^2 = p \cdot q$ significa que a área de um quadrado de lado **h** equivale à área de um retângulo de dimensões **p** e **q**.

As três relações apresentadas também podem ser enunciadas em termos de média geométrica por dois teoremas:

I Cada cateto de um triângulo retângulo tem medida igual à média geométrica entre as medidas de sua projeção na hipotenusa e da própria hipotenusa.

$$b = \sqrt{a \cdot q} \qquad c = \sqrt{a \cdot p}$$

II A medida da altura relativa à hipotenusa de um triân gulo retângulo é igual à média geométrica entre as medidas das projeções dos catetos sobre a hipote nusa.

$$h = \sqrt{p \cdot q}$$

Saiba mais

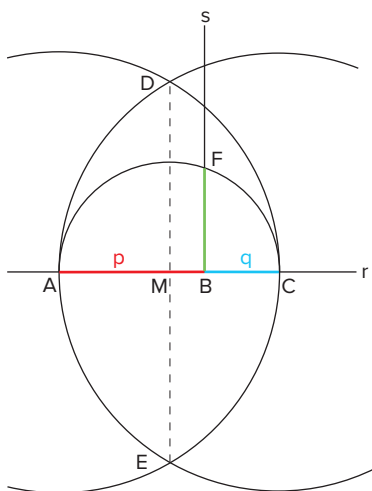
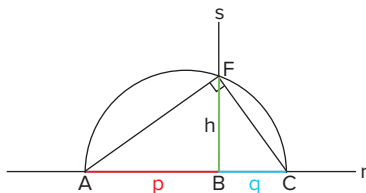
O problema da quadratura

No estudo da construção geométrica, a quadratura consiste em determinar um segmento de reta que seja lado de um quadrado com a mesma área de outra figura, como triângulos, outros quadriláteros, polígonos e até círculos. O problema da quadratura é bastante desafiador, e, entre as principais contribuições do seu estudo, estão os processos para obter a média geométrica de dois segmentos usando apenas régua, compasso, papel e lápis. Esses processos são fundamentados nas relações de equivalência no triângulo retângulo.

Dados os segmentos de reta de comprimentos *p* e *q*, uma maneira de se obter sua média geométrica com régua e compasso de acordo com a expressão $h^2 = p \cdot q$, por exemplo, consiste em efetuar os seguintes passos:

1. Construir sobre uma mesma reta r os segmentos consecutivos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ com medidas $AB = p$ e $BC = q$
2. Traçar uma reta s perpendicular a r pelo ponto B
3. Construir as circunferências de centro em A e raio AC e de centro em C e raio CA, obtendo os pontos D e E.
4. Traçar a reta $\overleftrightarrow{DE}$, obtendo o ponto M sobre a reta r.
5. Traçar uma semicircunferência de centro M e raio MA, obtendo o ponto F sobre a reta s.

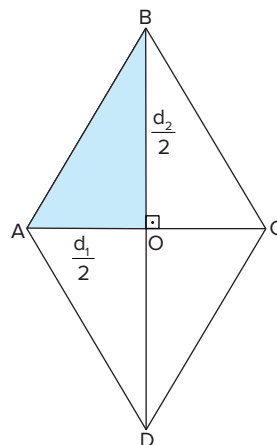
Feitas essas construções, o comprimento do segmento $\overline{BF}$ deverá ser igual à média geométrica dos comprimentos p e q.

Com $p > q$ e o ponto C situado fora do segmento $\overline{AB}$, uma figura que representa corretamente o desenho dessa solução é:

Como o triângulo AFC está inscrito na semicircunferência de diâmetro AC, conclui-se que se trata de um triângulo retângulo de hipotenusa AC. Então, traçando seus catetos, pode-se observar como a relação métrica $h^2 = p \cdot q$ justifica essa construção da média geométrica.

Assim, quanto mais precisas forem as construções feitas com os instrumentos de desenho, mais próxima a medida h do segmento $\overline{BF}$ estará do lado do quadrado cuja área equivale à de um retângulo de lados p e q.

Esse processo pode ser usado para efetuar a quadratura de qualquer polígono. A impossibilidade da quadratura do círculo foi demonstrada no final do século XIX como resultado dos trabalhos de Carl Friedrich Gauss, Pierre Laurent Wantzel e Ferdinand von Lindemann.

Área do losango

O losango também é um paralelogramo, portanto sua área também pode ser calculada multiplicando-se o comprimento das medidas de sua base pela sua altura, que é igual à distância entre dois lados opostos.

Mas, como todos os lados de um losango possuem o mesmo comprimento, as diagonais estão contidas em seus dois eixos de simetria, de modo que o traçado delas determina quatro triângulos congruentes justapostos em seu interior.

$$\Delta AOB \cong \Delta BOC \cong \Delta COD \cong \Delta AOD$$

Cada um desses triângulos é retângulo no ponto de cruzamento das diagonais do losango, e os catetos desses triângulos têm a metade do comprimento dessas diagonais. Assim, a área de cada um dos triângulos pode ser expressa, em função de seus catetos, por:

$$S_{Triângulo} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2}$$

$$S_{Triângulo} = \frac{d_1 \cdot d_2}{8}$$

Como o losango é formado por quatro triângulos congruentes:

$$S_{Losango} = 4 \cdot S_{Triângulo}$$

$$S_{Losango} = 4 \cdot \frac{d_1 \cdot d_2}{8}$$

Portanto, a área do losango também pode ser expressa, em função de suas diagonais, por:

$$S_{Losango} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

Exercício resolvido

10 Qual a área, em metros quadrados, de um losango com perímetro de 80 cm e cujos comprimentos das diagonais somam 50 cm?

A $2{,}25\ m^2$
B $0{,}45\ m^2$
C $0{,}225\ m^2$
D $0{,}045\ m^2$
E $0{,}0225\ m^2$

FRENTE 3

Resolução:

Cada lado desse losango mede 80 : 4 = 20 cm.
Sendo x e y os comprimentos, em centímetros, das diagonais do losango, tem-se $x + y = 50$ Pelo teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 20^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 400 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1600$$

Elevando ambos os membros da equação $x + y = 50$ ao quadrado:

$$(x + y)^2 = 50^2 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 2\,500$$

Substituindo a soma dos quadrados de x e y:

$$1600 + 2xy = 2\,500 \Leftrightarrow 2xy = 900$$

Dividindo essa última equação por 4, obtemos:

$$\frac{2xy}{4} = \frac{900}{4} \Leftrightarrow \frac{xy}{2} = 225$$

Portanto, a área do losango é de 225 cm^2.
Convertendo para metros quadrados:

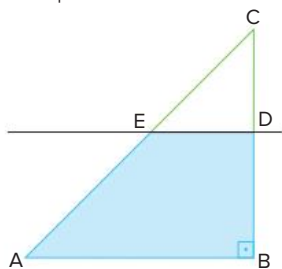
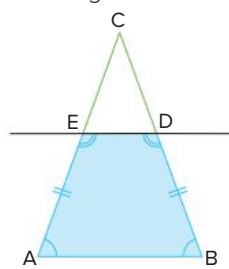
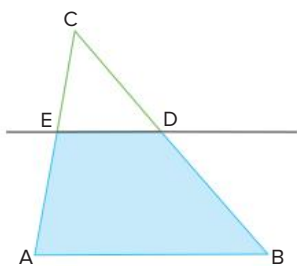
$$225 \cdot (0{,}01\ m)^2 = 225 \cdot 0{,}0001\ m^2 = 0{,}0225\ m^2$$

Alternativa: E

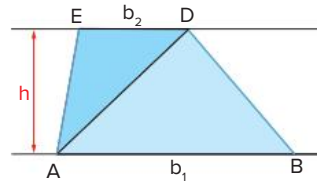
Área do trapézio

Trapézios são quadriláteros que possuem um par de lados opostos paralelos, os quais são denominados bases do trapézio Todo trapézio pode ser obtido de um triângulo; para isso, deve-se traçar uma reta que seja paralela a um dos lados do triângulo e que intercepte os outros dois em pontos distintos. Por esse motivo, os trapézios são classificados da mesma forma que alguns triângulos.

Assim, dado um triângulo ABC e dois pontos D e E sobre os lados $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, de modo que a reta $\overleftrightarrow{DE}$ seja paralela ao lado $\overline{AB}$, o quadrilátero ABDE obtido pode ser um:

- trapézio retângulo se ABC for um triângulo retângulo
- trapézio isósceles se ABC for um triângulo isósceles
- trapézio escaleno se ABC for um triângulo escaleno.

Trapézio retângulo.

Trapézio isósceles.

Trapézio escaleno.

Com essa construção, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$, paralelos, são as bases do trapézio, e a distância entre elas é a altura do trapézio.

Desse modo, traçando uma das diagonais de um trapézio, os triângulos obtidos terão a mesma altura do trapézio, e cada um terá uma das bases do quadrilátero.

Sendo $b_1 = AB$ e $b_2 = ED$ os comprimentos das bases do trapézio e h a medida de sua altura, a área do triângulo ABD é $S_{\Delta 1} = \frac{1}{2} \cdot b_1 \cdot h$, e a área do triângulo ADE é $S_{\Delta 2} = \frac{1}{2} \cdot b_2 \cdot h$. Portanto, a área do trapézio pode ser calculada pela adição dessas áreas:

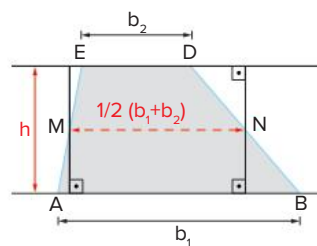
$$S_{Trapézio} = S_{\Delta 1} + S_{\Delta 2}$$
$$S_{Trapézio} = \frac{1}{2} \cdot b_1 \cdot h + \frac{1}{2} \cdot b_2 \cdot h$$

Colocando em evidência os fatores comuns às áreas dos triângulos, temos a expressão:

$$S_{Trapézio} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (b_1 + b_2)$$

Portanto, a área de um trapézio pode ser calculada como o produto entre a soma das bases e a metade da altura:

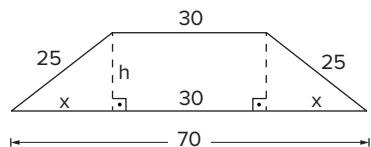
$$S_{Trapézio} = (b_1 + b_2) \cdot \frac{h}{2}$$

Reorganizando os termos da expressão, percebe-se que a área S_T também é igual ao produto da altura pela base média do trapézio.

$$S_{Trapézio} = \left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right) \cdot h$$

Exercício resolvido

11 Determine a área do trapézio cujos lados paralelos medem 30 cm e 70 cm e os lados não paralelos medem 25 cm cada.

Resolução:

Como os lados não paralelos do trapézio têm a mesma medida, trata-se de um trapézio isósceles, como mostra a figura:

Traçadas as alturas com extremidades nos vértices da base menor, o trapézio fica dividido em duas regiões triangulares congruentes e uma retangular. Assim, na base maior do trapézio, observamos que:

$$x + 30 + x = 70 \Leftrightarrow x = 20$$

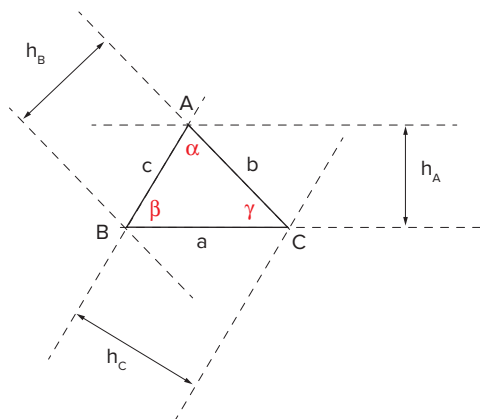
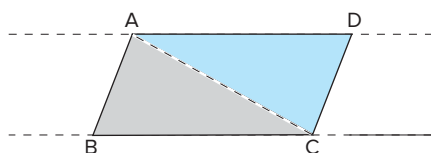
Sendo $h > 0$, a medida em centímetros da altura desse trapézio, pelo teorema de Pitágoras, é:

$$x^2 + h^2 = 25^2$$
$$20^2 + h^2 = 25^2$$
$$h^2 = 625 \quad 400 = 225$$
$$h = 15 \text{ cm}$$

Portanto, a área do trapézio é:

$$S_{\text{Trapézio}} = \left(\frac{30 + 70}{2}\right) \cdot 15 = 750 \text{ cm}^2$$

Área do triângulo

Triângulos são formas geométricas fechadas dotadas de três lados, três ângulos internos e três alturas. A figura a seguir mostra um triângulo ABC de ângulos internos α, β e γ, lados de medidas a, b e c e alturas relativas com medidas h_A, h_B e h_C, respectivamente:

Como todo triângulo pode ser obtido de um paralelogramo pelo traçado de uma de suas diagonais, conforme vimos anteriormente, e cada diagonal divide o paralelogramo em duas regiões congruentes, a área de cada triângulo originado dessa construção pode ser expressa como sendo a metade da área do paralelogramo dividido

$$S_{\text{Triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot S_{\text{Paralelogramo}}$$

Fórmulas básicas

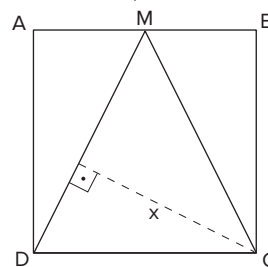
Considerando que a área de um paralelogramo equivale ao produto da distância entre dois lados paralelos pelo comprimento de um desses lados, a área do triângulo pode ser expressa como sendo a metade do produto de qualquer um de seus lados pela distância desse lado ao vértice oposto Assim:

$$S_{\text{Triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_A$$

$$S_{\text{Triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_B$$

$$S_{\text{Triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_C$$

Exercício resolvido

12 Na figura a seguir, ABCD é um quadrado cujos lados medem 20 cm e M é o ponto médio do lado $\overline{AB}$.

Determine a distância x do ponto C ao segmento $\overline{DM}$.

Resolução:

Como o triângulo CMD tem a mesma base e altura do quadrado ABCD, a área desse triângulo mede:

$$[CMD] = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 = 200 \text{ cm}^2$$

Como M é ponto médio do lado $\overline{AB}$, pelo teorema de Pitágoras, no triângulo AMD, temos:

$$DM^2 = AM^2 + AD^2$$
$$DM^2 = 10^2 + 20^2$$
$$DM^2 = 100 + 400$$
$$DM^2 = 500$$
$$DM = +\sqrt{500}$$
$$DM = 10\sqrt{5} \text{ cm}$$

Assim, adotando o lado $\overline{DM}$ como base do triângulo CDM, sua área pode ser expressa por:

$$[CMD] = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{5} \cdot x$$

Portanto:

$$200 = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{5} \cdot x$$
$$x = \frac{40}{\sqrt{5}}$$

Racionalizando o denominador dessa fração, obtemos:

$$x = \frac{40}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{40\sqrt{5}}{5} = 8\sqrt{5} \text{ cm}$$

Fórmulas trigonométricas da área de triângulos

Considerando que a área de um paralelogramo equivale ao produto dos comprimentos de dois lados adjacentes pelo seno do ângulo formado por eles, a área do triângulo também pode ser expressa como sendo a metade do produto de dois de seus lados e do seno do ângulo formado por eles. Assim:

$$S_{Triângulo} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot sen(\gamma) \qquad S_{Triângulo} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot sen(\beta)$$

$$S_{Triângulo} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot sen(\alpha)$$

Exercícios resolvidos

13 A área do triângulo ABC, em que o ângulo interno de vértice A mede 30°, o lado $\overline{AB}$ mede 9 cm, e o lado $\overline{AC}$ mede 10 cm, é igual a:

A $90\ cm^2$

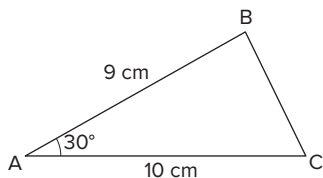
B $45\sqrt{3}\ cm^2$

C $45\ cm^2$

D $\frac{45\sqrt{2}}{2}\ cm^2$

E $22{,}5\ cm^2$

Resolução:

Uma figura de acordo com o enunciado é:

A área desse triângulo equivale a:

$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot sen(30°)$$

$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}$$

$$[ABC] = 22{,}5\ cm^2$$

Alternativa: E

14 A respeito da área do triângulo ABC, em que o ângulo interno de vértice A mede 60°, o lado $\overline{AB}$ mede 8 cm, e o lado $\overline{BC}$ mede 7 cm, pode-se afirmar que:

A é maior do que $8\sqrt{3}\ cm^2$.

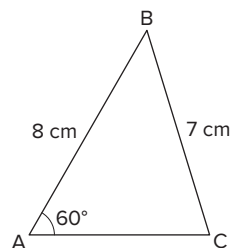
B é menor do que $8\sqrt{3}\ cm^2$.

C é igual a $4\sqrt{3}\ cm^2$.

D há duas possibilidades que diferem de $4\sqrt{3}\ cm^2$ uma da outra.

E há duas possibilidades que diferem de $8\sqrt{3}\ cm^2$ uma da outra.

Resolução:

Uma figura de acordo com o enunciado é:

Sendo x o comprimento, em centímetros, do lado $\overline{AC}$, pelo teorema dos cossenos, tem-se:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(60°)$$

$$7^2 = 8^2 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \frac{1}{2}$$

$$49 = 64 + x^2 \quad 8x$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 2}{2} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Como x_1 e x_2 são positivos, há duas possibilidades para a área desse triângulo:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot sen(60°) = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}\ cm^2$$

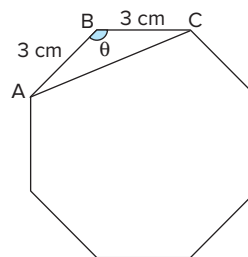
$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 \cdot sen(60°) = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\ cm^2$$

Essas áreas diferem de $S_1 - S_2 = 10\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\ cm^2$.

Alternativa: D

15 Se A, B e C são vértices consecutivos de um octógono regular de lados 3 cm, qual deve ser a área do triângulo ABC?

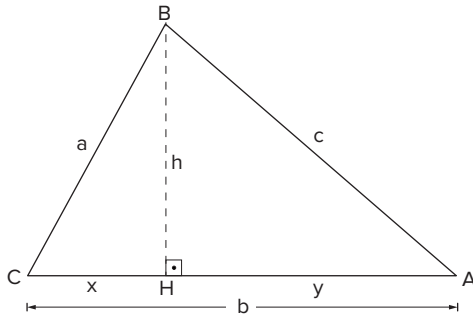
Resolução:

Uma figura de acordo com o enunciado é:

Sendo θ a medida, em graus, do ângulo interno do octógono regular, adotando n = 8 na expressão $\theta = \frac{(n \quad 2) \cdot 180°}{n}$, temos que $\theta = \frac{(8 \quad 2) \cdot 180°}{8} = 135°$

Como $sen(135°) = sen(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, a área do triângulo ABC equivale a:

$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot sen(135°) = \frac{9}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{4}\ cm^2$$

Fórmula de Heron

A medida h da altura relativa à base b de um triângulo cujos lados medem a, b e c pode ser calculada resolvendo-se um sistema de equações provenientes da aplicação do teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos obtidos pelo traçado dessa altura:

Sendo x e y as projeções ortogonais dos lados de medidas a e c sobre a base do triângulo, temos:

$$\begin{cases} a^2 = x^2 + h^2 \\ b = x + y \\ c^2 = y^2 + h^2 \end{cases}$$

Da segunda equação do sistema, temos que $y = b - x$. Assim, substituindo y na terceira equação:

$$c^2 = (b - x)^2 + h^2$$
$$c^2 = b^2 - 2bx + x^2 + h^2$$

Da primeira equação do sistema, temos que $a^2 = x^2 + h^2$. Assim, substituindo $x^2 + h^2$ na equação anterior:

$$c^2 = b^2 - 2bx + \underbrace{x^2 + h^2}_{a^2}$$
$$c^2 = b^2 - 2bx + a^2$$
$$2bx = a^2 + b^2 - c^2$$
$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$$

Substituindo x na primeira equação do sistema, teremos:

$$\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}\right)^2 + h^2 = a^2$$

Para facilitar a notação **dos próximos passos**, vamos indicar as áreas dos quadrados dos lados a, b e c do triângulo da seguinte maneira: $\begin{cases} A = a^2 \\ B = b^2 \\ C = c^2 \end{cases}$

Desse modo:

$$h^2 + \left(\frac{(A + B) - C}{2b}\right)^2 = A$$

$$h^2 + \frac{(A + B)^2 - 2(A + B)C + C^2}{4b^2} = A$$
$$h^2 + \frac{A^2 + 2AB + B^2 - 2AC - 2BC + C^2}{4B} = A$$
$$\frac{4Bh^2 + A^2 + 2AB + B^2 - 2AC - 2BC + C^2}{4B} = A$$
$$4Bh^2 + A^2 + 2AB + B^2 - 2AC - 2BC + C^2 = 4AB$$
$$4Bh^2 = 4AB - A^2 - 2AB - B^2 + 2AC + 2BC - C^2$$
$$4Bh^2 = 2AC + 2BC - C^2 - A^2 + 2AB - B^2$$

Separando as parcelas $2AC + 2BC = AC + BC + AC + BC$ e fatorando o trinômio quadrado perfeito formado pelos três últimos termos da expressão anterior, teremos:

$$4Bh^2 = AC + BC + AC + BC - C^2 - (A - B)^2$$

Podemos dar continuidade ao processo de fatoração usando o artifício algébrico de somar e subtrair o termo 2abC entre cada par de parcelas AC + BC:

$$4Bh^2 = AC + 2abC + BC + AC - 2abC + BC - C^2 - (A - B)^2$$
$$4Bh^2 = C(A + 2ab + B) + C(A - 2ab + B) - C^2 - (A - B)^2$$

Substituindo $A = a^2$ e $B = b^2$ no segundo membro da última expressão:

$$4Bh^2 = C\underbrace{(a^2 + 2ab + b^2)}_{} + C\underbrace{(a^2 - 2ab + b^2)}_{} - C^2 - \overbrace{(a^2 - b^2)^2}^{}$$

$$4Bh^2 = C(a + b)^2 + C(a - b)^2 - C^2 - [(a + b)(a - b)]^2$$

Reorganizando os termos do segundo membro:

$$4Bh^2 = \underbrace{C(a - b)^2 - C^2}_{} - \underbrace{(a + b)^2(a - b)^2 + C(a + b)^2}_{}$$
$$4Bh^2 = C[(a - b)^2 - C] - (a + b)^2[(a - b)^2 - C]$$
$$4Bh^2 = [(a - b)^2 - C][C - (a + b)^2]$$

Substituindo $C = c^2$:

$$4Bh^2 = [(a - b)^2 - c^2][c^2 - (a + b)^2]$$
$$4Bh^2 = [(a - b) + c][(a - b) - c][c - (a + b)][c + (a + b)]$$
$$4Bh^2 = [a - b + c][a - b - c][c - a - b][c + a + b]$$

Multiplicando por (−1) as expressões no segundo e quarto pares de colchetes:

$$4Bh^2 = [a - b + c][-a + b + c][-c + a + b][+c + a + b]$$

Reorganizando os fatores do segundo membro e as parcelas de alguns colchetes:

$$4Bh^2 = [a + b + c][-a + b + c][a - b + c][a + b - c]$$

Fazendo $a + b + c = 2p$, teremos:

$$\begin{cases} -a + b + c = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a) \\ a - b + c = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2(p - b) \\ a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c) \end{cases}$$

FRENTE 3

Substituindo essas expressões no resultado da fatoração, temos:

$$4Bh^2 = [2p][2(p-a)][2(p-b)][2(p-c)]$$
$$4Bh^2 = 16p(p-a)(p-b)(p-c)$$
$$h^2 = \frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4B}$$
$$h^2 = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{B}$$

Então, substituindo $B = b^2$ e isolando a medida da altura do triângulo:

$$h = \sqrt{\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2}}$$
$$h = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{b}$$

Assim, a área do triângulo será:

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$
$$S = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{b} \cdot \frac{\cancel{2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{\cancel{b}}$$
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Portanto, se a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo, p é o seu semiperímetro e $S_{\text{Triângulo}}$ representa sua área, então:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S_{\text{Triângulo}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Exercício resolvido

16 Calcule a área de um triângulo cujos lados medem 7 cm, 8 cm e 9 cm.

Resolução:

Usando a fórmula de Heron, a área desse triângulo pode ser calculada em três passos.

No **primeiro passo**, calcula-se o semiperímetro do triângulo:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{7+8+9}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ cm}$$

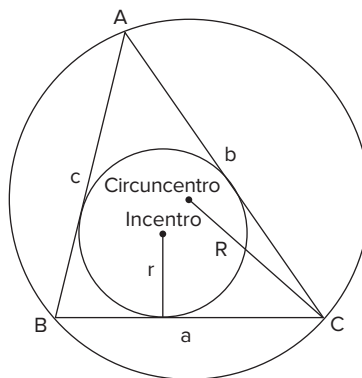
No **segundo passo**, calculam-se as diferenças do semiperímetro para cada um dos lados do triângulo:

$$\begin{cases} p - a = 12 - 7 = 5 \text{ cm} \\ p - b = 12 - 8 = 4 \text{ cm} \\ p - c = 12 - 9 = 3 \text{ cm} \end{cases}$$

O **terceiro passo** consiste em calcular a raiz quadrada do produto de todos os resultados obtidos nos dois primeiros passos:

$$S_{\text{Triângulo}} = \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \sqrt{720} \text{ cm}^2$$
$$S_{\text{Triângulo}} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} = 2^2 \cdot 3\sqrt{5} = 12\sqrt{5} \text{ cm}^2$$

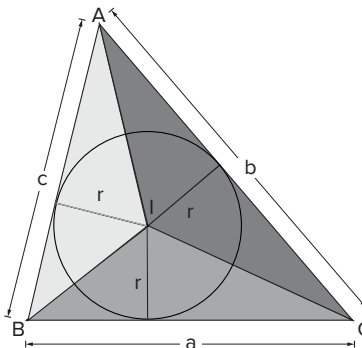
Triângulos e círculos

Como vimos anteriormente, todo triângulo é inscritível e circunscritível em circunferências cujos centros são, respectivamente, chamados de incentro e circuncentro do triângulo

O incentro do triângulo é o ponto de encontro das bissetrizes de seus ângulos internos, e o circuncentro é o ponto de encontro das mediatrizes de seus lados.

As medidas dos raios dessas circunferências, indicadas na figura por **r** e **R**, estabelecem certas relações com os comprimentos dos lados e a área do triângulo.

Área do triângulo em função do raio da circunferência inscrita

A área de um triângulo é igual ao produto do seu semiperímetro pela medida do raio da circunferência inscrita nele.

Sendo **r** a medida do raio da circunferência de centro I inscrita em um triângulo ABC, os triângulos IAB, IAC e IBC terão altura **r**.

Como a área do triângulo ABC equivale à soma das áreas desses três triângulos:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle IBC} + S_{\triangle IAC} + S_{\triangle IAB} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot r + \frac{1}{2} \cdot b \cdot r + \frac{1}{2} \cdot c \cdot r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \left(\frac{a+b+c}{2}\right) \cdot r$$

Então, indicando por *p* o semiperímetro de um triângulo de área $S_{\text{Triângulo}}$:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S_{\text{Triângulo}} = p \cdot r$$

Exercício resolvido

17 Determine a medida do raio da circunferência inscrita em um triângulo sabendo que seus lados medem 5 m, 6 m e 7 m.

Resolução:

Usando a fórmula de Heron:

- Primeiro passo: $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+6+7}{2} = \frac{18}{2} = 9$ m
- Segundo passo: $\begin{cases} p - a = 9 - 5 = 4 \text{ m} \\ p - b = 9 - 6 = 3 \text{ m} \\ p - c = 9 - 7 = 2 \text{ m} \end{cases}$
- Terceiro passo: calcular a raiz quadrada do produto de todos os resultados obtidos nos dois primeiros passos:

$$S_{\text{Triângulo}} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{216} = \sqrt{2^3 \cdot 3^3} = 6\sqrt{6} \text{ m}^2$$

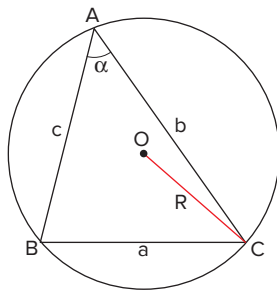
Sendo r a medida do raio da circunferência inscrita no triângulo, da expressão $S_{\text{Triângulo}} = p \cdot r$, temos:

$$6\sqrt{6} = 9 \cdot r$$
$$r = \frac{6\sqrt{6}}{9} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ m}$$

Área do triângulo em função do raio da circunferência circunscrita

A área de um triângulo é igual ao produto das medidas de seus lados dividido pelo quádruplo da medida do raio da circunferência circunscrita a ele.

Sendo ***R*** a medida do raio da circunferência de centro O circunscrita a um triângulo ABC em que α é a medida do ângulo interno de vértice A e **a** = BC, pelo teorema dos senos, temos:

$$\frac{BC}{\text{sen}(\alpha)} = 2R \Rightarrow \text{sen}(\alpha) = \frac{a}{2R}$$

Como a área do triângulo ABC equivale ao produto das medidas de dois lados pelo seno do ângulo formado por eles:

$$S_{\text{Triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \text{sen}(\alpha) \Leftrightarrow S_{\text{Triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \frac{a}{2R}$$

$$S_{\text{Triângulo}} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

Exercício resolvido

18 Determine a medida do raio da circunferência circunscrita em um triângulo cujos lados medem 5 m, 6 m e 9 m.

Resolução:

Usando a fórmula de Heron:

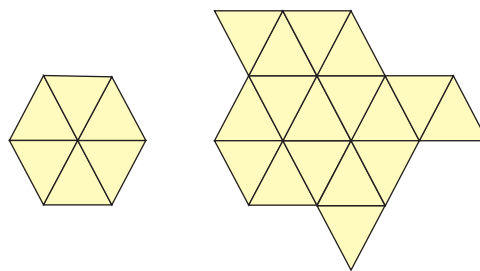
- Primeiro passo: $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+6+9}{2} = \frac{20}{2} = 10$ m
- Segundo passo: $\begin{cases} p - a = 10 - 5 = 5 \text{ m} \\ p - b = 10 - 6 = 4 \text{ m} \\ p - c = 10 - 9 = 1 \text{ m} \end{cases}$
- Terceiro passo: consiste em calcular a raiz quadrada do produto de todos os resultados obtidos nos dois primeiros passos:

$$S_{\text{Triângulo}} = \sqrt{10 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

Sendo R a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo, da expressão $S_{\text{Triângulo}} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$, temos:

$$\frac{a \cdot b \cdot c}{4R} = 10\sqrt{2}$$
$$5 \cdot 6 \cdot 9 = 4R \cdot 10\sqrt{2}$$
$$270 = R \cdot 40\sqrt{2}$$
$$R = \frac{270}{40\sqrt{2}} = \frac{27\sqrt{2}}{8} \text{ m}$$

Fórmula para o triângulo equilátero

Mesmo havendo muitas maneiras genéricas de se obter a área de um triângulo, é recomendável conhecer uma expressão específica para a área do triângulo equilátero. Isso porque, além de ser uma figura muito usada no estudo da Geometria Espacial como base de prismas e pirâmides, os triângulos equiláteros também são formas modulares capazes de preencher superfícies planas de diversos formatos por meio de justaposição. Exemplos:

Assim, como todos os lados de um triângulo equilátero têm o mesmo comprimento ℓ e todos os ângulos internos medem 60°, sendo **S** a área do triângulo equilátero:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \ell \cdot \text{sen}(60°)$$
$$S = \frac{1}{2} \cdot \ell^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, a área do triângulo equilátero de lado ℓ pode ser expressa por:

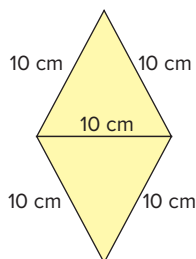
$$S = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

Exercício resolvido

19 Se a diagonal menor de um losango mede o mesmo que seus lados, 10 cm, qual é a área do losango?

A $75\sqrt{3}$ cm²
B $50\sqrt{3}$ cm²
C $50\sqrt{2}$ cm²
D $25\sqrt{2}$ cm²
E $25\sqrt{3}$ cm²

Resolução:

Uma figura de acordo com o enunciado é:

A área de cada triângulo equilátero que compõe o losango é $S = \frac{10^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$ cm²

Portanto, a área do losango é:

$$2 \cdot S = 2 \cdot 25\sqrt{3} = 50\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Área dos polígonos regulares

Apenas três tipos de polígonos regulares são capazes de preencher superfícies planas por meio de justaposição:

- os quadrados;
- os triângulos equiláteros;
- os hexágonos regulares.

O formato do quadrado foi escolhido como principal representante das unidades geométricas de área, como o metro quadrado ou a polegada quadrada. Isso se deve ao fato de que a expressão para a área **S** de um quadrado com lado ℓ é bem simples:

$$S = \ell^2$$

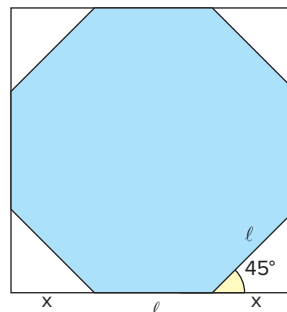
Entre os triângulos equiláteros e os hexágonos regulares de mesmo lado há uma importante relação de equivalência que pode ser observada traçando-se as diagonais que passam pelo centro de um hexágono regular:

$$S_{\text{Hexágono}} = 6 \quad S_{\text{Triângulo equilátero}}$$

Então:

$$S_{\text{Hexágono regular}} = 6 \cdot \left(\frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Octógono regular

A área de um octógono regular de lado ℓ pode ser calculada a partir da área do quadrado que se obtém prolongando alguns lados do octógono, como mostra a figura:

Como os ângulos externos do octógono medem $360° : 8 = 45°$, sendo x os comprimentos dos prolongamentos dos lados do octógono, temos:

$$\cos(45°) = \frac{x}{\ell} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{\ell} \Rightarrow 2x = \ell\sqrt{2}$$

Assim, o lado do quadrado obtido mede $\ell + 2x = \ell + \ell\sqrt{2}$, e sua área:

$$S_{\text{Quadrado}} = \left(\ell + \ell\sqrt{2}\right)^2$$
$$S_{\text{Quadrado}} = \ell^2 + 2\sqrt{2}\ell^2 + 2\ell^2$$
$$S_{\text{Quadrado}} = 3\ell^2 + 2\sqrt{2}\ell^2$$

A área de cada triângulo exterior ao octógono e interior ao quadrado é:

$$S_{\text{Triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot x \cdot \text{sen}(45°)$$

Substituindo $x = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$:

$$S_{\text{Triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \frac{\ell\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$S_{\text{Triângulo}} = \frac{\ell^2}{4}$$

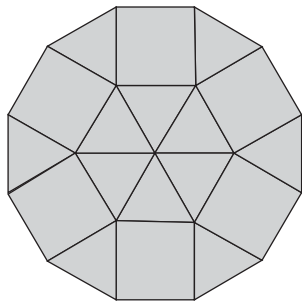
A área desse octógono regular é tal que:

$$S_{\text{Octógono}} + 4 \cdot S_{\text{Triângulo}} = S_{\text{Quadrado}}$$
$$S_{\text{Octógono}} + 4 \cdot \frac{\ell^2}{4} = 3\ell^2 + 2\sqrt{2}\ell^2$$
$$S_{\text{Octógono}} + \ell^2 = 3\ell^2 + 2\sqrt{2}\ell^2$$
$$S_{\text{Octógono}} = 2\ell^2 + 2\sqrt{2}\ell^2$$

Portanto, a área de um octógono regular de lado ℓ pode ser expressa por:

$$S_{\text{Octógono}} = \left(2\sqrt{2} + 2\right) \cdot \ell^2$$

Dodecágono regular

A área de um dodecágono regular de lado ℓ pode ser calculada a partir das áreas dos quadrados e triângulos equiláteros que o compõem:

Como um dodecágono regular de lado ℓ é formado por 6 quadrados de lado ℓ e mais 12 triângulos equiláteros também de lado ℓ, sua área é tal que:

$$S_{Dodecágono} = 6 \quad S_{Quadrado} + 12 \cdot S_{Triângulo}$$

$$S_{Dodecágono} = 6 \cdot \ell^2 + 12 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

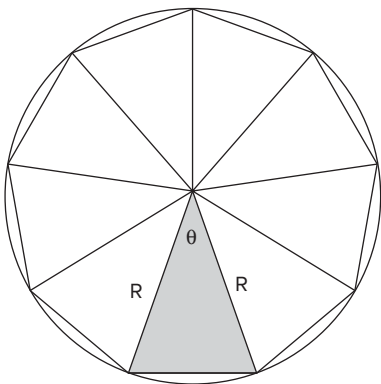
$$S_{Dodecágono} = 6 \cdot \ell^2 + 3\sqrt{3}\ell^2$$

Portanto, a área de um dodecágono regular de lado ℓ pode ser expressa por:

$$S_{Dodecágono} = \left(6 + 3\sqrt{3}\right) \cdot \ell^2$$

Áreas de octógonos, dodecágonos e demais polígonos regulares podem ser calculadas de modo mais eficiente se for conhecida a medida do raio de alguma de suas circunferências associadas (a inscrita ou a circunscrita).

Área dos polígonos inscritos

Considere um polígono regular com **n** lados e inscrito em uma circunferência de raio ***R***.

Traçando todos os raios da circunferência que unem o centro a algum vértice do polígono, obtemos exatamente **n** triângulos isósceles congruentes cuja área é:

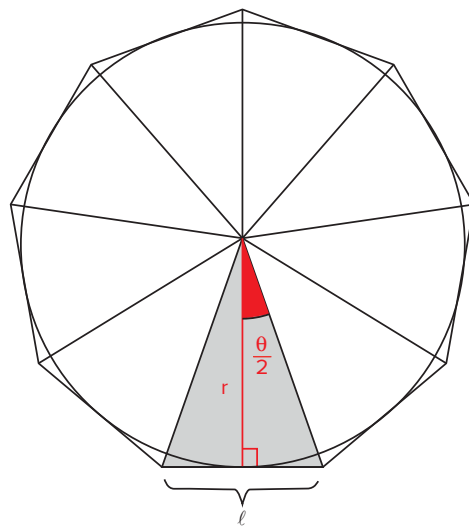
$$S_{Triângulo} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot sen(\theta)$$

Como $\theta = \frac{360°}{n}$ e o polígono é composto de exatamente **n** triângulos justapostos, a área desse polígono regular é tal que $S_{Polígono} = n \cdot S_{Triângulo}$.

Assim, a área de um polígono regular com **n** lados e inscrito em uma circunferência de raio ***R*** pode ser obtida pela expressão:

$$S_{Polígono} = \frac{n \cdot R^2}{2} \cdot sen\left(\frac{360°}{n}\right)$$

Área dos polígonos circunscritos

Considere um polígono regular com **n** lados e circunscrito a uma circunferência de raio **r**.

Traçando todos os raios da circunferência que unem o centro a algum vértice do polígono, obtemos novamente **n** triângulos isósceles congruentes cujas bases coincidem com os lados e cujas alturas coincidem com os apótemas do polígono Então, sendo ℓ a medida dos lados do polígono, a área de cada triângulo é:

$$S_{Triângulo} = \frac{\ell \cdot r}{2}$$

Como $\frac{\theta}{2} = \frac{180°}{n}$ e $tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\ell/2}{r} = \frac{\ell}{2r}$, o lado ℓ do polígono pode ser expresso por:

$$\ell = 2r \cdot tg\left(\frac{180°}{n}\right)$$

Assim, com $S_{Polígono} = n \cdot S_{Triângulo}$, a área de um polígono regular circunscrito a uma circunferência de raio r é tal que:

$$S_{Polígono} = nr^2 \cdot tg\left(\frac{180°}{n}\right)$$

FRENTE 3

Exercícios resolvidos

20 Usando a aproximação $\sqrt{2} \cong 1,414$, faça uma estimativa do valor da área de um octógono que seja inscritível em uma circunferência com 40 cm de raio.

Resolução:

Com n = 8 e R = 40 cm, a área desse octógono é:

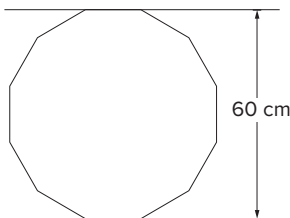
$$S_{Octógono} = \frac{n \cdot R^2}{2} \cdot sen\left(\frac{360°}{n}\right)$$

$$S_{Octógono} = \frac{8 \cdot 40^2}{2} \cdot sen\left(\frac{360°}{8}\right)$$

$$S_{Octógono} = 4 \cdot 1600 \cdot sen(45°)$$

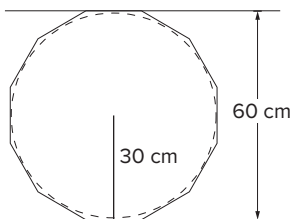
$$S_{Octógono} = 6400 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3200\sqrt{2}\ cm^2$$

Assim, se $\sqrt{2} \cong 1,414$, pode-se estimar essa área em, aproximadamente, 4525 cm^2

21 Faça uma estimativa da área do polígono regular ilustrado pela seguinte figura:

Dados:

θ	9°	12°	15°	18°
tg(θ)	0,16	0,21	0,27	0,32

Resolução:

Observe que o polígono tem 12 lados e que a distância de 60 cm equivale ao diâmetro da circunferência que o polígono circunscreve.

Com n = 12 e r = 60 : 2 = 30 cm, a área S desse octógono é:

$$S_{Octógono} = nr^2 \cdot tg\left(\frac{180°}{n}\right)$$

$$S_{Octógono} = 12 \cdot 30^2 \cdot tg\left(\frac{180°}{12}\right)$$

$$S_{Octógono} = 10800 \cdot tg(15°)$$

Assim, sendo $tg(15°) \cong 0,27$, pode-se estimar essa área em, aproximadamente, 2916 cm^2.

Área do círculo

Os círculos são as figuras geométricas resultantes da reunião dos pontos de uma circunferência aos pontos situados no interior dessa circunferência. Assim, podemos dizer que a circunferência de centro **O** e raio **r** é o contorno do círculo de centro **O** e raio **r**.

Assim:

- Circunferências possuem comprimento: $C = 2\pi \cdot r$.
- Círculos possuem área: $A = \pi \cdot r^2$.

Essas expressões foram originalmente obtidas dos princípios da proporcionalidade e de exaustivos cálculos numéricos.

Uma maneira de se obter a expressão da área de um círculo de raio unitário é confrontar as funções obtidas das fórmulas para os seus polígonos inscritos e circunscritos.

A área de um polígono com n lados inscrito em um círculo de raio R é $S_{Polígono} = \frac{n \cdot R^2}{2} \cdot sen\left(\frac{360°}{n}\right)$. Então, se R = 1, a função ordinal $f(n) = \frac{n}{2} \cdot sen\left(\frac{360°}{n}\right)$, com $n \geq 3$, associa o número de lados do polígono ao valor de sua área. Como o polígono está situado no interior do círculo, sua área é sempre menor que a do círculo:

$$f(3) = \frac{3}{2} \cdot sen\left(\frac{360°}{3}\right) = 1,5 \cdot sen(120°) = 1,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cong$$
$$\cong 1,5 \cdot \frac{1,73}{2} = 1,2975$$

$$f(4) = \frac{4}{2} \cdot sen\left(\frac{360°}{4}\right) = 2 \cdot sen(90°) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$f(6) = \frac{6}{2}\ sen\left(\frac{360°}{6}\right) = 3\ sen(60°) = 3\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 3\ \frac{1,73}{2} = 2,595$$

$$f(12) = \frac{12}{2} \cdot sen\left(\frac{360°}{12}\right) = 6 \cdot sen(30°) = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

$$f(24) = \frac{24}{2}\ sen\left(\frac{360°}{24}\right) = 12\ sen(15°) = 12\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \cong$$
$$\cong 12\ \frac{2,45 - 1,41}{4} = 3,12$$

A área de um polígono com n lados circunscrito em um círculo de raio r é $S_{Polígono} = nr^2 \cdot tg\left(\frac{180°}{n}\right)$. Então, se r = 1, a função ordinal $g(n) = n \cdot tg\left(\frac{180°}{n}\right)$, com $n \geq 3$, associa o número de lados do polígono circunscrito ao valor de sua área. Como o círculo está situado no interior do polígono, sua área é sempre menor que a do polígono:

$$g(3) = 3 \cdot tg\left(\frac{180°}{3}\right) = 3 \cdot tg(60°) = 3 \cdot \sqrt{3} \cong 3 \cdot 1,73 = 5,19$$

$$g(4) = 4 \cdot tg\left(\frac{180°}{4}\right) = 4 \cdot tg(45°) = 4 \cdot 1 = 4$$

$$g(6) = 6 \cdot tg\left(\frac{180°}{6}\right) = 6 \cdot tg(30°) = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cong 2 \cdot 1,73 = 3,46$$

$$g(12) = 12 \cdot tg\left(\frac{180°}{12}\right) = 12 \cdot tg(15°) = 12 \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right) \cong$$
$$\cong 12 \cdot (2 - 1,73) = 3,24$$

Esses poucos cálculos efetuados com as funções f e g já permitem concluir que a área **S** de um círculo de raio unitário é tal que 3,12 < S < 3,24. Calculando os valores de f(n) e g(n) para n = 200 com o auxílio de uma calculadora científica, podemos melhorar a estimativa da área desse círculo. Assim:

$$3{,}1411 < S < 3{,}1418$$

Esse resultado garante tanto a parte inteira quanto as primeiras casas decimais do valor de S. Portanto, S ≅ 3,14.

Com o crescimento do valor de n, esse processo permite aproximar o valor da constante irracional π em tantas casas decimais quantas forem computáveis pela calculadora científica utilizada. Fazendo n tender ao infinito, o limite dessas funções leva à conclusão de que a área do círculo de raio unitário é S = π.

Como todos os círculos são semelhantes, sendo k a razão de semelhança de dois círculos, um de raio unitário e outro de raio **r**:

$$k = \frac{1}{r}$$

Então, sendo $S_{\odot}$ a área do círculo de raio **r** e S a área do círculo de raio unitário:

$$k^2 = \frac{S}{S_{\odot}}$$

Portanto:

$$\left(\frac{1}{r}\right)^2 = \frac{S}{S_{\odot}} \Leftrightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{S}{S_{\odot}} \Rightarrow S_{\odot} = S \cdot r^2$$

Assim, do limite das funções f e g analisado anteriormente, podemos concluir que a área de um círculo de raio **r** é expressa por:

$$S_{\odot} = \pi \cdot r^2$$

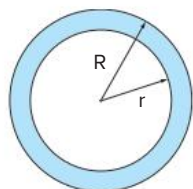
! Atenção

O número π é usado para expressar as grandezas do comprimento da circunferência e da área do círculo das seguintes maneiras:

1. O comprimento de uma circunferência de raio r é dado pela expressão 2πr.
2. A área de um círculo de raio r é dada pela expressão πr^2

Coroa circular

A região compreendida por duas circunferências de mesmo centro é denominada coroa circular.

A área de uma coroa circular é igual à diferença entre as áreas dos círculos determinados pelas circunferências, máxima e mínima, da coroa.

Coroa circular

Assim, sendo **R** e **r** as medidas dos raios das circunferências de uma coroa circular, com R > r, a área dessa coroa pode ser expressa por:

$$S_{Coroa} = r \cdot R^2 - \pi \cdot r^2$$

$$S_{Coroa} = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

Exercícios resolvidos

22 **UTFPR 2014** A área do círculo, em cm^2, cuja circunferência mede 10π cm, é:

A 10π B 36π C 64π D 50π E 25π

Resolução:

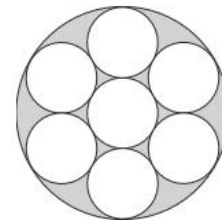
Sendo r a medida do raio do círculo, do comprimento de sua circunferência, temos:

$$2\pi r = 10\pi \Leftrightarrow r = 5 \text{ cm}$$

Portanto, a área do círculo é:

$$\pi \cdot r^2 = \pi \cdot 5^2 = 25 \text{ cm}^2$$

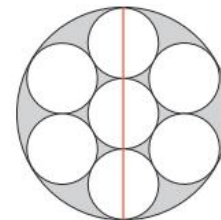
Alternativa: E

23 **FGV 2011** Cada um dos 7 círculos menores da figura tem raio 1 cm. Um círculo pequeno é concêntrico com o círculo grande, e tangencia os outros 6 círculos pequenos. Cada um desses 6 outros círculos pequenos tangencia o círculo grande e 3 círculos pequenos.

Na situação descrita, a área da região sombreada na figura, em cm^2, é igual a:

A π B $\frac{3\pi}{2}$ C 2π D $\frac{5\pi}{2}$ E 3π

Resolução:

A área de cada um dos círculos menores é $S_1 = \pi \cdot 1^2 = \pi \text{ cm}^2$.

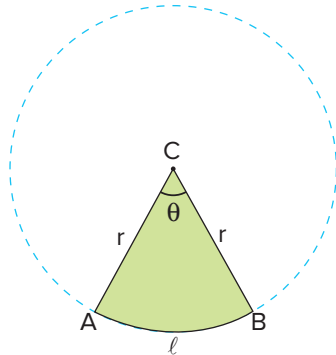
Traçando um eixo de simetria na figura, podemos observar que o diâmetro do círculo maior equivale ao triplo do diâmetro de um dos círculos menores.

O raio do círculo maior é R = 3 · 1 cm = 3 cm e sua área é $S_2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \text{ cm}^2$.

Assim, a área sombreada é $S = S_2 - 7 \cdot S_1 = 9\pi - 7\pi = 2\pi \text{ cm}^2$.

Alternativa: C

Setor circular

A figura cercada por dois raios distintos de um círculo e um dos arcos determinados pelas extremidades desses raios é denominada setor circular.

Na imagem a seguir, podemos observar um setor circular ABC em que C é o centro da circunferência, os raios $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$ são os lados retilíneos e o arco $\overset{\frown}{AB}$ é o lado curvilíneo.

O ângulo $A\hat{C}B$ formado pelos lados retilíneos tem medida θ e é diretamente proporcional à área do setor. Logo, como a área do próprio círculo também é diretamente proporcional à área do setor circular, existe uma constante de proporcionalidade k, tal que:

$$S_{Setor} = k \cdot \theta \cdot S_{Círculo}$$

O valor da constante k pode ser determinado considerando $\theta = 360°$, pois, nesse caso, a área do setor deve coincidir com a área do círculo que o contém

$$\theta = 360° \Rightarrow S_{Setor} = S_{Círculo}$$

Assim, sendo r o raio dessa circunferência:

$$\pi \cdot r^2 = k \cdot 360° \cdot \pi \cdot r^2 \Leftrightarrow k = \frac{1}{360°}$$

Portanto, a área de um setor circular determinado por um ângulo central de medida θ em uma circunferência de raio r é expressa por:

$$S_{Setor} = \frac{\theta \cdot \pi \cdot r^2}{360°}$$

! Atenção

A área de um setor circular equivale à metade do produto do comprimento do lado curvilíneo pelo comprimento de um dos lados retilíneos. Assim, sendo ℓ o comprimento do lado curvilíneo do setor de uma circunferência de raio *r*, é correto expressar a área do setor por:

$$S_{Setor} = \frac{\ell \cdot r}{2}$$

Demonstração:

Sendo c o comprimento da circunferência de raio r, temos:

$$\frac{\ell}{c} = \frac{\theta}{360°} \Rightarrow \ell = \frac{\theta\ c}{360°}$$

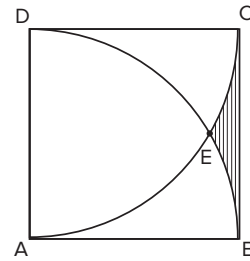
Como $c = 2\pi r$:

$$\ell = \frac{\theta \cdot 2\pi r}{360°} \Leftrightarrow \frac{\ell}{2} = \frac{\theta \cdot \pi r}{360°}$$

Multiplicando ambos os membros dessa expressão por r, temos:

$$\frac{\ell \cdot r}{2} = \frac{\theta \cdot \pi r^2}{360°}$$

Exercício resolvido

24 **Fuvest** Na figura, ABCD é um quadrado de lado 1, DEB e CEA são arcos de circunferências de raio 1. Logo, a área da região hachurada é:

A $1 - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$

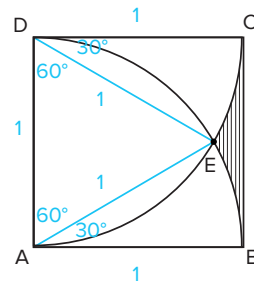
B $1 \quad \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

C $1 - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

D $1 + \frac{\pi}{3} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$

E $1 - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

Resolução:

Traçando os raios $\overline{AE}$ e $\overline{DE}$ das circunferências, temos a seguinte figura:

Com esses traços, o quadrado fica dividido em quatro regiões disjuntas: um triângulo equilátero de lado 1, dois setores circulares de 30° e a região hachurada.

A área do quadrado é $S_{Quadrado} = l^2 = 1^2 = 1$.

A área do triângulo equilátero é

$$S_{Triângulo} = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

A área de cada setor circular é

$$S_{Setor} = \frac{\theta \cdot \pi \cdot r^2}{360°} = \frac{30° \cdot \pi \cdot 1^2}{360°} = \frac{\pi}{12}$$

Assim, sendo S a área da região hachurada, temos:

$$S + S_{Triângulo} + 2 \cdot S_{Setor} = S_{Quadrado}$$

$$S + \frac{\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot \frac{\pi}{12} = 1$$

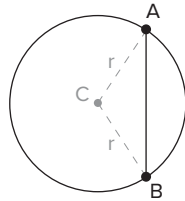
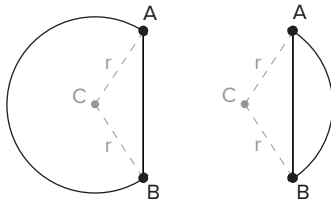
$$S = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}$$

Alternativa: C

! Atenção

Sendo ℓ o comprimento do lado curvilíneo de um setor circular contido em um círculo de raio r, o perímetro desse setor é igual a $\ell + 2r$.

Segmento circular

Quando dois pontos distintos A e B de uma mesma circunferência de centro C são unidos por um segmento de reta, as regiões determinadas pela corda $\overline{AB}$ dentro do círculo de centro C são denominadas segmentos circulares.

Segmentos circulares possuem apenas dois lados: um retilíneo, que é a corda $\overline{AB}$ da circunferência, e um curvilíneo, que é um dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ da circunferência

Se a corda $\overline{AB}$ for diâmetro da circunferência, então os segmentos circulares serão congruentes e denominados semicírculos. A área de um semicírculo de raio r é $S_{Semicírculo} = \dfrac{\pi \cdot r^2}{2}$.

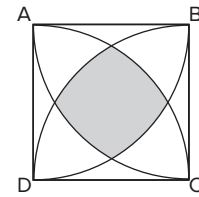
Se a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ for maior do que 180°, então a área do segmento circular será igual à soma da área do setor circular ABC, de ângulo central $\theta > 180°$, com a área do triângulo ABC.

$$\theta > 180° \Rightarrow S_{Segmento} = S_{Setor} + S_{Triângulo}$$

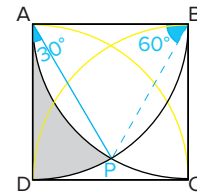
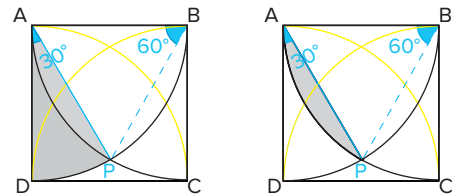
Se a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ for menor do que 180°, então a área do segmento circular será igual à diferença entre a área do setor circular ABC, de ângulo central $\theta < 180°$, e a área do triângulo ABC.

$$\theta < 180° \Rightarrow S_{Segmento} = S_{Setor} \quad S_{Triângulo}$$

Exercício resolvido

25 Os arcos de circunferência que determinam a região escurecida na figura a seguir têm seus centros nos vértices do quadrado ABCD de lado 6.

Determine a área da região escurecida.

Resolução:

Sendo P o ponto de interseção de dois arcos mais próximos do lado $\overline{CD}$ do quadrado, o triângulo APB é equilátero.

Sendo X a área perguntada e Y a área da região compreendida pelo lado $\overline{AD}$ do quadrado e pelos arcos $\overset{\frown}{AP}$ e $\overset{\frown}{DP}$, temos que $X + 4Y = 6^2 \Leftrightarrow X = 36 - 4Y$.
A área Y pode ser encontrada pela diferença entre as áreas de um setor circular de 30° e um segmento circular de 60°, ambos contidos em circunferências de raio 6

A área do setor circular de 30° é:

$$S_{Setor} = \frac{\theta \cdot \pi \cdot r^2}{360°} = \frac{30° \cdot \pi \cdot 6^2}{360°} = 3\pi$$

A área do segmento circular de 60° é:

$$S_{Segmento} = \frac{\theta \cdot \pi \cdot r^2}{360°} - \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{60° \cdot \pi \cdot 6^2}{360°} - \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 6\pi - 9\sqrt{3}$$

Assim:

$$Y = S_{Setor} S_{Segmento}$$
$$Y = 3\pi - \left(6\pi - 9\sqrt{3}\right)$$
$$Y = 9\sqrt{3} - 3\pi$$

Portanto:

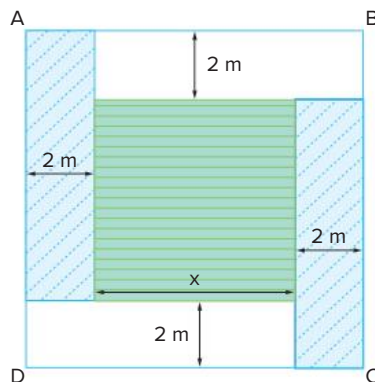
$$X = 36 - 4Y$$
$$X = 36 - 4 \cdot \left(9\sqrt{3} - 3\pi\right)$$
$$X = 36 - 36\sqrt{3} + 12\pi = 12\left(3 - 3\sqrt{3} + \pi\right)$$

Revisando

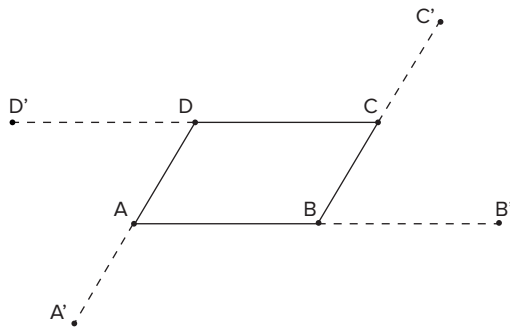
1 Uma empreiteira deseja comprar um terreno retangular para construir um condomínio e está considerando duas opções em um mesmo bairro. A tabela a seguir apresenta as dimensões e o preço de cada terreno.

Terreno	Comprimento	Largura	Preço
A	250 m	150 m	R$ 13.125.000,00
B	220 m	180 m	R$ 13.464.000,00

Levando em consideração apenas o tamanho e o preço, qual dos terrenos deve proporcionar um melhor negócio para a empreiteira?

2 **Unesp 2016** Renata pretende decorar parte de uma parede quadrada ABCD com dois tipos de papel de parede, um com linhas diagonais e outro com riscos horizontais. O projeto prevê que a parede seja dividida em um quadrado central, de lado x, e quatro retângulos laterais, conforme mostra a figura.

Se o total da área decorada com cada um dos dois tipos de papel é a mesma, então x, em metros, é igual a:

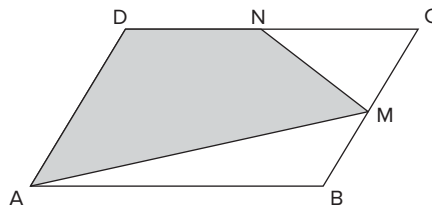
A $1 + 2\sqrt{3}$ B $2 + 2\sqrt{3}$ C $2 + \sqrt{3}$ D $1 + \sqrt{3}$ E $4 + \sqrt{3}$

3 Fuvest 2013

Percorre-se o paralelogramo *ABCD* em sentido anti-horário. A partir de cada vértice atingido ao longo do percurso, prolonga-se o lado recém-percorrido, construindo-se um segmento com mesmo comprimento que esse lado. As extremidades dos prolongamentos são denotadas por A', B', C' e D', de modo que os novos segmentos sejam, então, $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ e $\overline{DD'}$. Dado que AB = 4 e que a distância de D à reta determinada por A e B é 3, calcule a área do:

a) paralelogramo ABCD.

b) triângulo BB'C'.

c) quadrilátero A'B'C'D'.

4 ESPM 2014 Na figura a seguir, ABCD é um paralelogramo de área 24 cm^2. M e N são pontos médios de $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, respectivamente.

A área do polígono AMND é igual a:

A 20 cm^2

B 16 cm^2

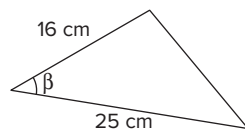
C 12 cm^2

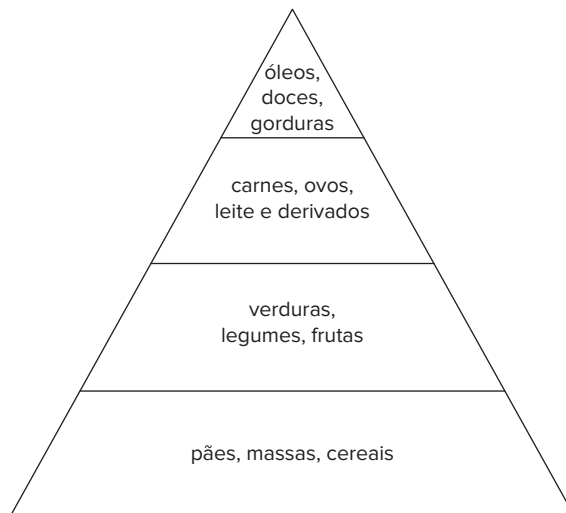
D 15 cm^2

E 18 cm^2

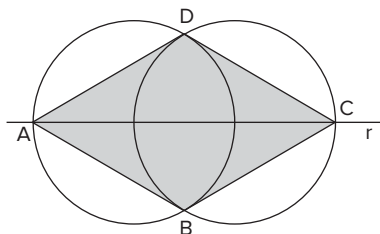
5 Qual o valor mais próximo da área de um terreno triangular com lados de 13 m, 15 m e 20 m?

A $10\ m^2$
B $20\ m^2$
C $50\ m^2$
D $100\ m^2$
E $150\ m^2$

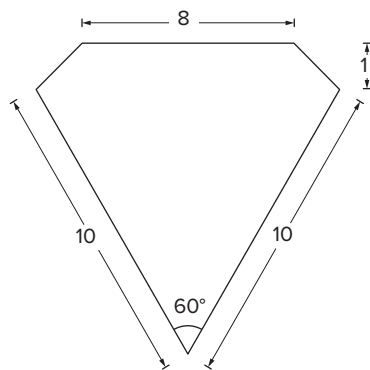
6 **UEPB 2013** Sabendo que a área do triângulo acutângulo indicado na figura é $100\sqrt{3}\ cm^2$, a medida do ângulo β é:

A $\frac{\pi}{6}$
B $\frac{\pi}{4}$
C $\frac{\pi}{3}$
D $\frac{\pi}{8}$
E $\frac{\pi}{5}$

7 UFG 2013 Um recurso visual muito utilizado para apresentar as quantidades relativas dos diferentes grupos de alimentos na composição de uma dieta equilibrada é a chamada "pirâmide alimentar", que usualmente é representada por um triângulo dividido em regiões, como na figura a seguir.

Considere que as regiões da figura dividem a altura do triângulo em partes iguais. No que se refere às áreas das regiões ocupadas por cada grupo de alimentos, o grupo com predominância de carboidratos ocupa:

A sete terços da área do grupo com predominância de proteínas.
B cinco sétimos da área do grupo com predominância de fibras.
C um sétimo da área do grupo com predominância de lipídios.
D o dobro da área do grupo com predominância de proteínas.
E cinco sétimos da área do grupo com predominância de vitaminas e sais minerais.

8 UFRGS 2015 As circunferências do desenho a seguir foram construídas de modo que seus centros estão sobre a reta r e que uma intercepta o centro da outra Os vértices do quadrilátero ABCD estão na interseção das circunferências com a reta r e nos pontos de interseção das circunferências

Se o raio de cada circunferência é 2, a área do quadrilátero ABCD é:

A $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **B** $3\sqrt{3}$ **C** $6\sqrt{3}$ **D** $8\sqrt{3}$ **E** $12\sqrt{3}$

9 **UFRGS 2015** O emblema de um super-herói tem a forma pentagonal, como representado na figura a seguir.

A área do emblema é:

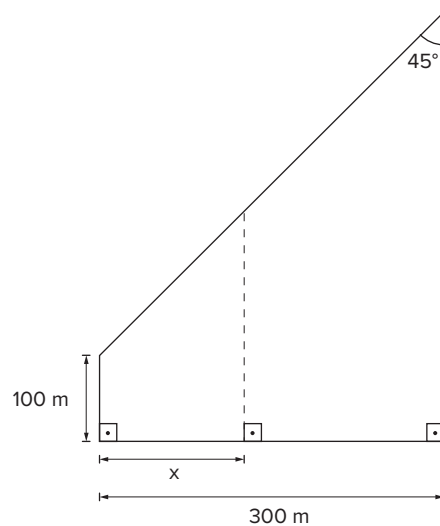
A $9 + 5\sqrt{3}$

B $9 + 10\sqrt{3}$

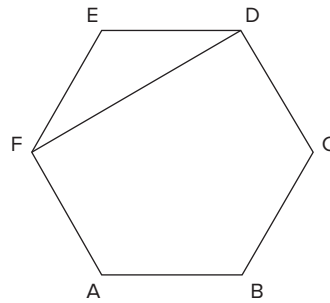
C $9 + 25\sqrt{3}$

D $18 + 5\sqrt{3}$

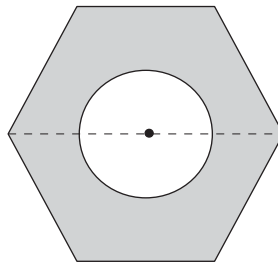
E $18 + 25\sqrt{3}$

10 **UFG 2013** Um agricultor pretende dividir um terreno em duas partes que possuam a mesma área. A figura a seguir representa o terreno e a divisão deve ser feita ao longo da linha vertical tracejada.

Considerando-se o exposto, determine o valor de x, com precisão de uma casa decimal.

Dado: $\sqrt{34} = 5,83$.

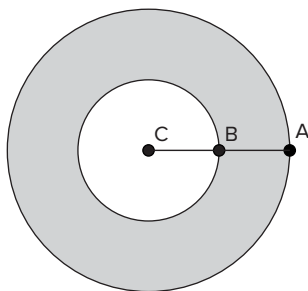
11 **UFRGS 2015** Considere o hexágono regular ABCDEF, no qual foi traçado o segmento $\overline{FD}$ medindo 6 cm, representado na figura a seguir.

A área do hexágono mede, em cm^2:

A $18\sqrt{3}$ **B** $20\sqrt{3}$ **C** $24\sqrt{3}$ **D** $28\sqrt{3}$ **E** $30\sqrt{3}$

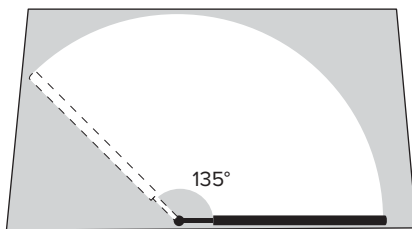
12 **UPE 2014** A figura a seguir representa um hexágono regular de lado medindo 2 cm e um círculo cujo centro coincide com o centro do hexágono, e cujo diâmetro tem medida igual à medida do lado do hexágono.

Considere: $\pi \cong 3$ e $\sqrt{3} \cong 1{,}7$.

Nessas condições, quanto mede a área da superfície pintada?

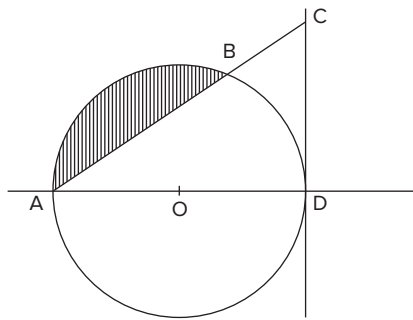
A 2,0 cm^2 **B** 3,0 cm^2 **C** 7,2 cm^2 **D** 8,0 cm^2 **E** 10,2 cm^2

13 **UTFPR 2013** Seja α a circunferência que passa pelo ponto B com centro no ponto C e β a circunferência que passa pelo ponto A com centro no ponto C, como mostra a figura dada.

A medida do segmento $\overline{AB}$ é igual à medida do segmento $\overline{BC}$ e o comprimento da circunferência α mede 12π cm Então a área do anel delimitado pelas circunferências α e β (região escura) é, em cm^2, igual a:

A 108π **B** 144π **C** 72π **D** 36π **E** 24π

14 **UFG 2013** O limpador traseiro de um carro percorre um ângulo máximo de 135°, como ilustra a figura a seguir.

Sabendo-se que a haste do limpador mede 50 cm, dos quais 40 cm correspondem à palheta de borracha, determine a área da região varrida por essa palheta.

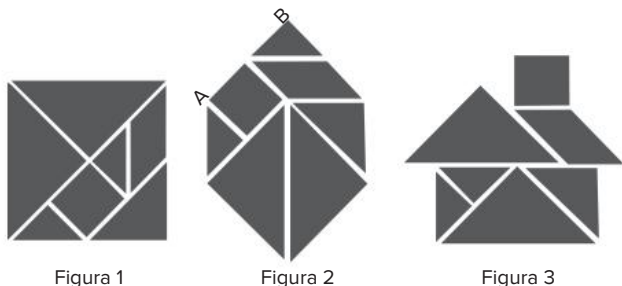
Dado: $\pi \cong 3{,}14$

15 Fuvest 2012

Na figura, a circunferência de centro O é tangente à reta $\overleftrightarrow{CD}$ no ponto D, o qual pertence à reta $\overleftrightarrow{AO}$. Além disso, A e B são pontos da circunferência, $AB = 6\sqrt{3}$ e $BC = 2\sqrt{3}$. Nessas condições, determine:

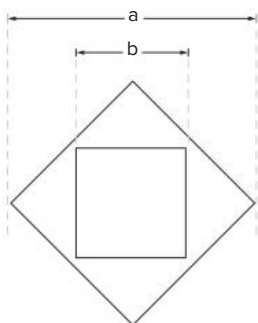
a) a medida do segmento $\overline{CD}$;
b) o raio da circunferência;
c) a área do triângulo AOB;
d) a área da região hachurada na figura.

Exercícios propostos

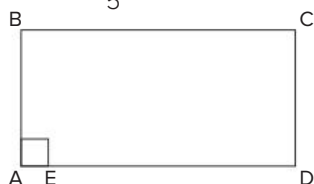
1 **Enem** O *tangram* é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra-cabeça, constituído de sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Essas peças são obtidas recortando-se um quadrado de acordo com o esquema da figura 1. Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas figuras 2 e 3.

Figura 1 Figura 2 Figura 3

Se o lado $\overline{AB}$ do hexágono mostrado na figura 2 mede 2 cm, então a área da figura 3, que representa uma "casinha", é igual a:

A $4\ cm^2$
B $8\ cm^2$
C $12\ cm^2$
D $14\ cm^2$
E $16\ cm^2$

2 Na figura a seguir, o quadrado maior tem o triplo da área do quadrado menor.

Determine a razão $\frac{a}{b}$.

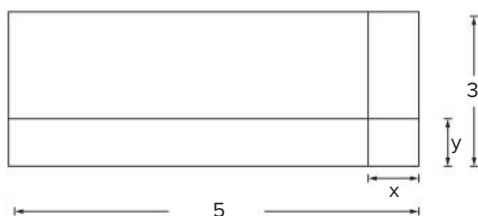
A $\sqrt{2}$ B $\sqrt{3}$ C $\sqrt{4}$ D $\sqrt{5}$ E $\sqrt{6}$

3 **Enem** O governo cedeu terrenos para que famílias construíssem suas residências com a condição de que no mínimo 94% da área do terreno fosse mantida como área de preservação ambiental. Ao receber o terreno retangular ABCD, em que $AB = \frac{BC}{2}$, Antônio demarcou uma área quadrada no vértice A, para a construção de sua residência, de acordo com o desenho, no qual $AE = \frac{AB}{5}$ é lado do quadrado.

Nesse caso, a área definida por Antônio atingiria exa tamente o limite determinado pela condição se ele:

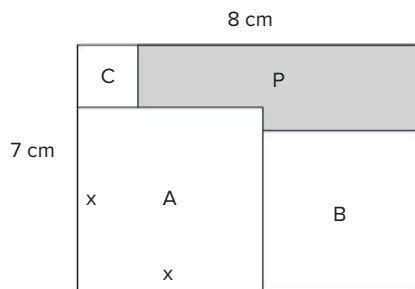
A duplicasse a medida do lado do quadrado.
B triplicasse a medida do lado do quadrado.
C triplicasse a área do quadrado.
D ampliasse a medida do lado do quadrado em 4%.
E ampliasse a área do quadrado em 4%.

4 **FGV 2017** Um canteiro com formato retangular tem área igual a $40\ m^2$ e sua diagonal mede $\sqrt{89}$ m O perímetro desse retângulo é:

A 20 m
B 22 m
C 24 m
D 26 m
E 28 m

5 **Enem 2012** Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem, mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento (x) no comprimento e (y) na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é $(5 - x)(3 - y)$.

Nessas condições, a área perdida do forro, após a pri meira lavagem, será expressa por:

A 2xy
B 15   3x
C 15   5y
D   5y   3x
E 5y + 3x   xy

6 **ESPM 2012** A figura a seguir mostra um retângulo de lados 7 cm e 8 cm no qual estão contidos os quadrados A, B e C. A medida x pode variar entre 3,5 cm e 7 cm, fazendo com que os lados dos três quadrados se alterem.

Dentro desse intervalo, o maior valor que a área do polígono P pode ter é igual a:

A $18\ cm^2$
B $15\ cm^2$
C $17\ cm^2$
D $19\ cm^2$
E $16\ cm^2$

7 **Enem 2011** Em uma certa cidade, os moradores de um bairro carente de espaços de lazer reivindicam à prefeitura municipal a construção de uma praça. A prefeitura concorda com a solicitação e afirma que irá construí-la em formato retangular devido às características técnicas do terreno. Restrições de natureza orçamentária impõem que sejam gastos, no máximo, 180 m de tela para cercar a praça A prefeitura apresenta aos moradores desse bairro as medidas dos terrenos disponíveis para a construção da praça:

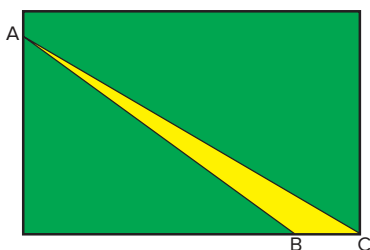
Terreno 1: 55 m por 45 m
Terreno 2: 55 m por 55 m
Terreno 3: 60 m por 30 m
Terreno 4: 70 m por 20 m
Terreno 5: 95 m por 85 m

Para optar pelo terreno de maior área, que atenda às restrições impostas pela prefeitura, os moradores deverão escolher o terreno:

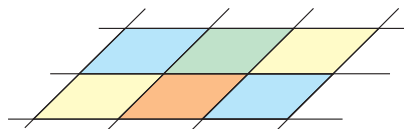
A 1 B 2 C 3 D 4 E 5

8 **Enem** A loja Telas & Molduras cobra 20 reais por metro quadrado de tela, 15 reais por metro linear de moldu ra, mais uma taxa fixa de entrega de 10 reais.
Uma artista plástica precisa encomendar telas e molduras a essa loja, suficientes para 8 quadros retangulares (25 cm × 50 cm). Em seguida, fez uma segunda encomenda, mas agora para 8 quadros retangulares (50 cm × 100 cm) O valor da segunda encomenda será:

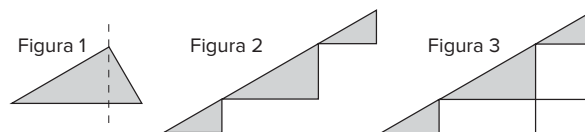
A o dobro do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram
B maior do que o valor da primeira encomenda, mas não o dobro.
C a metade do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram
D menor do que o valor da primeira encomenda, mas não a metade.
E igual ao valor da primeira encomenda, porque o custo de entrega será o mesmo.

9 A figura retangular a seguir representa a bandeira de uma equipe de futebol

Se o ponto A divide a altura do retângulo na razão de 1 para 7, o ponto B divide a base do retângulo na razão de 5 para 1 e a área de toda a bandeira é de 2400 cm^2, então, a área que o triângulo ABC ocupa na bandeira é de:

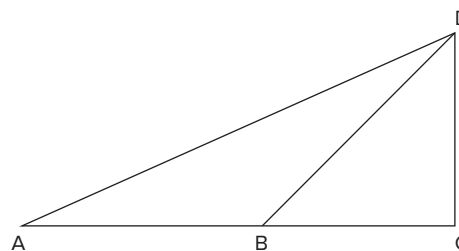
A 175 cm^2 C 250 cm^2 E 474 cm^2
B 200 cm^2 D 350 cm^2

10 Um arquiteto projetou, para as paredes de uma ca pela, janelas vitrais na forma de um paralelogramo composto de 6 peças congruentes. A figura a seguir apresenta um esboço desse projeto, que foi feito em escala de 1 para 10.

Para fazer esse esboço, o arquiteto traçou, primeiro, um feixe de quatro retas paralelas afastadas 3 cm uma da outra e, depois, um feixe com mais três retas paralelas afastadas 2 cm uma da outra.
Sabendo que as retas do primeiro feixe formam ângulos de 45° com as retas do segundo feixe, podemos concluir que, depois de construída e instalada, cada janela ocupará na parede uma área de:

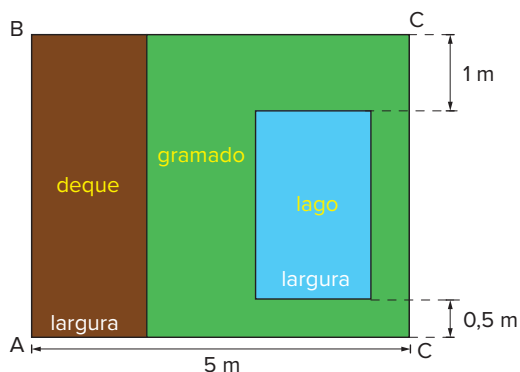
A 3600 cm^2 C $3600\sqrt{3}$ cm^2 E $2400\sqrt{3}$ cm^2
B $3600\sqrt{2}$ cm^2 D $2400\sqrt{2}$ cm^2

11 Em um pedaço de papel com o formato de um triângulo retângulo, foi feito um recorte sobre uma linha perpendicular à hipotenusa, como mostra a figura 1. Em seguida, foi feita uma cópia do pedaço menor e os três triângulos obtidos foram colados em uma cartolina de modo que os maiores lados de cada triângulo ficassem alinhados e os demais lados ficassem paralelos, como mostra a figura 2. Depois, foram traçadas quatro retas, prolongando os lados dos triângulos colados e determinando dois quadriláteros, como mostra a figura 3.

Os quadriláteros obtidos na figura 3:

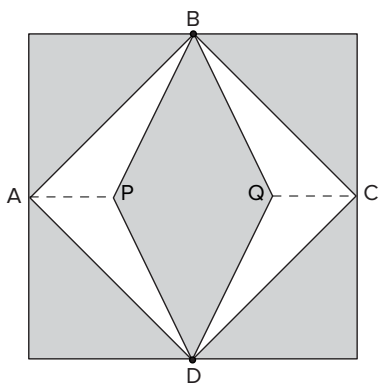
A têm a mesma área.
B têm o mesmo perímetro.
C têm diagonais de mesma medida.
D são congruentes.
E são semelhantes.

12 **Unifesp** Na figura, os triângulos ABD e BCD são isósceles. O triângulo BCD é retângulo, com o ângulo C reto, e A, B, C estão alinhados.

a) Dê a medida do ângulo $B\hat{A}D$ em graus.
b) Se BD = x, obtenha a área do triângulo ABD em função de x.

FRENTE 3

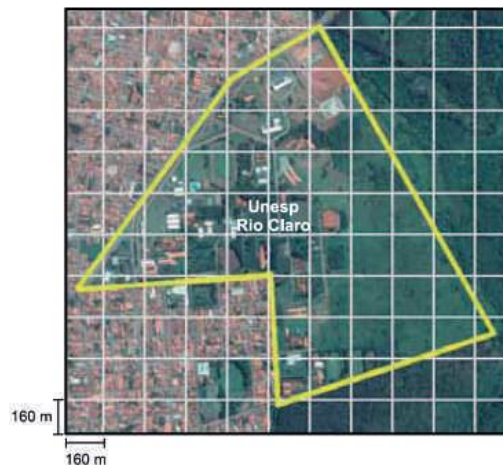
13 **Unesp 2016** Em um terreno retangular ABCD de 20 m^2, serão construídos um deque e um lago, ambos de superfícies retangulares de mesma largura, com as medidas indicadas na figura. O projeto de construção ainda prevê o plantio de grama na área restante, que corresponde a 48% do terreno.

No projeto descrito, a área da superfície do lago, em m^2, será igual a:

A 4,1
B 4,2
C 3,9
D 4,0
E 3,8

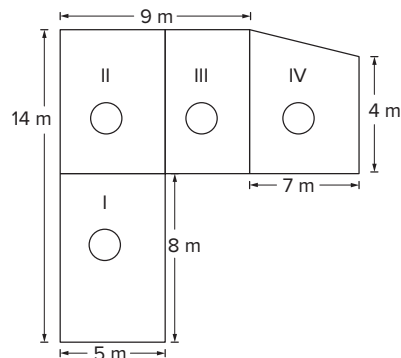
14 **Enem 2012** Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.

Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{QC}$ medem $\frac{1}{4}$ da medida do lado do quadrado Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30,00 o m^2, e outro para a parte mais clara (regiões ABPDA e BCDQB), que custa R$ 50,00 o m^2.

De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

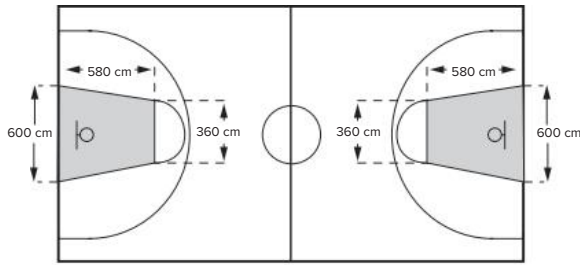
A R$ 22,50
B R$ 35,00
C R$ 40,00
D R$ 42,50
E R$ 45,00

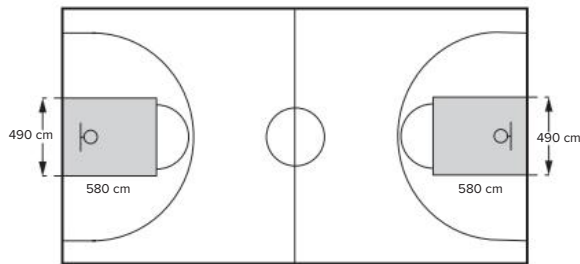
15 **Unesp 2017** O hexágono marcado na malha quadriculada sobre a fotografia representa o contorno do campus da Unesp de Rio Claro, que é aproximada mente plano.

A área aproximada desse campus, em km^2, é um nú mero pertencente ao intervalo:

A [0,8; 1,3[
B [1,8; 2,3[
C [2,3; 2,8[
D [1,3; 1,8[
E [0,3; 0,8[

16 **Enem 2012** Jorge quer instalar aquecedores no seu salão de beleza para melhorar o conforto dos seus clientes no inverno. Ele estuda a compra de unidades de dois tipos de aquecedores: modelo A, que conso me 600 g/h (gramas por hora) de gás propano e cobre 35 m^2 de área, ou modelo B, que consome 750 g/h de gás propano e cobre 45 m^2 de área. O fabricante indica que o aquecedor deve ser instalado em um ambiente com área menor do que a da sua cobertura Jorge vai instalar uma unidade por ambiente e quer gastar o mí nimo possível com gás. A área do salão que deve ser climatizada encontra-se na planta seguinte (ambientes representados por três retângulos e um trapézio).

Avaliando-se todas as informações, serão necessários:

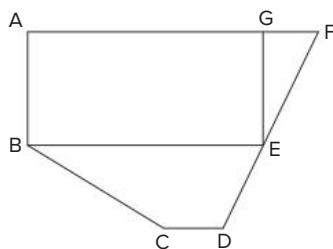
A quatro unidades do tipo A e nenhuma unidade do tipo B.
B três unidades do tipo A e uma unidade do tipo B.
C duas unidades do tipo A e duas unidades do tipo B.
D uma unidade do tipo A e três unidades do tipo B.
E nenhuma unidade do tipo A e quatro unidades do tipo B.

17 **Enem 2015** O esquema I mostra a configuração de uma quadra de basquete. Os trapézios em cinza, chamados de garrafões, correspondem a áreas restritivas.

Esquema I: área restritiva antes de 2010.

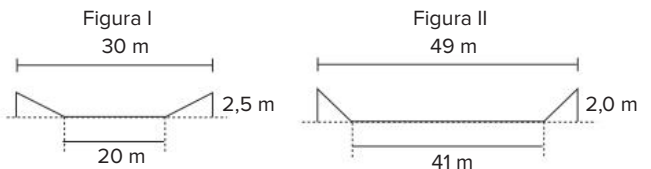
Visando atender as orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (FIBA) em 2010, que unificou as marcações das diversas ligas, foi prevista uma modificação nos garrafões das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o esquema II.

Esquema II: área restritiva a partir de 2010.

Após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área ocupada por cada garrafão, que corresponde a um(a):

A aumento de 5800 cm^2.
B aumento de 75400 cm^2.
C aumento de 214600 cm^2.
D diminuição de 63800 cm^2.
E diminuição de 272600 cm^2.

18 **Fuvest 2013** O mapa de uma região utiliza a escala de 1 : 200000. A porção desse mapa, contendo uma Área de Preservação Permanente (APP), está representada na figura, na qual $\overline{AF}$ e $\overline{DF}$ são segmentos de reta, o ponto G está no segmento $\overline{AF}$, o ponto E está no segmento $\overline{DF}$, ABEG é um retângulo e BCDE é um trapézio. Se AF = 15, AG = 12, AB = 6, CD = 3 e DF = $5\sqrt{5}$ indicam valores em centímetros no mapa real, então a área da APP é:

Obs : Figura ilustrativa, sem escala

A 100 km^2
B 108 km^2
C 210 km^2
D 240 km^2
E 444 km^2

19 **Enem** A vazão do rio Tietê, em São Paulo, constitui preocupação constante nos períodos chuvosos. Em alguns trechos, são construídas canaletas para controlar o fluxo de água. Uma dessas canaletas, cujo corte vertical determina a forma de um trapézio isósceles, tem as medidas especificadas na figura I. Neste caso, a vazão da água é de 1050 m^3/s. O cálculo da vazão, Q em m^3/s, envolve o produto da área A do setor transversal (por onde passa a água), em m^2, pela velocidade da água no local, v, em m/s, ou seja, Q = Av.
Planeja-se uma reforma na canaleta, com as dimensões especificadas na figura II, para evitar a ocorrência de enchentes.

Disponível em: <www2.uel.br>.

Na suposição de que a velocidade da água não se alterará, qual a vazão esperada para depois da reforma na canaleta?

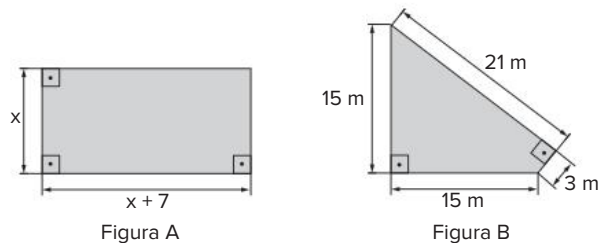
A 90 m^3/s
B 750 m^3/s
C 1050 m^3/s
D 1512 m^3/s
E 2009 m^3/s

20 **IFSC 2012** Um triângulo retângulo tem hipotenusa igual a 5 cm e os catetos medindo um o dobro do outro. É correto afirmar que a medida de sua área em cm^2 é:

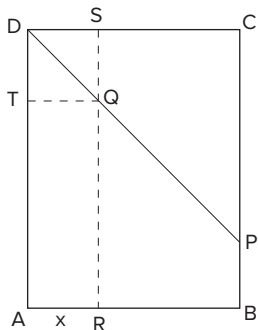
A $\sqrt{5}$
B 10
C $10\sqrt{5}$
D 5
E $8\sqrt{5}$

21 **Enem 2016** Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.

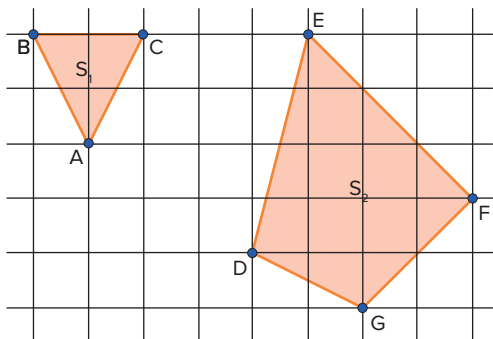
Figura A

Figura B

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metros, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a:

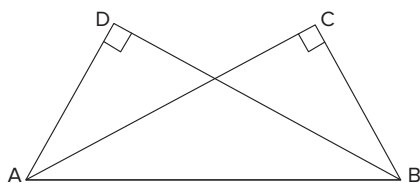
A 7,5 e 14,5.
B 9,0 e 16,0.
C 9,3 e 16,3.
D 10,0 e 17,0.
E 13,5 e 20,5.

22 **Fuvest 2017** O retângulo ABCD, representado na figura, tem lados de comprimento AB = 3 e BC = 4. O ponto P pertence ao lado $\overline{BC}$ e BP = 1. Os pontos R, S e T pertencem aos lados $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$, respectivamente. O segmento $\overline{RS}$ é paralelo a $\overline{AD}$ e intercepta $\overline{DP}$ no ponto Q. O segmento $\overline{TQ}$ é paralelo a $\overline{AB}$.

Sendo x o comprimento de $\overline{AR}$, o maior valor da soma das áreas do retângulo ARQT, do triângulo CQP e do triângulo DQS, para x variando no intervalo aberto]0, 3[, é:

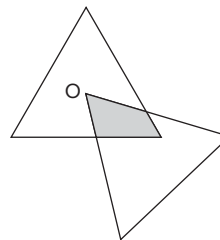
A $\frac{61}{8}$
B $\frac{33}{4}$
C $\frac{17}{2}$
D $\frac{35}{4}$
E $\frac{73}{8}$

23 **Unesp 2015** Os polígonos ABC e DEFG estão desenhados em uma malha formada por quadrados. Suas áreas são iguais a S_1 e S_2, respectivamente, conforme indica a figura.

Sabendo que os vértices dos dois polígonos estão exatamente sobre pontos de cruzamento das linhas da malha, é correto afirmar que $\frac{S_2}{S_1}$ é igual a:

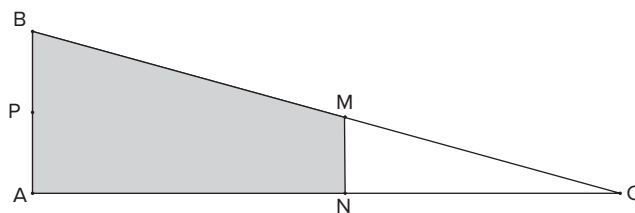
A 5,25
B 4,75
C 5,00
D 5,50
E 5,75

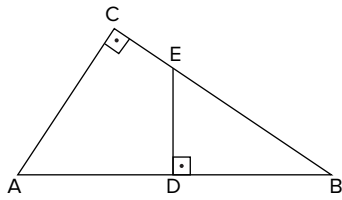
24 **Unifesp** Dois triângulos congruentes ABC e ABD, de ângulos 30°, 60° e 90°, estão colocados como mostra a figura, com as hipotenusas $\overline{AB}$ coincidentes

Se AB = 12 cm, a área comum aos dois triângulos, em centímetros quadrados, é igual a:

A 6
B $4\sqrt{3}$
C $6\sqrt{3}$
D 12
E $12\sqrt{3}$

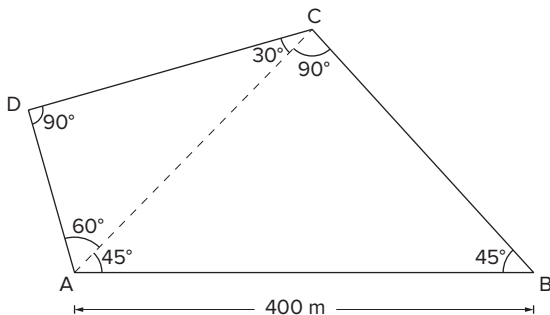
25 Na figura a seguir, há dois triângulos equiláteros, e o ponto O é o centro de um deles

Se a área do triângulo de centro O é 1, então o valor da área hachurada na figura, enquanto os triângulos efetuam rotações aleatórias em torno do mesmo ponto O, varia no intervalo:

A de $\frac{1}{9}$ até $\frac{2}{9}$.
B de $\frac{2}{9}$ até $\frac{1}{3}$.
C de $\frac{1}{6}$ até $\frac{1}{3}$
D de $\frac{1}{3}$ até $\frac{4}{9}$.
E de $\frac{1}{3}$ até $\frac{1}{2}$.

26 **Enem** Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras.

A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto.
Nessas condições, a área a ser calçada corresponde:
A à mesma área do triângulo AMC.
B à mesma área do triângulo BNC.
C à metade da área formada pelo triângulo ABC.
D ao dobro da área do triângulo MNC.
E ao triplo da área do triângulo MNC.

27 **Unifesp** Na figura, o ângulo $\hat{C}$ é reto, D é ponto médio de $\overline{AB}$, $\overline{DE}$ é perpendicular a $\overline{AB}$, AB = 20 cm e AC = 12 cm.

A área do quadrilátero ADEC, em centímetros quadrados, é:

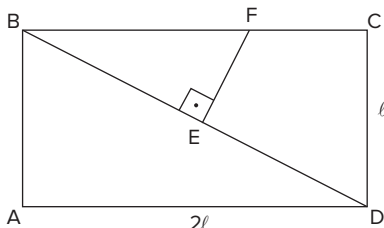
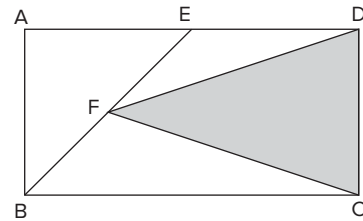
A 96
B 75
C 58,5
D 48
E 37,5

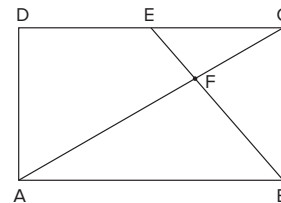
28 **UFPB 2012** A prefeitura de certa cidade reservou um terreno plano, com o formato de um quadrilátero, para construir um parque, que servirá de área de lazer para os habitantes dessa cidade. O quadrilátero ABCD, a seguir, representa a planta do terreno com algumas medições que foram efetuadas:

Com base nos dados apresentados nessa figura, é correto afirmar que a área do terreno reservado para o parque mede:

Use: $\sqrt{3} = 1{,}73$.

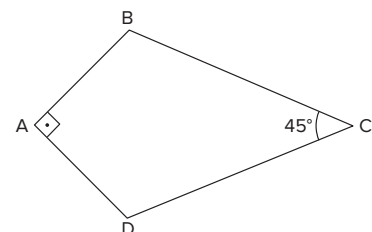
A 56300 m²
B 56800 m²
C 57300 m²
D 57000 m²
E 58300 m²

29 **Fuvest** No retângulo ABCD da figura tem-se CD = ℓ e AD = 2ℓ Além disso, o ponto E pertence à diagonal $\overline{BD}$, o ponto F pertence ao lado $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$ é perpendicular a $\overline{BD}$. Sabendo que a área do retângulo ABCD é cinco vezes a área do triângulo BEF, então $\overline{BF}$ mede:

A $\ell\frac{\sqrt{2}}{8}$
B $\ell\frac{\sqrt{2}}{4}$
C $\ell\frac{\sqrt{2}}{2}$
D $3\ell\frac{\sqrt{2}}{4}$
E $\ell\sqrt{2}$

30 **IFCE 2012** Na figura a seguir, os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AE}$ e $\overline{ED}$ possuem o mesmo comprimento. Sendo F o ponto médio do segmento $\overline{BE}$ e sabendo-se que ABCD é um retângulo de área 200 m², é correto concluir-se que a área do triângulo CDF, em metros quadrados, vale:

A 120
B 100
C 90
D 75
E 50

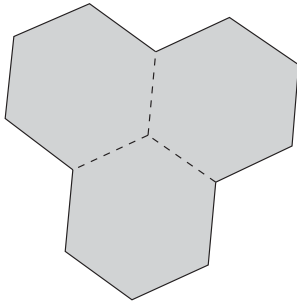
31 **Fuvest** A figura representa um retângulo ABCD, com AB = 5 e AD = 3. O ponto E está no segmento $\overline{CD}$ de maneira que CE = 1, e F é o ponto de interseção da diagonal $\overline{AC}$ com o segmento $\overline{BE}$.

Então a área do triângulo BCF vale:

A $\frac{6}{5}$
B $\frac{5}{4}$
C $\frac{4}{3}$
D $\frac{7}{5}$
E $\frac{3}{2}$

32 **Unicamp 2016** A figura a seguir exibe um quadrilátero ABCD, onde AB = AD e BC = CD = 2 cm.

A área do quadrilátero ABCD é igual a:

A $\sqrt{2}$ cm²
B 2 cm²
C $2\sqrt{2}$ cm²
D 3 cm²

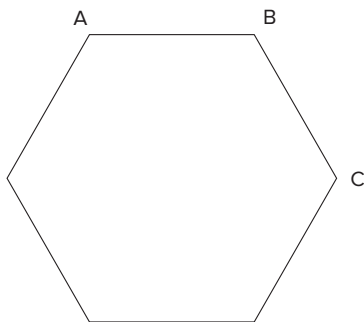
FRENTE 3

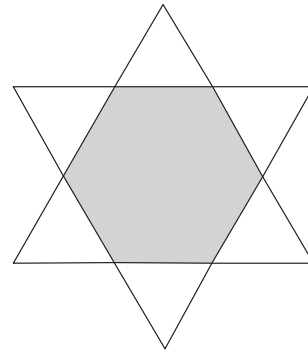
33 Fuvest 2014 Uma das piscinas do Centro de Práticas Esportivas da USP tem o formato de três hexágonos regulares congruentes, justapostos, de modo que cada par de hexágonos tem um lado em comum, conforme representado na figura a seguir. A distância entre lados paralelos de cada hexágono é de 25 metros.

Assinale a alternativa que mais se aproxima da área da piscina.

A 1600 m^2
B 1800 m^2
C 2000 m^2
D 2200 m^2
E 2400 m^2

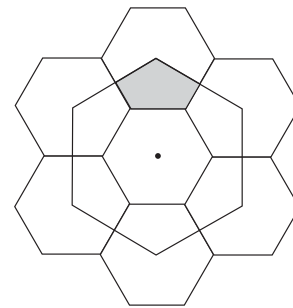
34 Fuvest 2012 O segmento $\overline{AB}$ é lado de um hexágono regular de área $\sqrt{3}$. O ponto P pertence à mediatriz de $\overline{AB}$ de tal modo que a área do triângulo PAB vale $\sqrt{2}$. Então, a distância de P ao segmento $\overline{AB}$ é igual a:

A $\sqrt{2}$
B $2\sqrt{2}$
C $3\sqrt{2}$
D $\sqrt{3}$
E $2\sqrt{3}$

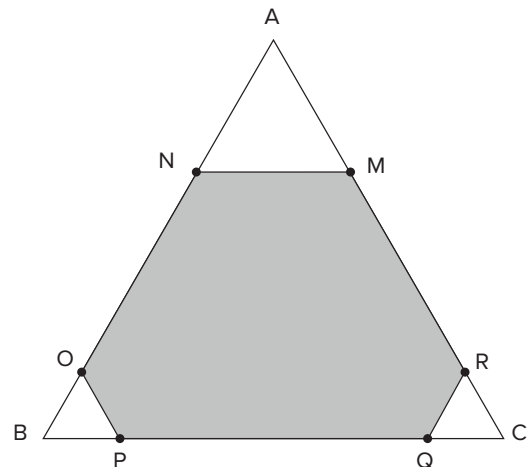
35 Fuvest Os pontos A, B e C são vértices de um hexágono regular de área 6 Qual a área do triângulo ABC?

A 1
B 2
C 3
D $\sqrt{2}$
E $\sqrt{3}$

36 Unifesp O hexágono cujo interior aparece destacado em cinza na figura é regular e origina-se da sobreposição de dois triângulos equiláteros.

Se k é a área do hexágono, a soma das áreas desses dois triângulos é igual a:

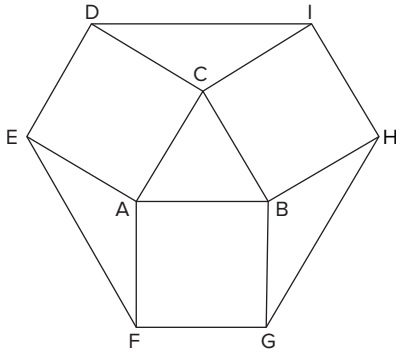
A k B 2k C 3k D 4k E 5k

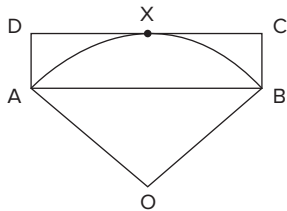
37 Fuvest A figura representa sete hexágonos regulares de lado 1 e um hexágono maior, cujos vértices coincidem com os centros de seis dos hexágonos menores Então, a área do pentágono hachurado é igual a:

A $3\sqrt{3}$ B $2\sqrt{3}$ C $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D $\sqrt{3}$ E $\frac{\sqrt{3}}{2}$

38 Insper 2012 Na figura a seguir, os pontos M, N, O, P, Q e R pertencem aos lados do triângulo equilátero ABC, de perímetro 6 cm, de modo que:

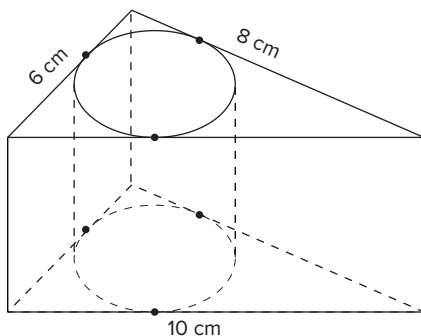
- AM = AN = 2x cm;
- BO = BP = CQ = CR = x cm.

Se a área do hexágono MNOPQR é metade da área do triângulo ABC, então o valor de x é igual a:

A $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B $\frac{1}{2}$ C $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D $\frac{\sqrt{3}}{6}$ E $\frac{1}{4}$

39 **Fuvest 2011** Na figura, o triângulo ABC é equilátero de lado 1, e ACDE, AFGB e BHIC são quadrados. A área do polígono DEFGHI vale:

A $1+\sqrt{3}$
B $2+\sqrt{3}$
C $3+\sqrt{3}$
D $3+2\sqrt{3}$
E $3+3\sqrt{3}$

40 **Fuvest** Na figura, OAB é um setor circular com centro em O, ABCD é um retângulo e o segmento $\overline{CD}$ é tangente em X ao arco de extremos A e B do setor circular.

Se $AB = 2\sqrt{3}$ e AD = 1, então a área do setor OAB é igual a:

A $\frac{\pi}{3}$
B $\frac{2\pi}{3}$
C $\frac{4\pi}{3}$
D $\frac{5\pi}{3}$
E $\frac{7\pi}{3}$

41 **Enem** Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o for mato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são 6 cm, 8 cm e 10 cm e cuja al tura é 10 cm. Tal peça deve ser vazada de tal maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente às suas faces laterais, conforme mostra a figura.

O raio da perfuração da peça é igual a:

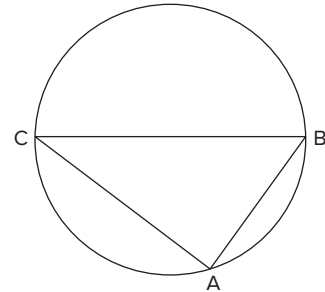
A 1 cm
B 2 cm
C 3 cm
D 4 cm
E 5 cm

42 **Unicamp 2012** Um vulcão que entrou em erupção gerou uma nuvem de cinzas que atingiu rapidamente a cidade de Rio Grande, a 40 km de distância. Os voos com destino a cidades situadas em uma região circular com centro no vulcão e com raio 25% maior que a distância entre o vulcão e Rio Grande foram cancelados. Nesse caso, a área da região que deixou de receber voos é:

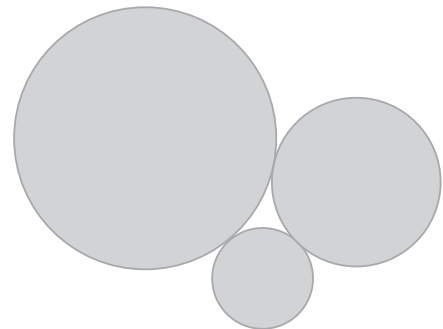
A maior que 10 000 km^2.
B menor que 8 000 km^2.
C maior que 8 000 km^2 e menor que 9 000 km^2.
D maior que 9 000 km^2 e menor que 10 000 km^2.

43 **Unifesp** Se um arco de 60° num círculo I tem o mesmo comprimento de um arco de 40° num círculo II, então a razão da área do círculo I pela área do círculo II é:

A $\frac{2}{9}$
B $\frac{4}{9}$
C $\frac{2}{3}$
D $\frac{3}{2}$
E $\frac{9}{4}$

44 **FGV 2012** Na figura a seguir, o ângulo Â do triângulo ABC inscrito na circunferência é reto. O lado $\overline{AB}$ mede 4, e o lado $\overline{AC}$ mede 5.

A área do círculo da figura é:

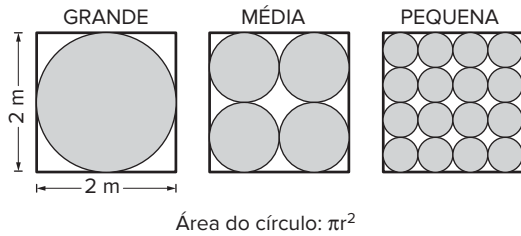
A 9,75π
B 10π
C 10,25π
D 10,50π
E 10,75π

45 **UFG 2013** Alguns agricultores relataram que, inexplica velmente, suas plantações apareceram parcialmente queimadas e a região consumida pelo fogo tinha o padrão indicado na figura a seguir, correspondendo às regiões internas de três círculos, mutuamente tangentes, cujos centros são os vértices de um triângulo com lados medindo 30, 40 e 50 metros

Nas condições apresentadas, a área da região queimada, em m^2, é igual a:

A 1100π
B 1200π
C 1300π
D 1400π
E 1550π

FRENTE 3

46 **Enem** Uma empresa produz tampas circulares de alumínio para tanques cilíndricos a partir de chapas quadradas de 2 metros de lado, conforme a figura. Para 1 tampa grande, a empresa produz 4 tampas médias e 16 tampas pequenas.

Área do círculo: πr^2

As sobras de material da produção diária das tampas grandes, médias e pequenas dessa empresa são doadas, respectivamente, a três entidades: I, II e III, para efetuarem reciclagem do material. A partir dessas informações, pode se concluir que:

A a entidade I recebe mais material do que a entidade II.
B a entidade I recebe metade de material do que a entidade III.
C a entidade II recebe o dobro de material do que a entidade III.
D as entidades I e II recebem, juntas, menos material do que a entidade III.
E as três entidades recebem iguais quantidades de material.

47 **Unifesp** Você tem dois pedaços de arame de mesmo comprimento e pequena espessura. Um deles você usa para formar o círculo da figura I, e o outro você corta em 3 partes iguais para formar os três círculos da figura II.

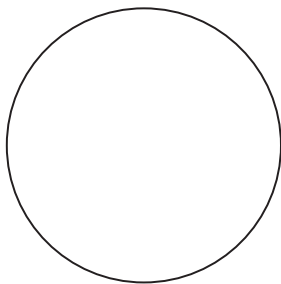



Figura I

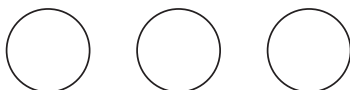
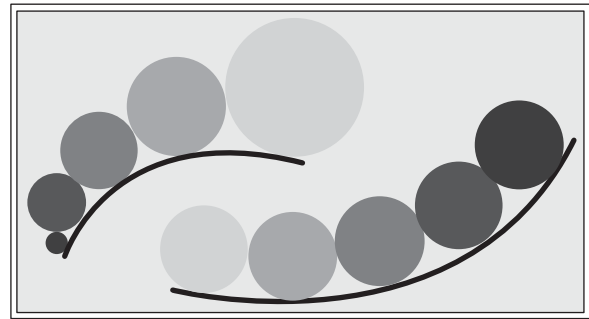



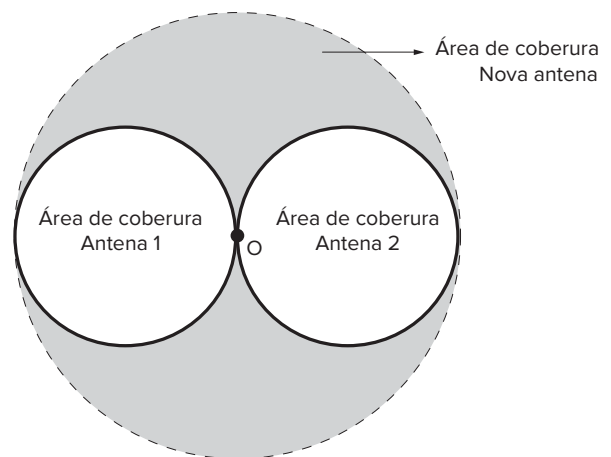
Figura II

Se S é a área do círculo maior e s é a área de um dos círculos menores, a relação entre S e s é dada por:

A S = 3s
B S = 4s
C S = 6s
D S = 8s
E S = 9s

48 A figura a seguir apresenta um painel composto de dois grupos de cinco círculos cada, sendo que, no primeiro, os círculos têm tamanhos diferentes e, no segundo o mesmo tamanho.

Sabendo que a área ocupada por ambos os grupos de cinco círculos é a mesma, e que os raios dos círculos do primeiro grupo medem 1 dm, 3 dm, 4 dm, 5 dm e 7 dm, assinale a alternativa que apresenta a média, em decímetros, dos raios dos círculos do segundo grupo.

A $2\sqrt{2}$
B $4\sqrt{2}$
C $2\sqrt{5}$
D $5\sqrt{2}$
E $4\sqrt{5}$

49 **Enem 2015** Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão substituídas por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio 2 km, cujas circunferências se tangenciam no ponto O, como mostra a figura.

O ponto O indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores.

Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em:

A 8π
B 12π
C 16π
D 32π
E 64π

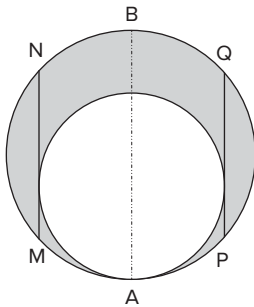
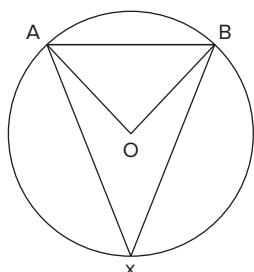
50 Um alvo de dardos tem um círculo central de diâmetro **a** e duas coroas circulares determinadas por circunferências de diâmetros **3a** e **5a**. Como se trata de uma versão infantil, os dardos não têm ponta, mas ficam presos no alvo, pois este contém diversos pinos de plástico, distribuídos de forma homogênea, que fixam o dardo quando ele é lançado corretamente.

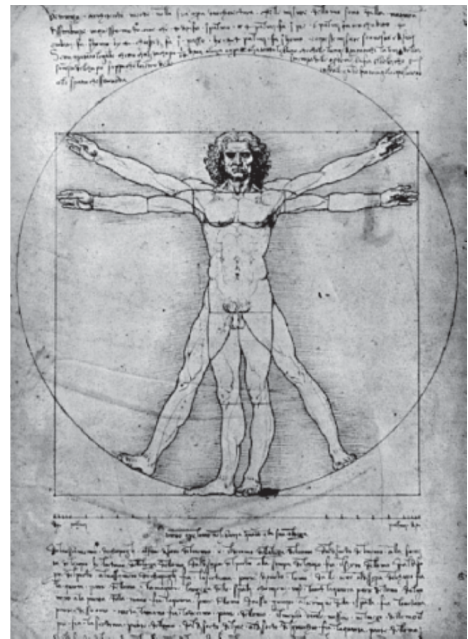
KPad/Shutterstock.com

Se, no círculo central, há exatamente 52 pinos, pode-se estimar que a coroa circular exterior desse alvo contém, aproximadamente:

A 104 pinos.
B 416 pinos.
C 468 pinos.
D 832 pinos.
E 1300 pinos.

51 **UPE 2012** A logomarca de uma empresa é formada por dois círculos tangentes e por três segmentos de reta paralelos, sendo que o segmento $\overline{AB}$ contém os centros dos círculos, e os segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$ são tangentes ao círculo menor, medindo 6 cm cada um, como mostra a figura a seguir. Quanto mede a área da superfície cinza da logomarca?

A $\frac{9\pi}{2}$ B $\frac{3\pi}{2}$ C 9π D 3π E 2π

52 **Fuvest** Na figura, os pontos A, B e C pertencem à circunferência de centro O e BC = α. A reta $\overleftrightarrow{OC}$ é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, e o ângulo $A\hat{O}B$ mede $\frac{\pi}{3}$ radianos. Então, a área do triângulo ABC vale:

A $\frac{\alpha^2}{8}$ B $\frac{\alpha^2}{4}$ C $\frac{\alpha^2}{2}$ D $\frac{3\alpha^2}{4}$ E α^2

53 **UFSJ 2012**

Fonte: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/imagem/wm000002.jpg>. Acesso em: 12 set 2011

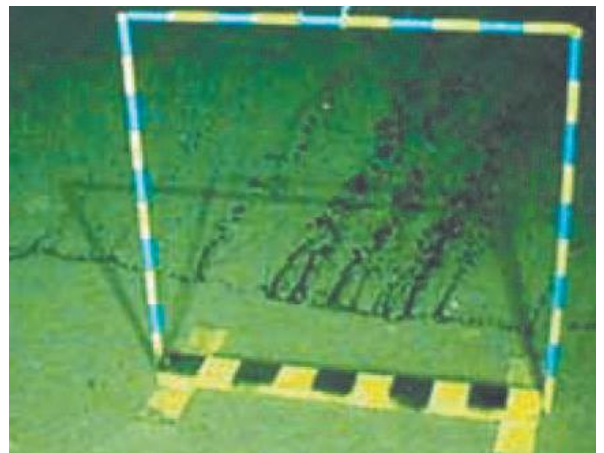
A figura apresentada é conhecida como *Homem Vitruviano* (Leonardo da Vinci, 1490). Nela, um homem nu aparece inscrito em um quadrado e em um círculo, ambos de mesma área. Considerando R o raio desse círculo e L o lado desse quadrado, é correto afirmar que:

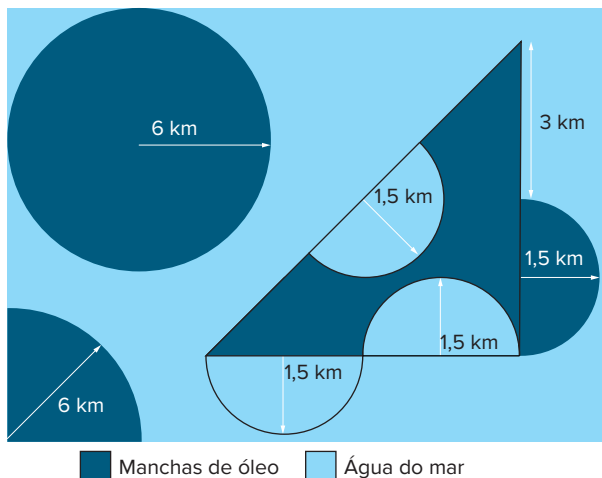
A $R = \frac{L}{2}$

B $\pi = \left(\frac{L}{R}\right)^2$

C $\pi = \frac{L^2}{2R}$

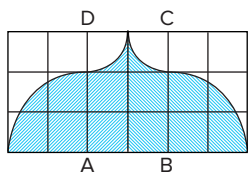
D $\pi = \frac{2L}{R}$

54 **Unesp 2012** No vazamento de petróleo da empresa americana Chevron do último dia 7 de novembro, na Bacia de Campos/RJ, a mancha de óleo na superfície do mar assumiu grandes dimensões e teve seu pico de área entre os dias 12 e 14 daquele mês. O vazamento levou dias para ser contido, pois o petróleo continuava a escapar por fissuras, como mostrado na foto.

Disponível em: <http://oglobo.globo.com>.

A figura mostra, de forma hipotética e aproximada, em azul escuro, as áreas da mancha de óleo na superfície do mar.

Dados $1\ dm^3 = 1\ L$ e $\pi = 3$ e sabendo que a altura média da lâmina de óleo sobre as águas era de 0,003 mm e que 1 barril de petróleo cru contém 160 litros de óleo, o número aproximado de barris que vazaram no incidente foi:

A 2 360
B 2 860
C 2 960
D 3 320
E 5 250

55 Os arcos góticos flamejantes são construções bastante comuns na arquitetura renascentista. Eles são compostos de quatro arcos de circunferência que, embora variem de raio e comprimento, apresentam simetria bilateral

A figura a seguir mostra um arco gótico flamejante em uma malha de 18 quadrados congruentes em que os pontos A, B, C e D são os centros dos arcos que o compõem

Se a área hachurada abaixo do arco gótico é dada por um número da forma $a + b \cdot \pi$, com a e b racionais, então a razão $\frac{b}{a}$ é igual a:

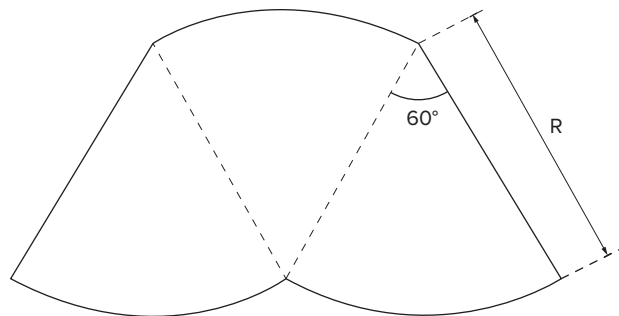
A $\frac{1}{4}$

B $\frac{1}{3}$

C $\frac{2}{3}$

D $\frac{1}{2}$

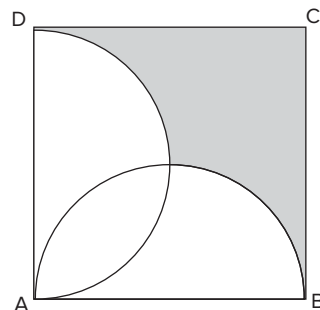
E 1

56 **Enem 2015** O proprietário de um parque aquático deseja construir uma piscina em suas dependências. A figura representa a vista superior dessa piscina, que é formada por três setores circulares idênticos, com ângulo central igual a 60°. O raio R deve ser um número natural.

O parque aquático já conta com uma piscina em formato retangular com dimensões 50 m × 24 m

O proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor que a ocupada pela piscina já existente. Considere 3,0 como aproximação para π.

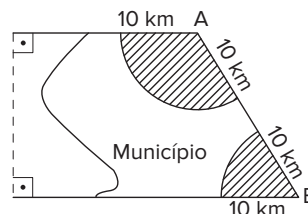
O maior valor possível para R, em metros, deverá ser:

A 16
B 28
C 29
D 31
E 49

57 **UFRGS 2013** Observe a figura a seguir.

No quadrado ABCD de lado 2, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são diâmetros dos semicírculos. A área da região sombreada é:

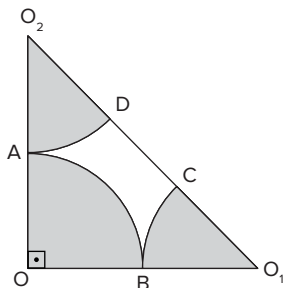
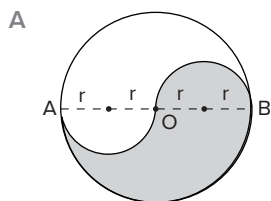
A $3 - \frac{\pi}{4}$
B $4 - \frac{\pi}{2}$
C $3 - \pi$
D $4 - \pi$
E $3 - \frac{\pi}{2}$

58 **Enem** Um município de 628 km^2 é atendido por duas emissoras de rádio cujas antenas A e B alcançam um raio de 10 km do município, conforme mostra a figura:

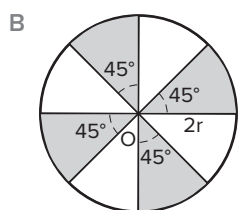
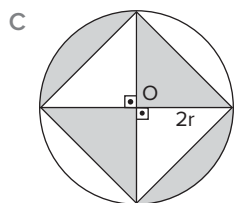
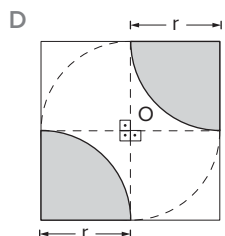
10 km A
10 km
Município
10 km
10 km B

Para orçar um contrato publicitário, uma agência precisa avaliar a probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras.
Essa probabilidade é de, aproximadamente:

A 20%
B 25%
C 30%
D 35%
E 40%

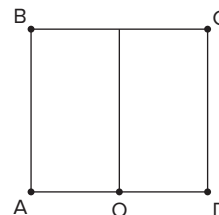
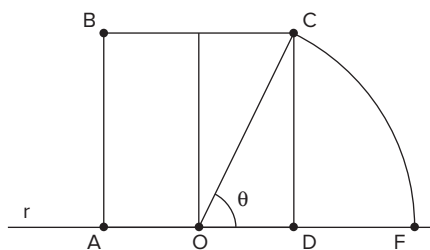
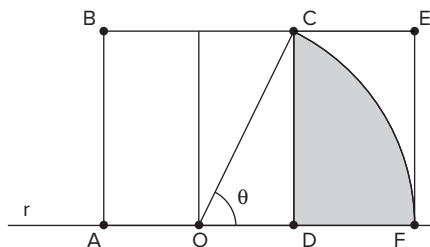
59 **EPCar 2012** Considere a área S da parte sombreada no triângulo retângulo isósceles OO_1O_2.

$\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{BC}$ são arcos de circunferência com centros em O_2, O e O_1, respectivamente, cujos raios medem 2r.

Das figuras a seguir, a única em que a área sombreada **não** é igual a S é:

A
Circunferência de diâmetro $\overline{AB}$ e semicircunferências de diâmetros $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$

B
Circunferência de centro O

C
Circunferência de centro O

D
Circunferência de centro O inscrita num quadrado. Dois setores circulares de raio r

60 **UFU 2012** O **número áureo** aparece com frequência em proporções ligadas a fenômenos da natureza e em magníficos projetos arquitetônicos. Neste contexto, alguns objetos matemáticos estão associados à elaboração estrutural de tais projetos. Este é o caso do **retângulo áureo**, cuja razão entre o maior e o menor lado é o **número áureo**. Uma maneira simples de construir um **retângulo áureo** é dada pelo seguinte roteiro:

1º) Construa um quadrado ABCD de lados medindo 1 metro e um segmento de reta ligando o ponto médio O do lado $\overline{AD}$ ao ponto médio do lado $\overline{BC}$, oposto ao lado $\overline{AD}$.

2º) Considere a reta **r** contendo o segmento $\overline{AD}$. Com centro em O e raio OC, trace um arco de circunferência do vértice C até intersectar a reta **r** no ponto F.

3º) Prolongue $\overline{BC}$ e trace a perpendicular à **r** por F, obtendo o ponto E. O retângulo ABEF é áureo.

No retângulo áureo ABEF, se o ângulo θ é dado em radianos, então, dentre as expressões que seguem, aquela que corresponde ao valor da área sombreada, em m^2, é:

A $\frac{5\theta \quad 2}{8}$

B $\frac{8 - 5\theta}{8}$

C $\frac{3\theta}{4}$

D $\frac{2\sqrt{5\theta} \quad 1}{4}$

FRENTE 3

Texto complementar

Quadratura do círculo

O problema da quadratura do círculo é um dos três problemas clássicos da Geometria grega; consiste em construir, usando apenas régua e compasso, um quadrado com a mesma área que a de um círculo dado.

Resolução do problema

Como aconteceu com os restantes dois problemas, demonstrou-se no século XIX que o problema da quadratura do círculo não tem solução. Essa demonstração foi obtida em várias fases Em 1801, no seu livro *Disquisitiones Arithmeticae*, o matemático alemão Carl Friedrich Gauss afirmou que, dado um número natural ímpar $n > 1$, são condições equivalentes:

- é possível construir um polígono regular com *n* lados usando apenas régua e compasso;
- *n* pode ser escrito como produto de números primos distintos da forma $2^{2^k} + 1$ (os chamados "primos de Fermat", dos quais só se conhecem cinco: 3, 5, 17, 257 e 65 537).

No entanto, Gauss apenas publicou a demonstração de que a segunda condição implica a primeira.

O primeiro matemático a publicar efetivamente uma demonstração da impossibilidade de se efetuarem determinadas construções geométricas apenas com régua e compasso foi o francês Pierre Laurent Wantzel, em 1837.

Como é que se pode demonstrar que é *impossível* efetuar uma determinada construção com régua e compasso? É claro que para mostrar que uma certa construção é *possível* basta levá-la efetivamente a cabo. O que Wantzel conseguiu provar, influenciado pelas ideias de Gauss, foi que se se conseguir, partindo de dois pontos A e B, construir um ponto C com régua e compasso, então o quociente *q* entre as distâncias de A e C e de A e B tem as seguintes propriedades:

- O número *q* é solução de alguma equação polinomial com coeficientes inteiros não todos nulos (ou seja, é aquilo que se designa por um *número algébrico*).
- Se $P(x) = 0$ for uma equação polinomial de grau mínimo entre as equações polinomiais com coeficientes inteiros não todos nulos das quais *q* é uma solução, então o grau de P(x) é uma potência de 2. [...]

Impossibilidade da quadratura do círculo

Não é difícil ver que se fosse possível resolver o problema da quadratura do círculo, então resultaria das observações de Gauss e de Wantzel que $\sqrt{\pi}$ seria um número algébrico. De fato, se fosse possível, partindo de dois pontos A e B, construir um ponto C tal que o círculo de centro A que passa por B e um quadrado em que um dos lados fosse o segmento que une A a C tivessem a mesma área, então o quociente entre os comprimentos dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ seria um número algébrico. Mas, por outro lado, se r fosse a distância de A a B, então a área do círculo seria igual a πr^2, pelo que o comprimento do segmento $\overline{AC}$ seria necessariamente igual a $\sqrt{\pi} \cdot r$ e então o quociente entre os comprimentos dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ seria $\sqrt{\pi}$.

Embora não seja óbvio, afirmar que $\sqrt{\pi}$ é algébrico equivale a afirmar que π é algébrico. Mas em 1882 o matemático alemão Ferdinand von Lindermann demonstrou que π é transcendente (ou seja, não é solução de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros não todos nulos) pelo que é impossível efetuar a quadratura do círculo apenas com régua e compasso.

Será realmente impossível?

Foi dito acima que o problema da quadratura do círculo não tem solução, mas isto quer somente dizer que não é possível construir, usando apenas régua e compasso, um quadrado com a mesma área que a de um círculo dado. Usando outras ferramentas, tal como a quadratriz de Hípias, é possível resolver o problema. [...]

José Carlos Santos. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.
Disponível em: <www.fc.up.pt/mp/jcsantos/quadratura.html>. Acesso em: 29 nov. 2018.

Resumindo

Principais unidades de área

$1\ m^2 = 10\,000\ cm^2$

$1\ km^2 = 1\,000\,000\ m^2$

Áreas dos quadriláteros

$A_{Quadrado} = (lado)^2$

$A_{Retângulo} = base \cdot altura$

$A_{Paralelogramo} = base \cdot altura$

$$A_{Losango} = \frac{diagonal\ maior \cdot diagonal\ menor}{2}$$

$$A_{Trapézio} = \frac{(base\ maior + base\ menor) \cdot altura}{2}$$

Teorema da razão de semelhança

Se duas figuras forem semelhantes e o número k for a razão dessa semelhança, então a razão entre as áreas dessas figuras será igual a k^2

Leis e fórmulas para o cálculo das áreas de triângulos

Fundamental

A área é igual à metade do produto das medidas da base pela altura relativa a essa base.

$$S_\Delta = \frac{b \cdot h}{2}$$

Trigonométrica

A área é igual à metade do produto de dois de seus lados pelo seno do ângulo formado por eles

$$S_\Delta = \frac{a \cdot b \cdot sen(\theta)}{2}$$

Fórmula de Heron

A área é igual à raiz quadrada do produto do semiperímetro pelas diferenças entre o semiperímetro e a medida de cada um dos lados

$$S_\Delta = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} \quad \text{com } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Triângulo circunscrito

A área é igual ao produto do semiperímetro pela medida do raio da circunferência inscrita no triângulo.

$$S_\Delta = p \cdot r \quad \text{com } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Triângulo inscrito

A área é igual ao produto das medidas dos lados dividido pelo dobro do diâmetro (quádruplo do raio) do círculo que circunscreve o triângulo.

$$S_\Delta = \frac{a\ b\ c}{4 \cdot R}$$

Polígonos regulares

Área do triângulo equilátero de lados medindo ℓ:

$$S_{\Delta\text{equilátero}} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

Área do hexágono regular de lados medindo ℓ:

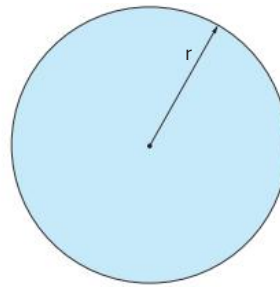
$$S_{\text{Hexágono}} = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$$

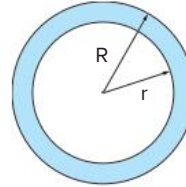
Polígono de n lados circunscrito a uma circunferência de raio r:

$$S = n\ r^2\ \text{tg}\left(\frac{180°}{n}\right)$$

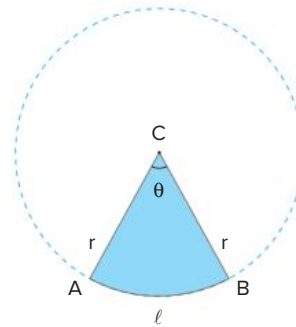
Polígono de n lados inscrito em uma circunferência de raio R:

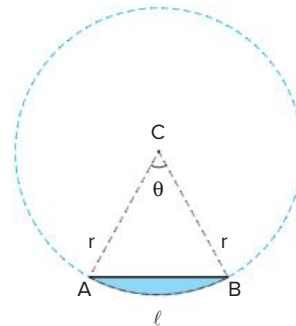
$$S = \frac{n \cdot R^2}{2}\ \text{sen}\left(\frac{360°}{n}\right)$$

O círculo e suas partes

Área do círculo

$$S_\odot = \pi \cdot r^2$$

Coroa circular

Área da coroa circular

$$S_{\text{Coroa}} = \pi \cdot \left(R^2 - r^2\right)$$

Área do setor circular

$$S_{\text{Setor}} = \frac{\theta \cdot \pi \cdot r^2}{360°}$$

Área do segmento circular

$$S_{\text{Segmento}} = S_{\text{Setor}} - S_{\Delta ABC}$$

Quer saber mais?

Sites

- A história das medições:
  Disponível em: <www.somatematica.com.br/geometria.php>
- Exercícios básicos resolvidos:
  Disponível em: <www.matematicadidatica.com.br/GeometriaCalculoAreaFiguras Planas.aspx>
- Exercícios complexos resolvidos:
  Disponível em: <www.interaula.com/matweb/gplana/209/exe209b.htm>
- Fórmula da área de um círculo:
  Disponível em: <www.infoescola.com/matematica/area-do-circulo/>

Exercícios complementares

1 **Enem** O quadro apresenta informações da área aproximada de cada bioma brasileiro.

Biomas continentais brasileiros	Área aproximada (km^2)	Área/total Brasil
Amazônia	4 196 943	49,29%
Cerrado	2 036 448	23,92%
Mata atlântica	1 110 182	13,04%
Caatinga	844 453	9,92%
Pampa	176 496	2,07%
Pantanal	150 355	1,76%
Área total Brasil	8 514 877	

Disponível em: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 10 jul. 2009 (Adapt.).

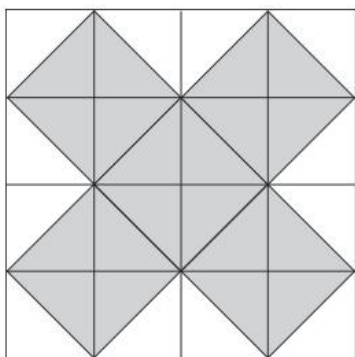
É comum em conversas informais, ou mesmo em noticiários, o uso de múltiplos da área de um campo de futebol (com medidas de 120 m × 90 m) para auxiliar a visualização de áreas consideradas extensas. Nesse caso, qual é o número de campos de futebol correspondente à área aproximada do bioma Pantanal?

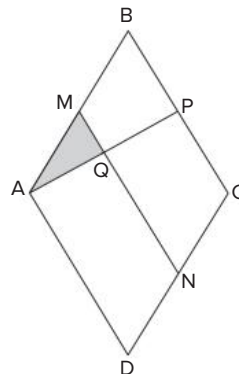
A 1 400
B 14 000
C 140 000
D 1 400 000
E 14 000 000

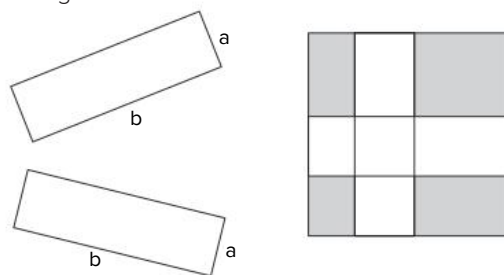
2 **Unicamp** Supondo que a área média ocupada por uma pessoa em um comício seja de 2 500 cm^2, pergunta-se:

a) Quantas pessoas poderão se reunir em uma praça retangular que mede 150 metros de comprimento por 50 metros de largura?

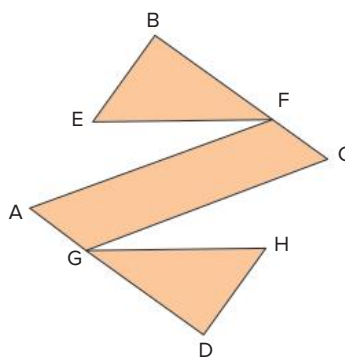
b) Se $\frac{3}{56}$ da população de uma cidade lota a praça, qual é, então, a população da cidade?

3 A figura a seguir apresenta um grande quadrado composto de diversos triângulos retângulos congruentes, sendo alguns brancos e outros escurecidos. Qual a fração decimal que representa a parte escurecida do quadrado maior em relação ao quadrado todo?

A $\frac{375}{1000}$
B $\frac{625}{1000}$
C $\frac{75}{100}$
D $\frac{25}{100}$
E $\frac{6}{10}$

4 Na figura a seguir, M, N e P são os respectivos pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{BC}$ do losango ABCD, cujas diagonais medem 8 cm e 6 cm.

Sendo Q o ponto de interseção dos segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{MN}$, determine a área do triângulo AMQ.

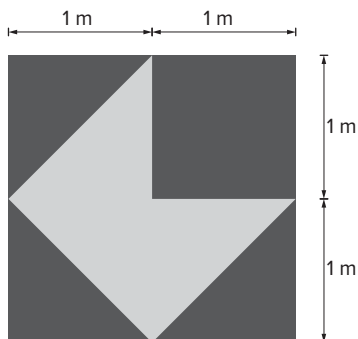
5 Duas faixas retangulares de dimensões a × b foram sobrepostas no interior de um quadrado, como mostra a figura:

Desse modo, a área da região sombreada dentro do quadrado e fora das faixas sobrepostas pode ser expressa por:

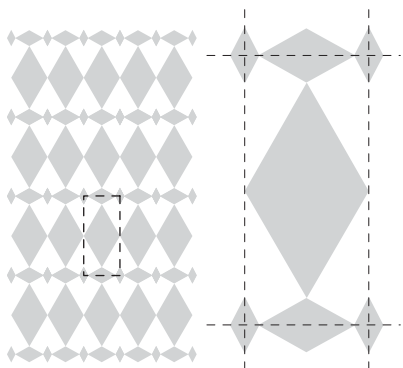
A $a(a \quad 2b)$
B $b(b \quad 2a)$
C $b(2a \quad b)$
D $(a + b)^2$
E $(a \quad b)^2$

6 O logotipo da empresa Z é formado por um paralelogramo AGCF e dois triângulos retângulos congruentes entre si, BEF e DGH, como mostra a ilustração:

Sabendo que os pontos A, B, C e D são vértices de um quadrado de área 36 cm^2, que o logotipo ocupa $\frac{2}{3}$ dessa área e que a área do paralelogramo equivale às

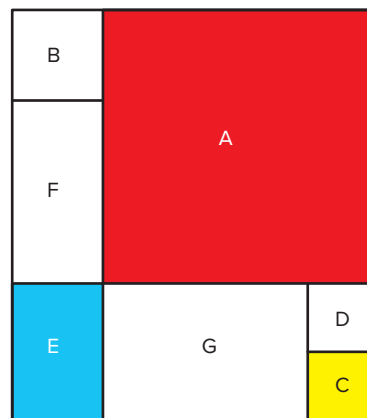
áreas dos dois triângulos retângulos juntos, determine a medida do segmento $\overline{AF}$.

A $2\sqrt{13}$ cm
B $\sqrt{13}$ cm
C $\sqrt{11}$ cm
D $2\sqrt{11}$ cm
E $11\sqrt{2}$ cm

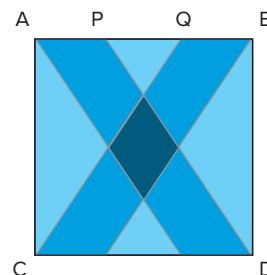
7 **FGV 2016** A figura a seguir representa a tela de um quadro pós-moderno, um quadrado cujos lados medem 2 metros Deseja se pintar o quadro nas cores cinza e preta, como descrito na figura.

a) Qual a área que deverá ser pintada em preto? Expresse a resposta em metros quadrados. Qual é a proporção de cor preta para cor cinza?
b) Se a pintura na cor preta custa R$ 100,00 o metro quadrado, e a pintura na cor cinza, R$ 200,00 o metro quadrado, qual será o custo total de pintura do quadro?
c) Se as cores forem invertidas (sendo a área cinza pintada de preto e a área preta pintada de cinza), qual será a variação percentual do custo total de pintura do quadro, com relação ao custo total obtido no item b?

8 Uma tapeçaria é composta de losangos, e, em cada losango, a diagonal maior mede o dobro da diagonal menor As figuras a seguir apresentam, respectivamente, a tapeçaria toda e a ampliação de um detalhe inscrito em um retângulo pontilhado de 20 cm por 48 cm.

Nessas condições, é correto afirmar que a área do losango maior é:

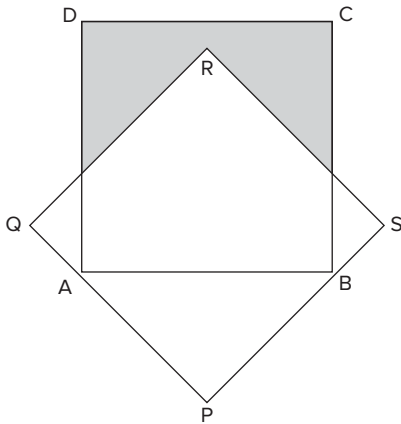
A duas vezes e meia a área do losango menor.
B cinco vezes a área do losango menor.
C dez vezes a área do losango menor.
D vinte e cinco vezes a área do losango menor.
E cem vezes a área do losango menor.

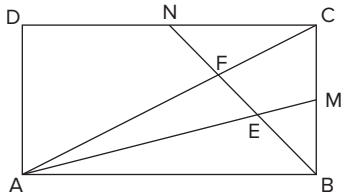
9 No início do século XX, surgiu, na Europa, um movimento artístico de arte e pesquisa denominado Neoplasticismo. Os experimentos geométricos realizados pelos artistas que participaram desse movimento tiveram grande influência na arquitetura moderna e, de certa maneira, definiram o que hoje chamamos de *design*. O holandês Piet Mondrian pintou uma série de quadros intitulada *Composition with colors*, que é, provavelmente, a obra mais famosa do Neoplasticismo. A figura a seguir é de um dos quadros dessa coleção:

Esse quadro apresenta um quadrado vermelho grande (A), um quadrado branco de tamanho médio (B) e dois quadrados pequenos congruentes, sendo um amarelo (C) e o outro branco (D), além de três retângulos, sendo um azul (E) e dois brancos (F e G).
Considere que o quadro tenha dimensões de 64 cm por 72 cm e que a área do quadrado A seja igual a nove vezes a área do quadrado B e a dezesseis vezes a área do quadrado C.
Desprezando a espessura das linhas que contornam os quadriláteros da ilustração, determine:

a) a razão entre os lados dos quadrados A e B e a razão entre os lados dos quadrados A e D.
b) as medidas dos lados dos quadrados A, B e C.
c) a área dos retângulos E, F e G

10 A figura a seguir é a bandeira da equipe de xadrez de um determinado colégio Nessa bandeira ABCD, quadrada, de 90 cm de lado, há duas faixas que se cruzam formando uma grande letra X e um pequeno losango, no qual será bordado o brasão da escola

Sabendo que os pontos P e Q dividem o lado do quadrado ABCD em três partes congruentes, calcule a área do losango determinado no centro da bandeira.

FRENTE 3

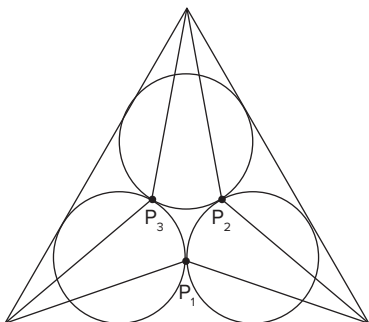
11 Dois quadrados ABCD e PQRS, ambos com 2 cm de lado, foram dispostos de tal forma que os vértices A e B de um quadrado ficaram, respectivamente, sobre os lados $\overline{PQ}$ e $\overline{PS}$ do outro quadrado, como mostra a figura:

Determine a área da região escurecida da figura formada pelos dois quadrados sabendo que ela apresenta simetria bilateral.

12 **Fuvest 2017** Na figura, o retângulo ABCD tem lados de comprimento AB = 4 e BC = 2 Sejam M o ponto médio do lado $\overline{BC}$ e N o ponto médio do lado $\overline{CD}$ Os segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{AC}$ interceptam o segmento $\overline{BN}$ nos pontos E e F, respectivamente

A área do triângulo AEF é igual a:

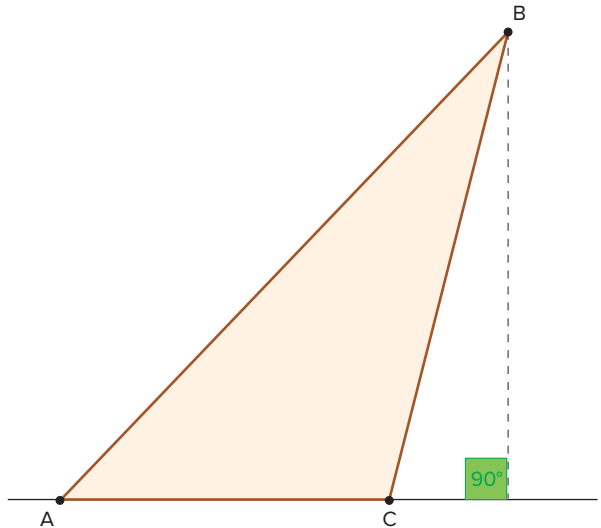
A $\frac{24}{25}$ B $\frac{29}{30}$ C $\frac{61}{60}$ D $\frac{16}{15}$ E $\frac{23}{20}$

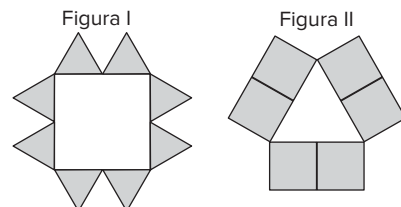
13 **Fuvest** No triângulo ABC, tem se que AB > AC, AC = 4 e $\cos \hat{C} = \frac{3}{8}$ Sabendo-se que o ponto R pertence ao segmento $\overline{BC}$ e é tal que AR = AC e $\frac{BR}{BC} = \frac{4}{7}$, calcule:

a) a altura do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{BC}$.
b) a área do triângulo ABR

14 **Fuvest 2016** São dadas três circunferências de raio r, duas a duas tangentes. Os pontos de tangência são P_1, P_2 e P_3.

Calcule, em função de r:

a) o comprimento do lado do triângulo equilátero T determinado pelas três retas que são definidas pela seguinte exigência: cada uma delas é tangente a duas das circunferências e não intersecta a terceira.
b) a área do hexágono não convexo cujos lados são os segmentos ligando cada ponto P_1, P_2 e P_3 aos dois vértices do triângulo T mais próximos a ele.

15 **Unicamp 2013** Os lados do triângulo ABC da figura a seguir têm as seguintes medidas: AB = 20, BC = 15 e AC = 10.

a) Sobre o lado $\overline{BC}$ marca-se um ponto D tal que BD = 3 e traça-se o segmento $\overline{DE}$ paralelo ao lado $\overline{AC}$. Ache a razão entre a altura H do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{AC}$ e a altura h do triângulo EBD relativa ao lado $\overline{ED}$, sem explicitar os valores de h e H.
b) Calcule o valor explícito da altura do triângulo ABC em relação ao lado AC.

16 As figuras a seguir apresentam apenas quadrados e triângulos equiláteros. Na figura I, os triângulos equilá teros são todos congruentes entre si, ao passo que, na figura II, são os quadrados todos congruentes entre si

Se o lado do quadrado da figura I mede o mesmo que o lado do triângulo equilátero da figura II, então a razão entre as áreas das figuras I e II é igual a:

A $\frac{18 + 8\sqrt{3}}{33}$ C $\frac{8 + 33\sqrt{3}}{18}$ E $\frac{33 + 18\sqrt{3}}{8}$

B $\frac{8 + 18\sqrt{3}}{33}$ D $\frac{33 + 8\sqrt{3}}{18}$

17 **Fuvest** A soma das distâncias de um ponto interior de um triângulo equilátero aos seus lados é 9. Assim, a medida do lado do triângulo é:

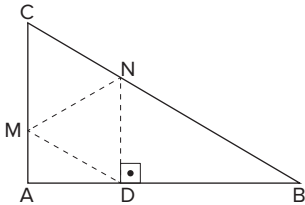
A $5\sqrt{3}$

B $6\sqrt{3}$

C $7\sqrt{3}$

D $8\sqrt{3}$

E $9\sqrt{3}$

18 **Fuvest** O triângulo retângulo ABC, cujos catetos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ medem 1 e $\sqrt{3}$, respectivamente, é dobrado de tal forma que o vértice C coincida com o ponto D do lado $\overline{AB}$. Seja $\overline{MN}$ o segmento ao longo do qual ocorreu a dobra. Sabendo que o ângulo $N\hat{D}B$ é reto, determine:

a) o comprimento dos segmentos $\overline{CN}$ e $\overline{CM}$.

b) a área do triângulo CMN.

19 Nos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ de um quadrado ABCD com lado 1, tomam-se os pontos P e Q de forma que o triângulo PQC seja isósceles com CP = CQ. Qual deve ser a medida do segmento $\overline{AP}$ para que a área do triângulo PQC seja igual a $\frac{1}{4}$?

A $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

B $\frac{2\ \ 2\sqrt{\ }}{2}$

C $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

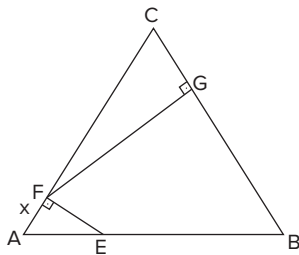
D $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

E $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

20 **Unicamp** Um triângulo equilátero tem o mesmo perímetro que um hexágono regular cujo lado mede 1,5 cm. Calcule:

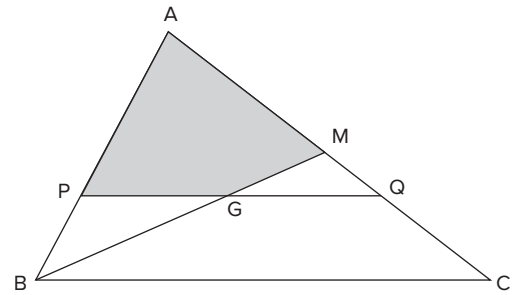
a) o comprimento de cada lado do triângulo.

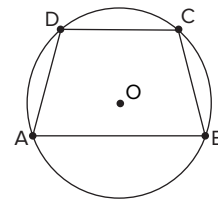
b) a razão entre as áreas do hexágono e do triângulo.

21 **Fuvest**

O triângulo ABC da figura é equilátero de lado 1. Os pontos E, F e G pertencem, respectivamente, aos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ do triângulo. Além disso, os ângulos $A\hat{F}E$ e $C\hat{G}F$ são retos e a medida do segmento $\overline{AF}$ é x. Assim, determine:

a) a área do triângulo AFE em função de x.

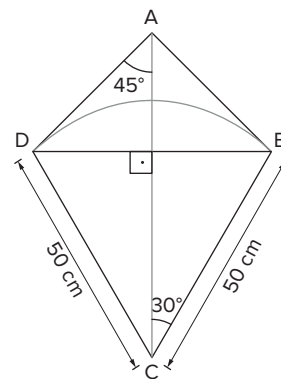
b) o valor de x para o qual o ângulo $F\hat{E}G$ também é reto.

22 Uma reta paralela à base $\overline{BC}$ do triângulo ABC intercepta a mediana $\overline{BM}$ no baricentro G, determinando os pontos P e Q sobre os lados do triângulo, como mostra a figura:

Se o triângulo ABC tem 18 m^2 de área, determine a área do quadrilátero APGM.

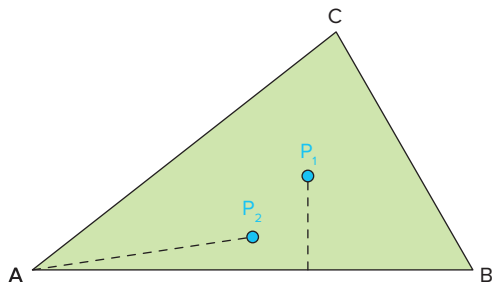
23 **Fuvest** A figura representa um trapézio ABCD de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, inscrito em uma circunferência cujo centro O está no interior do trapézio. Sabe-se que AB = 4, CD = 2 e AC = $3\sqrt{2}$.

a) Determine a altura do trapézio.

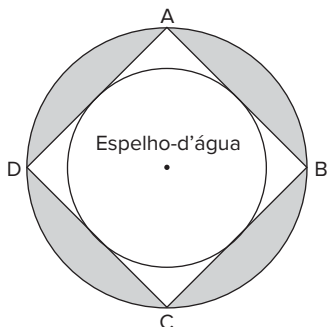
b) Calcule o raio da circunferência na qual ele está inscrito.

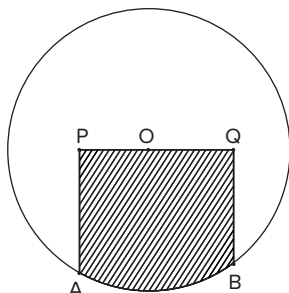
c) Calcule a área da região exterior ao trapézio e delimitada pela circunferência.

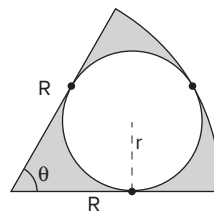
24 **Unicamp** O papagaio (também conhecido como pipa, pandorga ou arraia) é um brinquedo muito comum no Brasil. A figura a seguir mostra as dimensões de um papagaio simples, confeccionado com uma folha de papel que tem o formato do quadrilátero ABCD, duas varetas de bambu (indicadas em cinza) e um pedaço de linha. Uma das varetas é reta e liga os vértices A e C da folha de papel. A outra, que liga os vértices B e D, tem o formato de um arco de circunferência e tangencia as arestas $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ nos pontos B e D, respectivamente.

a) Calcule a área do quadrilátero de papel que forma o papagaio.

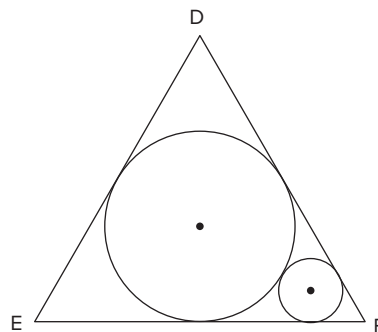
b) Calcule o comprimento da vareta de bambu que liga os pontos B e D.

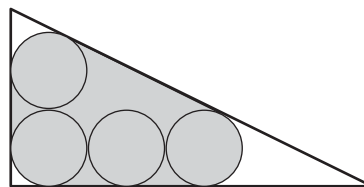
25 Os lados de um terreno triangular ABC medem 100 m, 140 m e 160 m. No interior desse terreno, há dois poços artesianos situados nos pontos P_1 e P_2.

Sabendo que o poço em P_1 equidista dos lados do terreno e o poço em P_2 equidista dos vértices do terreno, determine:
a) a área entre o terreno ABC.
b) a distância entre o poço P_1 e o lado $\overline{AB}$ do terreno.
c) a distância entre o poço P_2 e o vértice A do terreno.

26 **UFTM 2011** A figura mostra o projeto de um paisagista para um jardim em um terreno plano. Sabe-se que os círculos são concêntricos e que a área do quadrado ABCD é igual a 100 m^2. No círculo inscrito no quadrado haverá um espelho-d'água, e na região sombreada do círculo circunscrito ao quadrado serão plantadas flores de várias espécies.

Usando $\pi \approx 3{,}1$, determine a área aproximada:
a) ocupada pelo espelho-d'água
b) da região onde serão plantadas flores

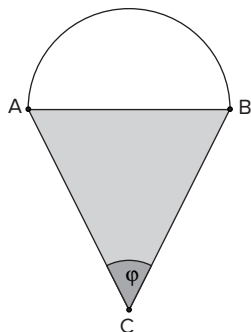
27 **Fuvest** Na figura, estão representadas a circunferência C, de centro O e raio 2, e os pontos A, B, P e Q, de tal modo que:
1. O ponto O pertence ao segmento $\overline{PQ}$.
2. $OP = 1$, $OQ = \sqrt{2}$.
3. A e B são pontos da circunferência, $\overline{AP} \perp \overline{PQ}$ e $\overline{BQ} \perp \overline{PQ}$.

Assim sendo, determine:
a) a área do triângulo APO.
b) os comprimentos dos arcos determinados por A e B em C.
c) a área da região hachurada.

28 **Unicamp 2015** A figura a seguir exibe um círculo de raio r que tangencia internamente um setor circular de raio R e ângulo central θ.

a) Para $\theta = 60°$, determine a razão entre as áreas do círculo e do setor circular.
b) Determine o valor de $\cos\theta$ no caso em que $R = 4r$.

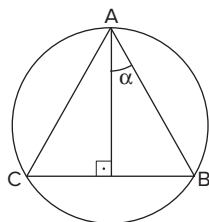
29 **Fuvest** O círculo C, de raio R, está inscrito no triângulo equilátero DEF. Um círculo de raio r está no interior do triângulo DEF e é tangente externamente a C e a dois lados do triângulo, conforme a figura.

Assim, determine:
a) a razão entre R e r.
b) a área do triângulo DEF em função de r.

30 Quatro circunferências de raios unitários estão dispos tas no interior de um triângulo retângulo tangenciando seus lados, como mostra a figura:

Se cada circunferência tangencia também as circunferências vizinhas, a área da região hachurada vale:

A $10 + 2\sqrt{5} + \pi$
B $5 + 2\sqrt{5} + 2\pi$
C $5 + \sqrt{5} \quad \pi$
D $10 + \sqrt{5} - \pi$
E $5 + \sqrt{5} + 2\pi$

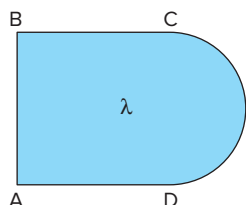
31 **Unicamp 2013** O segmento $\overline{AB}$ é o diâmetro de um semicírculo e a base de um triângulo isósceles ABC, conforme a figura a seguir.

Denotando as áreas das regiões semicircular e triangular, respectivamente, por S(φ) e T(φ), podemos afirmar que a razão $\frac{S(\varphi)}{T(\varphi)}$, quando $\varphi = \frac{\pi}{2}$ radianos, é:

A $\frac{\pi}{2}$
B 2π
C π
D $\frac{\pi}{4}$

32 **Fuvest** Na figura a seguir, o triângulo ABC inscrito na circunferência tem AB = AC. O ângulo entre o lado $\overline{AB}$ e a altura do triângulo ABC em relação a $\overline{BC}$ é α. Nestas condições, o quociente entre a área do triângulo ABC e a área do círculo da figura é dado, em função de α, pela expressão:

A $\left(\frac{2}{\pi}\right)\cos^2\alpha$
B $\left(\frac{2}{\pi}\right)\text{sen}^2 2\alpha$
C $\left(\frac{2}{\pi}\right)\text{sen}^2 2\alpha \cdot \cos\alpha$
D $\left(\frac{2}{\pi}\right)\text{sen}\alpha \cdot \cos 2\alpha$
E $\left(\frac{2}{\pi}\right)\text{sen}2\alpha \cdot \cos^2\alpha$

33 **Unicamp** Em um triângulo com vértices A, B e C, inscrevemos um círculo de raio r. Sabe-se que o ângulo A tem 90° e que o círculo inscrito tangencia o lado $\overline{BC}$ no ponto P, dividindo esse lado em dois trechos com comprimentos PB = 10 e PC = 3.

a) Determine r.
b) Determine AB e AC.
c) Determine a área da região que é, ao mesmo tempo, interna ao triângulo e externa ao círculo.

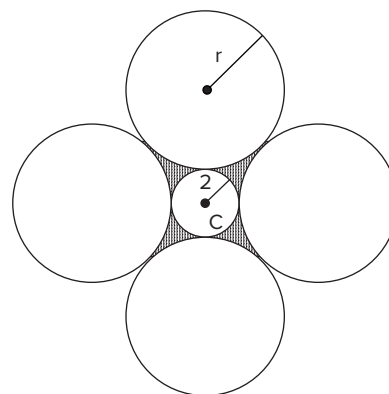
34 Substituindo o lado $\overline{CD}$ de um quadrado ABCD, com 10 cm de lado, por uma semicircunferência de diâmetro CD, obtém-se a seguinte figura λ:

Considere a figura λ' formada pelos pontos exteriores à λ que distam exatamente 1 cm do contorno da figura λ.

a) Determine o perímetro aproximado de λ'.
b) Determine a área aproximada de λ'.

Considere π = 3.

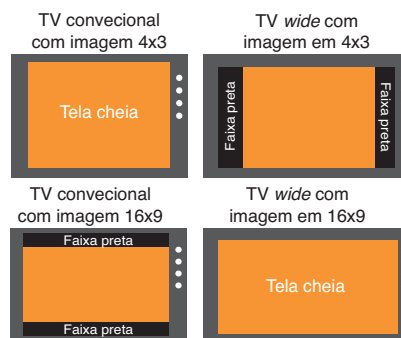
35 **Unicamp** Entre todos os triângulos cujos lados têm como medidas números inteiros e perímetro igual a 24 cm, apenas um deles é equilátero e apenas um deles é retângulo. Sabe-se que um dos catetos do triângulo retângulo mede 8 cm.

a) Calcule a área do triângulo equilátero.
b) Encontre o raio da circunferência circunscrita ao triângulo retângulo.

36 **Fuvest** Na figura a seguir, cada uma das quatro circunferências externas tem mesmo raio r e cada uma delas é tangente a outras duas e à circunferência interna C.

Se o raio de C é igual a 2, determinar:

a) o valor de r.
b) a área da região hachurada.

Texto para as próximas 3 questões.

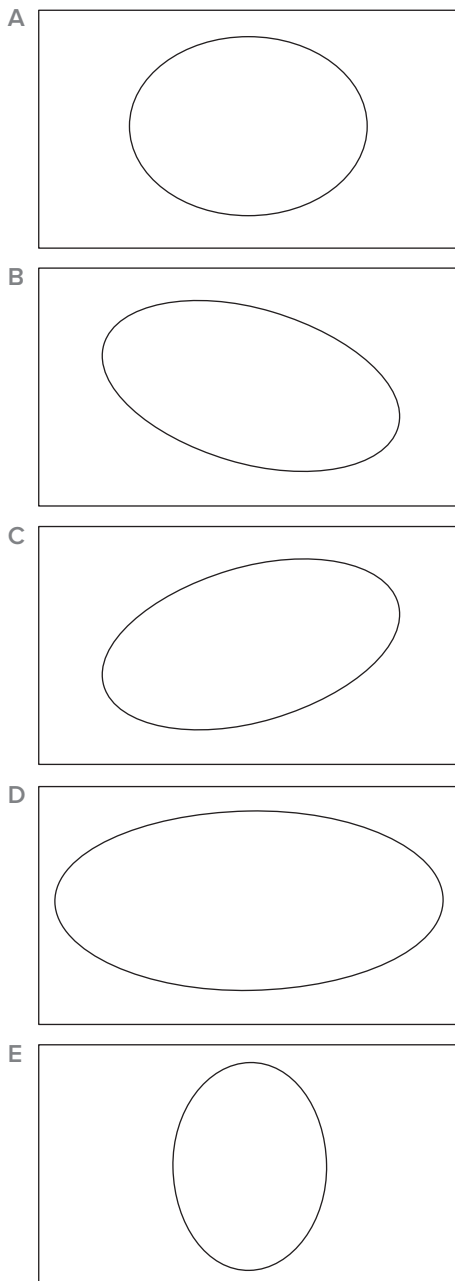
Atualmente, as telas dos aparelhos de televisão são fabricadas em dois formatos: o convencional, chamado de fullscreen, e o widescreen. No primeiro, a tela é um retângulo com base e altura na proporção de 4 para 3, e no segundo essa proporção é de 16 para 9. O formato 4 × 3 ainda é o ideal para se assistir à programação produzida para a TV, mas, para se assistir a uma produção cinematográfica, o formato de tela ideal é o 16 × 9. Por isso, os televisores têm um controle que adapta o formato da imagem em suas telas. As figuras a seguir ilustram as quatro possíveis situações em relação ao formato da tela e da imagem:

37 Paula tem dois aparelhos de TV, um convencional e outro com tela *widescreen*, que estão sintonizados em uma mesma transmissão exibindo imagens em tela cheia. Se, em determinado momento, ela vê a imagem perfeita de uma circunferência no aparelho convencional, então, nesse mesmo momento, na tela *widescreen*, vê-se uma imagem semelhante a:

A

B

C

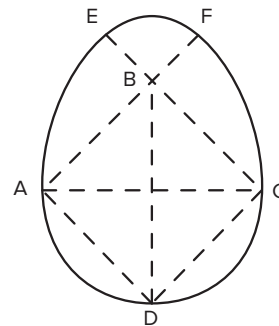
D

E

38 Quando a proporção das dimensões da imagem difere da proporção das dimensões da tela, aparecem faixas pretas nos televisores. Considere a porcentagem X da tela *widescreen* que fica inutilizada quando ajustamos a imagem para 4×3 e a porcentagem Y da tela convencional que fica inutilizada quando ajustamos a imagem para 16×9.
Assinale a relação correta entre os valores de X e Y.

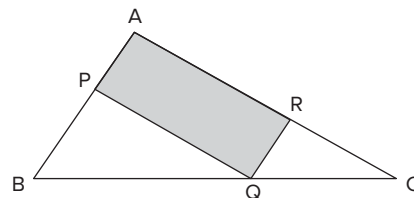
A $X > 2Y$
B $Y < 2X$
C $X + Y = 100\%$
D $X = Y$
E $X - Y = 1\%$

39 Comercialmente, as telas de televisores são medidas pela diagonal. Então, quando compramos uma TV de 22 polegadas, não é a base nem a altura da tela que têm essa medida; é a diagonal da tela que possui 22 polegadas.
Considere dois aparelhos de televisão com 22 polegadas, um no formato convencional 4×3 e outro no formato *widescreen*. Calculando a razão entre as áreas das duas telas, pode-se concluir que a área da tela convencional é, aproximadamente,

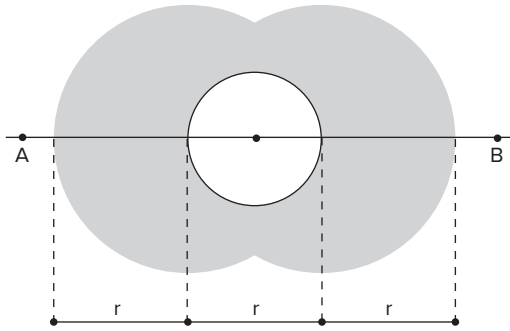
A 36% menor do que a área da tela *widescreen*.
B 12% menor do que a área da tela *widescreen*.
C igual à área da tela *widescreen*.
D 12% maior do que a área da tela *widescreen*.
E 36% maior do que a área da tela *widescreen*.

40 A forma geométrica oval a seguir é composta de 4 arcos de circunferências diferentes.

Os vértices A e C do quadrado ABCD são os centros dos arcos $\overset{\frown}{CF}$ e $\overset{\frown}{AE}$, respectivamente. O arco $\overset{\frown}{EF}$ tem centro no vértice B, e o arco $\overset{\frown}{AC}$ tem o centro no ponto de encontro das diagonais do quadrado.
Sabendo que o quadrado tem 32 cm^2 de área e usando as aproximações $\pi \cong 3{,}14$ e $\sqrt{2} = 1{,}41$, faça estimativas de valores inteiros para:

a) o perímetro dessa oval.
b) a área aproximada dessa oval.

41 **AFA 2017** Considere, no triângulo ABC a seguir, os pontos $P \in \overline{AB}$, $Q \in \overline{BC}$, $R \in \overline{AC}$ e os segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$ paralelos, respectivamente, a $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$.

Sabendo que BQ = 3 cm, QC = 1 cm e que a área do triângulo ABC é 8 cm^2, então a área do paralelogramo hachurado, em cm^2, é igual a:

A 2
B 3
C 4
D 5

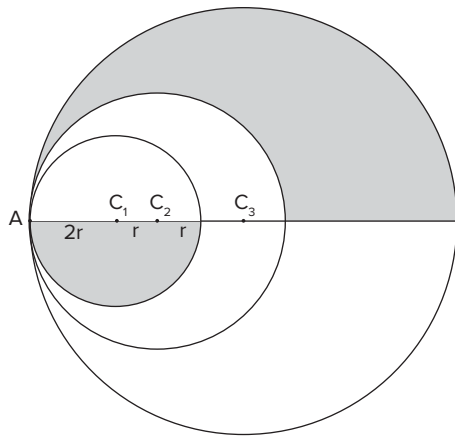
42 **AFA 2014** Na figura a seguir, os três círculos têm centro sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$, e os dois de maior raio têm centro sobre a circunferência de menor raio.

A expressão que fornece o valor da área sombreada é:

A $\dfrac{17\pi - 6\sqrt{3}}{9}r^2$

B $\dfrac{11\pi + 9\sqrt{3}}{12}r^2$

C $\dfrac{15\pi - 4\sqrt{3}}{9}r^2$

D $\dfrac{13\pi + 6\sqrt{3}}{12}r^2$

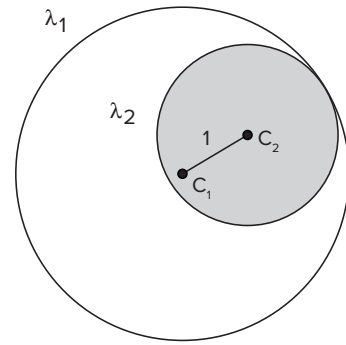
43 **AFA 2012** Conforme a figura a seguir, A é o ponto de tangência das circunferências de centros C_1, C_2 e C_3. Sabe-se que os raios dessas circunferências formam uma progressão geométrica crescente.

Se os raios das circunferências de centros C_1 e C_2 medem, respectivamente, 2r e 3r, então a área da região sombreada vale, em unidades de área,

A $\dfrac{55}{8}\pi r^2$

B $\dfrac{29}{4}\pi r^2$

C $\dfrac{61}{8}\pi r^2$

D $8\pi r^2$

44 **AFA 2011** As circunferências λ_1 e λ_2 da figura a seguir são tangentes interiores, e a distância entre os centros C_1 e C_2 é igual a 1 cm

Se a área sombreada é igual à área não sombreada na figura, é correto afirmar que o raio de λ_2, em cm, é um número do intervalo

A $\left]2, \dfrac{11}{5}\right[$

B $\left]\dfrac{11}{5}, \dfrac{23}{10}\right[$

C $\left]\dfrac{23}{10}, \dfrac{5}{2}\right[$

D $\left]\dfrac{5}{2}, \dfrac{13}{5}\right[$

45 **ITA 2016** Sejam λ uma circunferência de raio 4 cm e $\overline{PQ}$ uma corda em λ de comprimento 4 cm. As tangentes a λ em P e em Q interceptam-se no ponto R exterior a λ. Então, a área do triângulo PQR, em cm^2, é igual a:

A $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

B $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

C $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

D $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$

E $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

46 **ITA 2016** Um hexágono convexo regular H e um triângulo equilátero T estão inscritos em circunferências de raios R_H e R_T, respectivamente. Sabendo-se que H e T têm mesma área, determine a razão $\dfrac{R_H}{R_T}$.

47 **ITA 2014** Em um triângulo isósceles ABC, cuja área mede 48 cm^2, a razão entre as medidas da altura $\overline{AP}$ e da base $\overline{BC}$ é igual a $\dfrac{2}{3}$. Das afirmações a seguir:

I. As medianas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem $\sqrt{97}$ cm;

II. O baricentro dista 4 cm do vértice A;

III. Se α é o ângulo formado pela base $\overline{BC}$ com a mediana $\overline{BM}$, relativa ao lado $\overline{AC}$, então $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{97}}$;

É (são) verdadeira(s):

A apenas I.

B apenas II.

C apenas III.

D apenas I e III.

E apenas II e III.

48 **ITA 2011** Um triângulo ABC está inscrito numa circunferência de raio 5 cm. Sabe-se ainda que $\overline{AB}$ é o diâmetro, $\overline{BC}$ mede 6 cm e a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$ intercepta a circunferência no ponto D. Se α é a soma das áreas dos triângulos ABC e ABD e β é a área comum aos dois, o valor de $\alpha - 2\beta$, em cm^2, é igual a:

A 14

B 15

C 16

D 17

E 18

49 ITA 2011 Sejam ABCD um quadrado e E um ponto sobre $\overline{AB}$. Considere as áreas do quadrado ABCD, do trapézio BEDC e do triângulo ADE. Sabendo que estas áreas definem, na ordem em que estão apresentadas, uma progressão aritmética cuja soma é 200 cm^2, a medida do segmento $\overline{AE}$, em cm, é igual a:

A $\frac{10}{3}$ B 5 C $\frac{20}{3}$ D $\frac{25}{3}$ E 10

50 ITA Considere o quadrado ABCD com lados de 10 m de comprimento. Seja M um ponto sobre o lado $\overline{AB}$ e N um ponto sobre o lado $\overline{AD}$, equidistantes de A. Por M traça-se uma reta r paralela ao lado $\overline{AD}$ e por N uma reta s paralela ao lado $\overline{AB}$, que se interceptam no ponto O. Considere os quadrados AMON e OPCQ, onde P é a interseção de s com o lado $\overline{BC}$ e Q é a interseção de r com o lado $\overline{DC}$. Sabendo-se que as áreas dos quadrados AMON, OPCQ e ABCD constituem, nesta ordem, uma progressão geométrica, então a distância entre os pontos A e M é igual, em metros, a:

A $15+5\sqrt{5}$
B $10+5\sqrt{5}$
C $10-\sqrt{5}$
D $15\ 5\ \sqrt{5}$
E $10-3\sqrt{5}$

51 ITA Um triângulo acutângulo de vértices A, B e C está inscrito numa circunferência de raio $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ Sabe-se que $\overline{AB}$ mede $2\sqrt{5}$ e $\overline{BC}$ mede $2\sqrt{2}$ Determine a área do triângulo ABC

52 ITA Sejam r e s duas retas paralelas distando 10 cm entre si. Seja P um ponto no plano definido por r e s e exterior à região limitada por estas retas, distando 5 cm de r. As respectivas medidas da área e do perímetro, em cm^2 e cm, do triângulo equilátero PQR cujos vértices Q e R estão, respectivamente, sobre as retas r e s, são iguais a:

A $175\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $5\sqrt{21}$.
B $175\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $10\sqrt{21}$.
C $175\sqrt{3}$ e $10\sqrt{21}$.
D $175\sqrt{3}$ e $5\sqrt{21}$.
E 700 e $10\sqrt{21}$.

53 ITA Sejam P_1 e P_2 octógonos regulares. O primeiro está inscrito e o segundo circunscrito a uma circunferência de raio R. Sendo A_1 a área de P_1 e A_2 a área de P_2, então a razão $\frac{A_1}{A_2}$ é igual a:

A $\sqrt{\frac{5}{8}}$
B $9\frac{\sqrt{2}}{16}$
C $2\sqrt{2}-1$
D $4\frac{\sqrt{2}+1}{8}$
E $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

54 ITA Considere um losango ABCD cujo perímetro mede 100 cm e cuja maior diagonal mede 40 cm. Calcule a área, em cm^2, do círculo inscrito neste losango.

55 ITA Considere o triângulo de vértices A, B e C, sendo D um ponto do lado $\overline{AB}$ e E um ponto do lado $\overline{AC}$. Se $m(\overline{AB}) = 8$ cm, $m(\overline{AC}) = 10$ cm, $m(\overline{AD}) = 4$ cm e $m(\overline{AE}) = 6$ cm, a razão das áreas dos triângulos ADE e ABC é:

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{3}{5}$ C $\frac{3}{8}$ D $\frac{3}{10}$ E $\frac{3}{4}$

56 ITA Duas circunferências concêntricas C_1 e C_2 têm raios de 6 cm e $6\sqrt{2}$ cm, respectivamente. Seja $\overline{AB}$ uma corda de C_2, tangente à C_1. A área da menor região delimitada pela corda $\overline{AB}$ e pelo arco $\overset{\frown}{AB}$ mede, em cm^2,

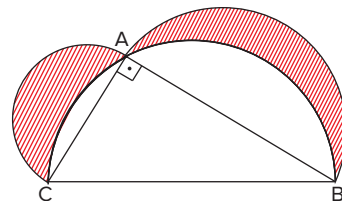
A $9(\pi\quad 3)$
B $18(\pi+3)$
C $18(\pi\quad 2)$
D $18(\pi+2)$
E $16(\pi+3)$

57 ITA Sejam r e s duas retas paralelas distando entre si 5 cm. Seja P um ponto na região interior a estas retas, distando 4 cm de r. A área do triângulo equilátero PQR, cujos vértices Q e R estão, respectivamente, sobre as retas r e s, é igual, em cm^2, a:

A $3\sqrt{15}$
B $7\sqrt{3}$
C $5\sqrt{6}$
D $\frac{15}{2}\sqrt{3}$
E $\frac{7}{2}\sqrt{15}$

58 IME 2015 Seja um trapézio retângulo de bases a e b com diagonais perpendiculares. Determine a área do trapézio.

A $\frac{ab}{2}$
B $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$
C $\left(\frac{a+b}{2}\right)\sqrt{ab}$
D $\left(\frac{2a+b}{2}\right)\sqrt{ab}$
E $\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)a^2b}$

59 IME 2011 Seja o triângulo retângulo ABC com os catetos medindo 3 cm e 4 cm. Os diâmetros dos três semicírculos, traçados na figura a seguir, coincidem com os lados do triângulo ABC. A soma das áreas hachuradas, em cm^2, é:

A 6 B 8 C 10 D 12 E 14

60 IME Seja ABC um triângulo de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ iguais a 26, 28 e 18, respectivamente. Considere o círculo de centro O inscrito nesse triângulo. A distância AO vale:

A $\frac{\sqrt{104}}{6}$
B $\frac{\sqrt{104}}{3}$
C $\frac{2\sqrt{104}}{3}$
D $\sqrt{104}$
E $3\sqrt{104}$

Frans Hals, *René Descartes*, *c.* 1649, óleo sobre tela, Museu do Louvre, Paris, França.

FRENTE 3

CAPÍTULO

7

O plano cartesiano

Todos os problemas de Geometria podem facilmente ser reduzidos a termos tais que, para construí-los, nada mais é necessário que o conhecimento do comprimento de algumas linhas retas. Como a Aritmética consiste em apenas quatro ou cinco operações, chamadas de adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes, que podemos considerar uma espécie de divisão; na Geometria, não há outra coisa a fazer com relação às linhas que procuramos se não adicionar ou subtrair outras linhas.

DESCARTES, R. *The Geometry of Rene Descartes: with a facsimile of the first edition*. SMITH, David Eugene; LATHAM, Marcia L (Trads.). Nova York: Dover Publications, 1954 p. 2

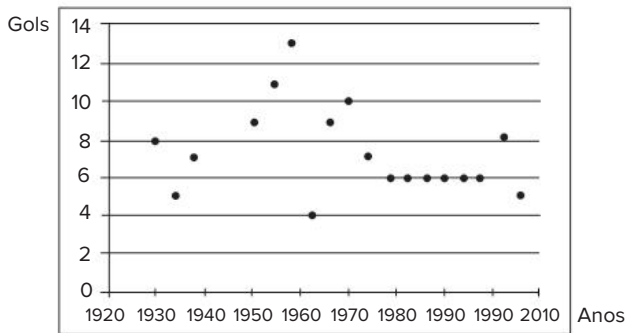
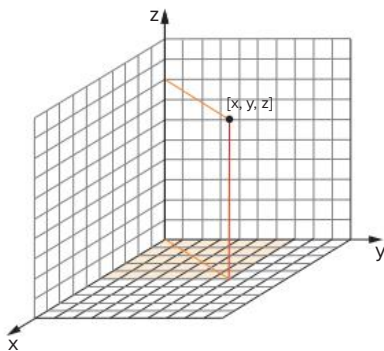
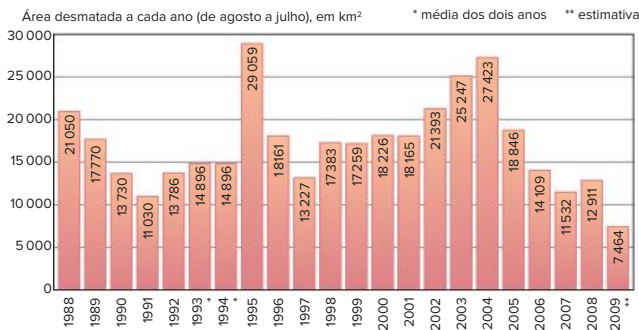
Em 1637, o filósofo e matemático René Descartes (1596-1650) propôs novas ideias na área da Geometria, principalmente no que diz respeito à representação algébrica dos conceitos geométricos, já muito antigos, apresentados nos Elementos de Euclides por volta de 300 a.C.

Introdução

O conceito da existência de um segmento unitário que funcione como elemento neutro na multiplicação, por exemplo, revolucionou o pensamento euclidiano, no qual produtos e potências de segmentos representavam exclusivamente áreas e volumes.

De acordo com essa nova ideia, se um segmento $\overline{AB}$ é unitário, para qualquer segmento $\overline{BC}$, o produto AB   BC = = BC Nesse caso, é importante observar que $\overline{BC}$ conti nua representando um segmento ou mesmo um vetor No estudo da Geometria Euclidiana tradicional, AB   BC representaria, por exemplo, a área de um retângulo ABCD.

Esse conceito não rompe completamente com o pensamento euclidiano, apenas atribui mais possibilidades para a representação geométrica de produtos, potências e, consequentemente, raízes. Ele permite que a localização de pontos seja expressa numericamente pelas distâncias deles a retas preestabelecidas, denominadas eixos coor denados

Quantidades de gols dos artilheiros das Copas do Mundo

Disponível em: <www.suapesquisa.com>. Acesso em: 23 abr. 2010. (Adapt.).

Queda do desmatamento da Amazônia

Fonte: Inpe e MMA, 2010.

Assim, surgiu um novo modelo matemático de análise algébrica da Geometria, que possibilita o cálculo de ângu los, áreas e volumes a partir dos números que indicam as posições dos elementos das figuras estudadas.

Dizemos que a Geometria é o estudo das formas, dos tamanhos e das posições. E foram os gregos antigos que finalizaram a maior parte do estudo das formas a partir dos tamanhos que conhecemos atualmente, mas foi Descartes que voltou a atenção dos matemáticos para o estudo das posições.

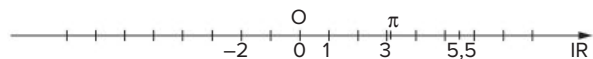
Hoje em dia, as posições dos pontos de uma figura geométrica são representadas por sequências de dois ou três números cuja interpretação tem como referência o que chamamos de sistema de coordenadas cartesianas, em homenagem a René Descartes.

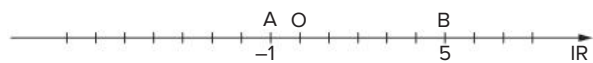
De certo modo, podemos dizer que as ideias dele pro piciaram uma maneira de comunicação inédita na história da humanidade: o gráfico.

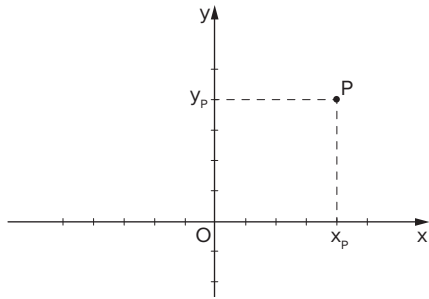
A principal ideia da Geometria Analítica é integrar a Álgebra à Geometria Plana. No livro *La Géométrie*, escrito por René Descartes, é possível perceber que essa inte gração gera, ao menos, duas possibilidades interessantes: a de usar as ferramentas da Álgebra para resolver pro blemas de Geometria Plana e a de interpretar de maneira mais eficiente algumas estruturas algébricas por meio da Geometria.

Para chegar a esses objetivos e desenvolver toda a Geometria Analítica, precisamos primeiro construir algumas estruturas básicas.

Coordenadas em um eixo e no plano cartesiano

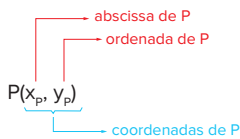
A primeira estrutura necessária para compreender a Geometria Analítica é a noção de **eixo**. Considere uma **reta orientada** e tome um ponto dela, normalmente denotado pela letra O, chamado de **origem**. Faça uma correspondência entre cada ponto da reta e todos os números reais, até mesmo os negativos e os irracionais, como se fosse formar uma régua (Figura 1).

Agora, cada ponto está "ligado" a um número real, então vamos chamar esses números de **coordenadas**. Elas serão muito úteis para descrever toda a Geometria.

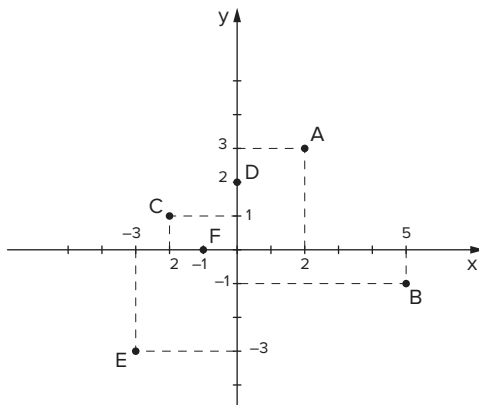
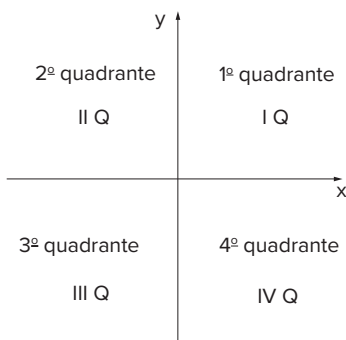
Assim, podemos, por exemplo, denotar um segmento de reta sobre um eixo e calcular facilmente seu comprimento, pois ele será a diferença entre as coordenadas desse segmento. Observe a figura a seguir.

$$AB = dist(A, B) = |5 - (-1)| = 6$$

Com isso, podemos definir um plano a partir de dois eixos perpendiculares (x e y) com a origem em comum e usar retas paralelas a esses eixos para determinar as coor denadas de seus pontos

O plano definido com essas características é chamado de **plano cartesiano ortogonal**

Atenção

No plano cartesiano, não denotamos um ponto apenas por uma letra latina maiúscula, como na Geometria Plana, e sim por um par de coordenadas (x, y).

Chamamos a primeira coordenada do ponto de **abscissa** e a segunda de **ordenada**.

Veja alguns pontos descritos por suas coordenadas e suas representações no plano:

A(2, 3), B(5, –1), C(–2, 1), D(0, 2), E(–3, –3) e F(–1, 0)

Note que existem pontos sobre os eixos e pontos que não pertencem aos eixos Para melhor descrevê los, cha maremos as quatro regiões que não estão contidas nos eixos de quadrantes e lhes daremos números, como na figura a seguir

Atenção

Se P pertence ao eixo *x*, então sua ordenada é nula (y = 0).

Se P pertence ao eixo *y*, então sua abscissa é nula (x = 0).

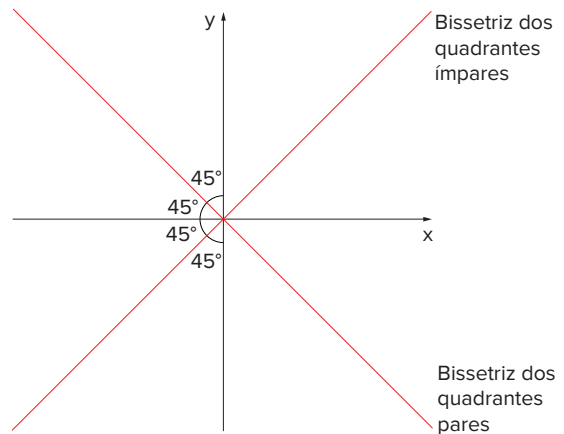
Se P pertence ao 1º quadrante, então suas coordenadas são tais que x > 0 e y > 0.

Se P pertence ao 2º quadrante, então suas coordenadas são tais que x < 0 e y > 0.

Se P pertence ao 3º quadrante, então suas coordenadas são tais que x < 0 e y < 0

Se P pertence ao 4º quadrante, então suas coordenadas são tais que x > 0 e y < 0.

As semirretas que dividem os quadrantes em duas regiões congruentes são denominadas bissetrizes desses quadrantes, pois dividem o ângulo reto formado pelos eixos coordenados em dois ângulos de 45°.

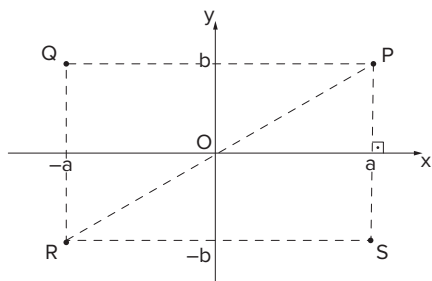
Como a semirreta bissetriz do 1º quadrante é colinear à do 3º quadrante, dizemos que a reunião dos pontos dessas duas semirretas é a reta bissetriz dos quadrantes ímpares. Isso também ocorre com as bissetrizes do 2º e 4º quadrantes, portanto dizemos que a reunião dessas semirretas é a reta bissetriz dos quadrantes pares.

Na figura anterior observe que, se um ponto estiver sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares, então suas coordenadas serão iguais. Entretanto, se ele estiver sobre a bissetriz dos quadrantes pares, então a soma de suas coordenadas será nula, ou seja, suas coordenadas são valores opostos.

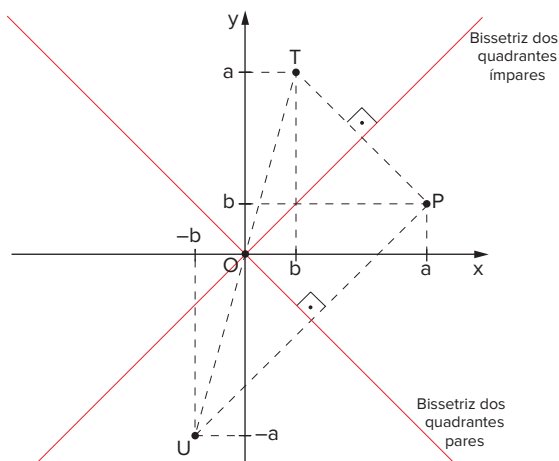
Note que:

- P(a, b) ∈ bissetriz dos quadrantes ímpares, portanto a = b.
- P(a, b) ∈ bissetriz dos quadrantes pares, portanto a = –b ⇔ a + b = 0.

Simetrias no plano cartesiano

Analisaremos, agora, alguns tipos de simetria que podem ser úteis tanto na resolução de problemas geométricos quanto na análise de algumas funções.

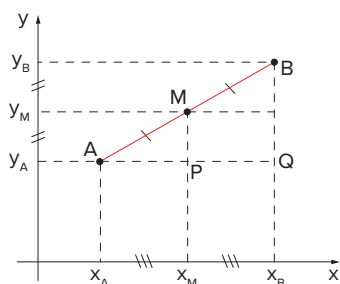
Os próprios eixos do plano cartesiano estabelecem simetrias bilaterais entre pontos de diferentes quadrantes, como mostra a ilustração a seguir:

- Os pontos **P(a, b)** e **Q(–a, b)** são simétricos em relação ao eixo **Oy** das ordenadas.
- Os pontos **P(a, b)** e **S(a, –b)** são simétricos em relação ao eixo **Ox** das abscissas.
- Os pontos **P(a, b)** e **R(–a, –b)** são simétricos em relação à origem **O** do plano cartesiano.

Sobre as bissetrizes dos quadrantes do plano cartesiano, devemos observar as seguintes simetrias:

- Os pontos **P(a, b)** e **T(b, a)** são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.
- Os pontos **P(a, b)** e **U(–b, –a)** são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes pares.

Note também que os pontos T e U são simétricos em relação à origem do sistema cartesiano.

Determinação das coordenadas do ponto médio

Considerando que todo segmento de reta tem um ponto médio que o divide na razão de 1 : 2, ou seja, ao meio, podemos deduzir uma fórmula para determinar as coordenadas desse ponto sempre que tivermos as coordenadas dos pontos extremos do segmento.

Observe:

Note que os triângulos ABQ e AMP são semelhantes, pelo caso AA, na razão 2 : 1, logo:

$$\frac{x_B \ x_A}{x_M \ x_A} = \frac{2}{1}$$

Isolando x_M, obtemos:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

E, ainda:

$$\frac{y_B \ y_A}{y_M - y_A} = \frac{2}{1}$$

Isolando y_M, obtemos:

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Assim, sendo **A(x_A, y_A)** e **B(x_B, y_B)** as extremidades de um segmento $\overline{AB}$, as coordenadas **(x_M, y_M)** do ponto médio **M** do segmento são tais que:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Exercícios resolvidos

1 Determine o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, com A(2, 3) e B(4, 8).

Resolução:

Considerando que, para determinar um ponto, é ne cessário calcular suas duas coordenadas, vamos encontrar x_M e y_M

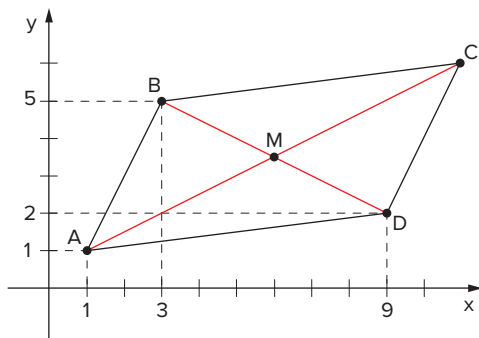
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3+8}{2} = \frac{11}{2}$$

Portanto, o ponto médio de $\overline{AB}$ é $M\left(3, \frac{11}{2}\right)$.

2 Dado o paralelogramo ABCD, determine o vértice C sabendo que A(1, 1) e a diagonal $\overline{BD}$ é tal que B(3, 5) e D(9, 2).

Resolução:

Devemos lembrar que, em um paralelogramo, as diagonais se encontram nos respectivos pontos médios. Assim, vamos determinar o ponto médio de $\overline{BD}$ e utilizá-lo também como ponto médio de $\overline{AC}$.

Então, seja M o ponto médio da diagonal $\overline{BD}$:

$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{3+9}{2} = 6$$

$$y_M = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{5+2}{2} = \frac{7}{2}$$

Portanto, $M\left(6, \frac{7}{2}\right)$ é o ponto médio de $\overline{BD}$, além de ser ponto médio de $\overline{AC}$. Assim, sendo A(1, 1), tem-se:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \Leftrightarrow 6 = \frac{1 + x_C}{2} \Rightarrow 1 + x_C = 12 \Rightarrow x_C = 11$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} \Leftrightarrow \frac{7}{2} = \frac{1 + y_C}{2} \Rightarrow 1 + y_C = 7 \Rightarrow y_C = 6$$

Portanto, o vértice C tem coordenadas (11, 6).

! Atenção

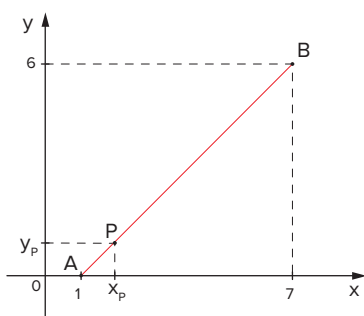
As demonstrações são, muitas vezes, fontes de ideias para resolver exercícios. Um exemplo disso pode ser visto na questão a seguir, que também utiliza a ideia da demonstração do ponto médio.

Agora que conhecemos as expressões usadas para determinar o ponto médio de um segmento, podemos estender esse conceito e dividir um segmento em qualquer razão $k \in \mathbb{R}_+^*$.

Note esse conceito no exercício a seguir.

Exercício resolvido

3 Determine o ponto P interno ao segmento $\overline{AB}$ e que o divide na razão $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{5}$, sendo A(1, 0) e B(7, 6).

Resolução:

Para determinar as coordenadas do ponto P, utilizaremos a razão de semelhança:

$$\frac{x_P - x_A}{x_B - x_P} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{x_P - 1}{7 - x_P} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5x_P - 5 = 7 - x_P \Rightarrow x_P = 2$$

e

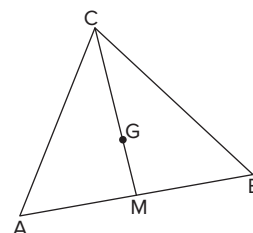
$$\frac{y_P - y_A}{y_B - y_P} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{y_P - 0}{6 - y_P} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5y_P = 6 - y_P \Rightarrow y_P = 1$$

Portanto, o ponto P tal que $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{5}$ é P(2, 1).

Determinação das coordenadas do baricentro de um triângulo

Sabemos que o baricentro do triângulo é o ponto de encontro das medianas e divide cada uma delas na razão de 1 : 2 Diante disso, as coordenadas do baricentro (G) de um triângulo de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ são dadas por:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Verifique uma demonstração dessas expressões con siderando a mediana $\overline{CM}$ do triângulo a seguir:

Primeiro, devemos lembrar que $\frac{CG}{GM} = \frac{2}{1}$, portanto, como vimos no exercício anterior, podemos escrever:

$$\frac{x_C\ x_G}{x_G - x_M} = \frac{2}{1} \quad \text{e} \quad \frac{y_C\ y_G}{y_G - y_M} = \frac{2}{1}$$

Para terminar a demonstração, precisamos seguir dois passos:

1) trocar x_M por $\frac{x_A + x_B}{2}$ e y_M por $\frac{y_A + y_B}{2}$, pois M é ponto médio de $\overline{AB}$;
2) isolar x_G e y_G.

$$\frac{x_C - x_G}{x_G\ x_M} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow \frac{x_C - x_G}{x_G \quad \frac{x_A + x_B}{2}} = \frac{2}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x_C - 2x_G}{2x_G \quad x_A \quad x_B} = \frac{2}{1} \Rightarrow 4x_G - 2x_A - 2x_B = 2x_C - 2x_G \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x_G + 2x_G = 2x_A + 2x_B + 2x_C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x_G = 2(x_A + x_B + x_C) \Rightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

De maneira análoga, podemos demonstrar que:

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Exercícios resolvidos

4 Determine as coordenadas do baricentro do triângulo ABC de vértices A(1, 2), B(4, 7) e C(8, 3).

Resolução:

Substituindo as coordenadas dos vértices na expressão obtida na demonstração, temos:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Leftrightarrow x_G = \frac{1+4+8}{3} = \frac{13}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Leftrightarrow y_G = \frac{2+7+3}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

O baricentro do triângulo é o ponto $G\left(\frac{13}{3}, 4\right)$.

5 Sabendo que o baricentro do triângulo ABC é o ponto G(5, –2) e que os vértices B e C possuem coordenadas respectivamente iguais a (9, 7) e (–1, –9), determine as coordenadas do vértice A.

Resolução:

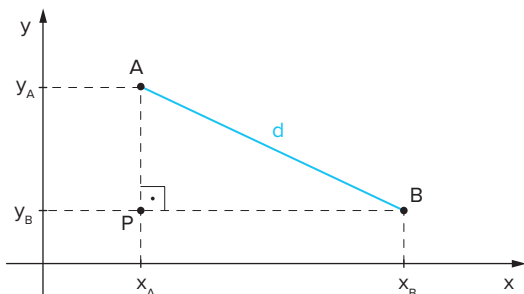
Com os dados do enunciado, temos:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Leftrightarrow 5 = \frac{x_A + 9 + (\ \ 1)}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_A + 8 = 15 \Rightarrow x_A = 7$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Leftrightarrow \quad 2 = \frac{y_A + 7 + (-9)}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_A \quad 2 = \quad 6 \Rightarrow y_A = \quad 4$$

As coordenadas do vértice A são (7, –4).

Distância entre dois pontos

Agora, determinaremos a distância entre os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Para isso, começaremos pelo caso mais geral, ou seja, aquele em que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ não é perpendicular a nenhum dos dois eixos.

Como o triângulo ABP é retângulo em P, temos, por Pitágoras, que:

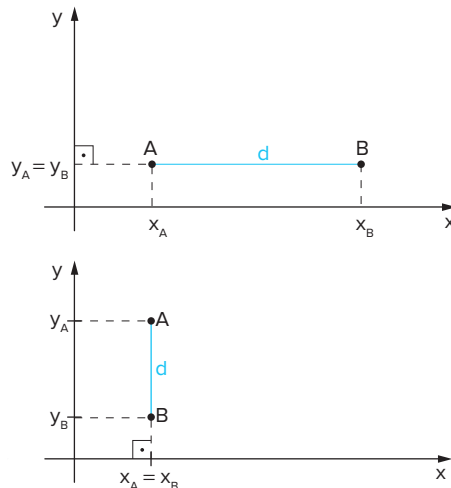
$$[d(A, B)]^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$

Portanto:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

! Atenção

Observe que $(x_A \quad x_B)^2 = (x_B \quad x_A)^2$, portanto não devemos nos preocupar com a ordem em que escolhemos as coordenadas e podemos chamar $(x_A - x_B)^2$ ou $(x_B - x_A)^2$ de $(\Delta x)^2$. Isso vale para as coordenadas *y*, que substituiremos pela notação $(\Delta y)^2$.

Observe que, se a reta $\overleftrightarrow{AB}$ formar 90° com algum dos eixos, tal fórmula também será verdadeira. Isso porque, se a reta for perpendicular ao eixo *y*, então $\Delta y = 0$, e, se a reta for perpendicular ao eixo *x*, então $\Delta x = 0$.

Exercícios resolvidos

6 Determine a distância entre os pontos A(2, 3) e B(5, –1).

Resolução:

Substituindo as coordenadas dos pontos A e B na expressão da distância, temos:

$$d(A, B) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(2-5)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{25} = 5 \text{ unidades de comprimento}$$

7 Calcule o comprimento da mediana relativa ao lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC, com A(2, 2), B(4, 8) e C(8, 3).

Resolução:

Como a mediana é o segmento com extremidades em um vértice e no ponto médio do lado oposto a esse vértice, precisamos primeiro determinar o ponto médio do lado $\overline{AB}$:

$$\left.\begin{array}{l} x_M = \dfrac{2+4}{2} = 3 \\ y_M = \dfrac{2+8}{2} = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow M(3, 5)$$

Agora, basta calcular a distância de M a C:

$$d(M, C) = \sqrt{(3-8)^2 + (5-3)^2}$$

$$d(M, C) = \sqrt{(\quad 5)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

Logo, o comprimento da mediana é $\sqrt{29}$ unidades de comprimento.

8 Calcule o perímetro do triângulo ABC, com A(2, 3), B(–5, 4) e C(–1, 0).

Resolução:

Para determinar o perímetro do triângulo, precisamos saber os comprimentos (em u c unidades de comprimento) dos três lados desse triângulo. Para isso, calcularemos as distâncias: d(A, B), d(A, C) e d(B, C).

$$\begin{cases} d(A, B) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(2-(-5))^2 + (3-4)^2} = \\ = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} \text{ u.c.} \\ d(A, C) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(2-(-1))^2 + (3-0)^2} = \\ = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} \text{ u.c} \\ d(B, C) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(-5-(-1))^2 + (4-0)^2} = \\ = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} \text{ u.c} \end{cases}$$

Logo, o perímetro (2p) do triângulo é:

$$2p = \sqrt{50} + \sqrt{18} + \sqrt{32} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \text{ u.c.}$$

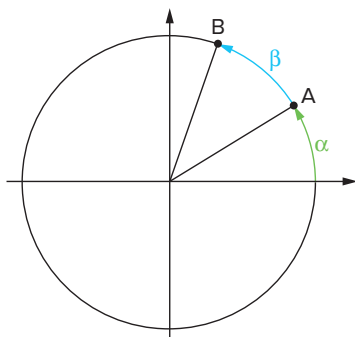
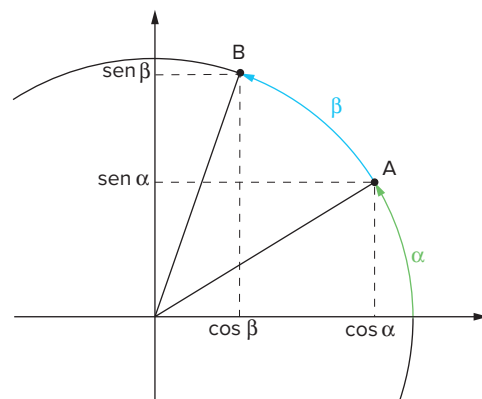
9 Um quadrado ABCD tem $\overline{AC}$ como diagonal e as coordenadas de A e C são, respectivamente, (4, 8) e (–1, 13). Determine a área desse quadrado.

Resolução:

Para determinar a área do quadrado, precisamos conhecer a medida de um de seus lados. Sabendo que a medida da diagonal de um quadrado de lado ℓ é $d = \ell\sqrt{2}$, podemos determinar a medida do lado a par tir da medida da diagonal $\overline{AC}$.

$$AC = d(A, C) = \sqrt{(4 \quad (\ \ 1))^2 + (8 \quad 13)^2} = \sqrt{25+25} =$$
$$= \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ u.c.}$$

Se a diagonal do quadrado mede $5\sqrt{2}$ u.c, então o lado do quadrado mede 5 u.c. Portanto, a área do quadrado mede 25 unidades de área.

10 Determine a distância entre os pontos A e B do ciclo trigonométrico que representam as extremidades dos arcos α e β.

Resolução:

Sabemos que os pontos A e B do ciclo trigonométrico podem ter suas coordenadas representadas, respectivamente, por (cos α, sen α) e (cos β, sen β). Assim, com essas coordenadas, determinaremos a distância em unidades de comprimento:

$$d(A, B) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta)^2} =$$

$$= \sqrt{\cos^2\alpha \quad 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta + \cos^2\beta + \text{sen}^2\alpha \quad 2\cdot\text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\beta + \text{sen}^2\beta} =$$

$$= \sqrt{\underbrace{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}_{1} + \underbrace{\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta}_{1} - 2\underbrace{(\text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\beta + \cos\alpha\cdot\cos\beta)}_{\cos(\alpha-\beta)}} =$$

$$= \sqrt{1+1-2\cos(\alpha-\beta)} = \sqrt{2-2\cos(\alpha-\beta)} =$$
$$= \sqrt{2(1-\cos(\alpha-\beta))} \text{ u.c.}$$

11 Determine todos os pontos equidistantes de A(1, 2) e B(3, –1).

Resolução:

Como não sabemos quais são os pontos, vamos descrevê-los genericamente por P(x, y). Se esses pontos são equidistantes de A e B, podemos afirmar que d(P, A) = d(P, B) Assim, temos:

$$\begin{cases} d(P, A) = \sqrt{(x \quad 1)^2 + (y \quad 2)^2} \\ d(P, B) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-(-1))^2} \end{cases}$$

Então:

$$d(P, A) = d(P, B)$$
$$\sqrt{(x \quad 1)^2 + (y \quad 2)^2} = \sqrt{(x \quad 3)^2 + (y+1)^2}$$
$$\cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} - 4y + 4 = \cancel{x^2} - 6x + 9 + \cancel{y^2} + 2y + 1$$
$$-2x - 4y + 5 = -6x + 2y + 10$$
$$4x \quad 6y \quad 5 = 0$$

Portanto, todos os pares (x, y) que satisfazem a equação $4x \quad 6y \quad 5 = 0$ correspondem a pontos equidistantes de A e B.

Observação: note que existem infinitos pares (x, y) que satisfazem a equação, logo existem infinitos pontos equidistantes de A e B. Também é importante perceber que esses pontos formam a mediatriz do segmento $\overline{AB}$

FRENTE 3

! Atenção

Como já vimos, o determinante de uma matriz M quadrada de ordem 3 pode ser calculado pela regra de Sarrus. Sendo $M = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, devemos:

1 Repetir as duas primeiras colunas ao lado da terceira coluna da matriz M, obtendo uma "tabela" com 5 colunas:

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} 7 & 5 \\ 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{matrix}$$

2. Multiplicar os elementos da diagonal principal (em azul) e os três elementos das diagonais paralelas a ela e, depois, somar os produtos obtidos:

$84 + 0 + 3 = 87$

3. Multiplicar os elementos da diagonal secundária (em vermelho) e os três elementos das diagonais paralelas a ela e, depois, somar os produtos obtidos:

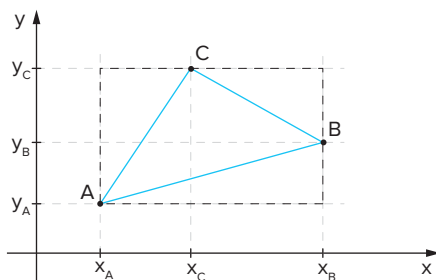
$24 + 0 + 30 = 54$

4. Fazer a diferença entre as somas obtidas nas etapas 2 e 3, nessa ordem, para encontrar o determinante de M:

$$\det(M) = 87 - 54 = 33$$

O cálculo do determinante de uma matriz quadrada de ordem 3 é fundamental tanto para determinar a área do triân gulo a partir das coordenadas de seus vértices quanto para verificar a condição de alinhamento de três pontos no plano cartesiano.

Determinação da área de um triângulo

A seguir, veremos como calcular a área de um triângulo conhecendo apenas seus vértices: $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$. Para entender como é construída a expressão para esse cálculo, observe a figura:

Note que a área do retângulo está dividida em quatro triângulos. Um deles, o ABC, é o desejado, e os outros têm áreas fáceis de calcular. Assim, temos:

$$S_{\Delta ABC} = (x_B \quad x_A) \quad (y_C \quad y_A) \quad \left[\frac{(x_C - x_A)\cdot(y_C - y_A)}{2} + \frac{(x_B - x_A)\cdot(y_B - y_A)}{2} + \frac{(x_B - x_C)\cdot(y_C - y_B)}{2}\right]$$

$$S_{\Delta ABC} = x_B y_C - x_B y_A - x_A y_C + x_A y_A - \left[\frac{x_C y_A \quad x_A y_C + x_A y_A \quad x_B y_A \quad x_A y_B + x_A y_A + x_B y_C + x_C y_B}{2}\right]$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{2x_B y_C - 2x_B y_A - 2x_A y_C + 2x_A y_A + x_C y_A + x_A y_C - x_A y_A + x_B y_A + x_A y_B - x_A y_A - x_B y_C - x_C y_B}{2}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C \quad x_C y_B \quad x_A y_C \quad x_B y_A}{2}$$

Nesse ponto, é necessária uma boa percepção para notar que a expressão descrita no numerador é idêntica à da resolução do determinante:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C \quad x_C y_B \quad x_A y_C \quad x_B y_A$$

Então, a área do triângulo de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ é dada por:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{D}{2}, \text{ em que } D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Vale a pena ressaltar que, como queremos uma expressão que forneça a área sem a necessidade de elaborarmos a figura (bastando apenas substituir as coordenadas dos pontos no determinante D), ao colocarmos cada ponto em uma linha, corremos o risco de obter um determinante negativo, o que não faz sentido nessa situação. Assim, considerando a teoria de determinantes, podemos verificar que o determinante negativo decorre da troca de linhas da matriz. Portanto, para que não tenhamos uma área negativa, basta colocar um módulo no determinante, obtendo a seguinte expressão:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{|D|}{2}, \text{ em que } D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Exercícios resolvidos

12 Determine a área do triângulo ABC, com A(2, 2), B(4, 8) e C(8, 3).

Resolução:

Aplicando a expressão obtida anteriormente, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 1 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (16 + 16 + 12) \quad (64 + 6 + 8) = 44 \quad 78 = \quad 34$$

Assim, a área do triângulo é:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{|D|}{2} = \frac{|-34|}{2} = 17 \text{ unidades de área}$$

13 Calcule a altura relativa ao lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC, com A(1, 1), B(3, 7) e C(5, 3).

Resolução:

Existem algumas maneiras de resolver esse exercício. Nesta resolução, usaremos o cálculo da área:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (7 + 5 + 9) \quad (35 + 3 + 3) = 21 \quad 41 = \quad 20$$

Assim, a área do triângulo é:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{|D|}{2} = \frac{|\ 20|}{2} = 10 \text{ unidades de área}$$

Em seguida, devemos calcular a medida da base $\overline{AB}$ do triângulo:

$$d(A, B) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(1 - 3)^2 + (1 - 7)^2} =$$
$$= \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ u.c.}$$

Como a área de um triângulo também pode ser calculada por $\frac{\text{base} \quad \text{altura}}{2}$, sendo h a altura do triângulo, temos:

$$10 = \frac{2\sqrt{10} \quad h}{2}$$

Isolando *h*, obtemos:

$$10 = \frac{2\sqrt{10} \quad h}{2} \Rightarrow 20 = 2\sqrt{10} \cdot h \Rightarrow h = \frac{20}{2\sqrt{10}} \Rightarrow h = \sqrt{10} \text{ u.c.}$$

Condição de alinhamento de três pontos

Uma maneira interessante de verificar se três pontos estão ou não alinhados é utilizar o mesmo procedimento do cálculo da área e conferir se a área desse "triângulo" é nula Perceba que o raciocínio é simples: se a área é posi tiva, os três pontos não estão alinhados, logo eles formam um triângulo Mas, se a "área" é nula, os três pontos não formam um triângulo, ou seja, estão alinhados

Assim, podemos concluir que, se três pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ estão alinhados, o determinante $D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$ deve ser nulo para que a área seja nula Logo, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ estão alinhados se, e somente se, $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$

Exercícios resolvidos

14 Verifique se os pontos (1, 2), (2, 5) e (3, 8) estão alinhados.

Resolução:

Calculando o determinante formado pelas coordenadas desses pontos, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = (5 + 6 + 16) \quad (15 + 8 + 4) = 27 \quad 27 = 0$$

Portanto, os três pontos estão alinhados.

15 Determine uma expressão que represente todos os pontos alinhados aos pontos A(1, 2) e B(3, 6).

Resolução:

Chamemos genericamente de P(x, y) os pontos alinhados com A e B.

Como esses pontos estão alinhados, podemos escrever que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Assim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6 + 2x + 3y \quad 6x \quad y \quad 6 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -4x + 2y = 0 \Rightarrow y = 2x$$

Portanto, todos os pontos que satisfazem a igualdade y = 2x estão alinhados com A e B.

Observação: esse exercício apresenta uma maneira prática de determinar a equação de uma reta, assunto que estudaremos no próximo capítulo.

Revisando

1 Determine o ponto médio dos segmentos de extremos A e B nos casos a seguir:

a) A(1, 3) e B(5, 9)

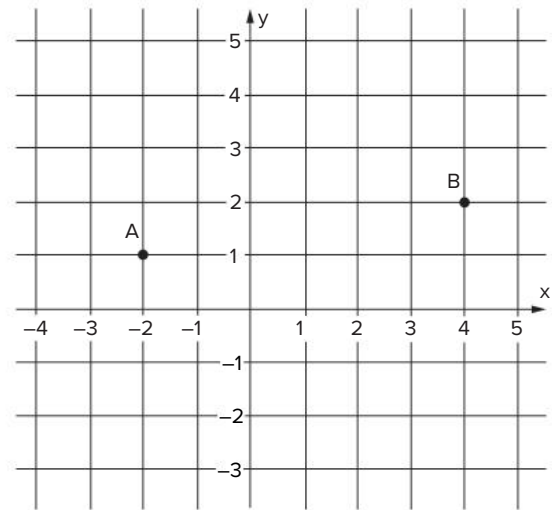
b) A(2, 4) e B(6, 8)

c) A(1,   3) e B(4, 5)

d) A(3,   4) e B(–6,   7)

2 **PUC-Minas 2015** Quando representados no sistema de coordenadas xOy, o ponto B é o simétrico do ponto A(–3, 2) em relação à origem O; por sua vez, o ponto C é o simétrico de B em relação ao eixo *x*. Com base nessas informações, é correto afirmar que a medida da área do triângulo ABC é igual a:

A 8
B 9
C 10
D 12

3 **Feevale 2016** Na figura a seguir, o ponto A representa uma praça, e o ponto B, uma livraria.

Considerando quilômetro (km) como unidade de medida, a menor distância entre a praça e a livraria é de aproximadamente:

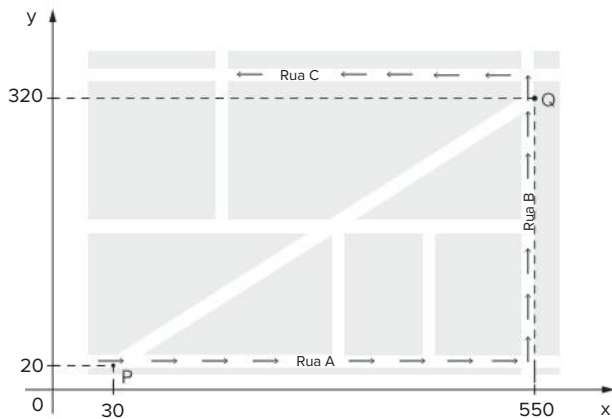
A 4 km
B 5 km
C 6 km
D 7 km
E 8 km

4 **EEAR 2017** Seja ABC um triângulo tal que A (1, 1), B (3, –1) e C (5, 3). O ponto ____________ é o baricentro desse triângulo.

A (2, 1)
B (3, 3)
C (1, 3)
D (3, 1)

5 **EEAR 2016** O triângulo determinado pelos pontos A(–1, –3), B(2, 1) e C(4, 3) tem área igual a:

A 1
B 2
C 3
D 6

6 **Enem 2015** Devido ao aumento do fluxo de passageiros, uma empresa de transporte coletivo urbano está fazendo estudos para a implantação de um novo ponto de parada em uma determinada rota. A figura mostra o percurso, indicado pelas setas, realizado por um ônibus nessa rota e a localização de dois de seus atuais pontos de parada, representados por P e Q.

Os estudos indicam que o novo ponto T deverá ser instalado, nesse percurso, entre as paradas já existentes P e Q, de modo que as distâncias percorridas pelo ônibus entre os pontos P e T e entre os pontos T e Q sejam iguais.

De acordo com os dados, as coordenadas do novo ponto de parada são:

A (290, 20)
B (410, 0)
C (410, 20)
D (440, 0)
E (440, 20)

7 **Cefet-RJ 2016** O professor pediu a João que calculasse a distância entre os pontos A(2, 1) e B(6, 4) no plano cartesiano. Para isso, João calculou a medida do segmento $\overline{AB}$, observando um triângulo retângulo que tem $\overline{AB}$ como hipotenusa. Após realizar o esboço a seguir, João fez a seguinte conta: $d^2 = 3^2 + 4^2 \rightarrow d = 5$.

Com base nessas informações, calcule a distância entre os pontos (5, 1) e (7, 6)

Exercícios propostos

1 **IFSP 2014** Um triângulo é desenhado marcando-se os pontos A(3, 5), B(2, –6) e C(–4, 1) no plano cartesiano. O triângulo A'B'C' é o simétrico do triângulo ABC em relação ao eixo *y*. Um dos vértices do triângulo A'B'C' é:

A (3, 5)
B (–2, 6)
C (–2, –1)
D (4, 5)
E (4, 1)

2 **Enem 2011** Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.

A reta de equação y = x + 4 representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto P(–5, 5), localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km.

Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto:

A (–5, 0)
B (3, 1)
C (–2, 1)
D (0, 4)
E (2, 6)

3 **UFG 2014** Um caçador de tesouros encontrou um mapa que indicava a localização exata de um tesouro com as seguintes instruções:

> "Partindo da pedra grande e seguindo 750 passos na direção norte, 500 passos na direção leste e 625 passos na direção nordeste, um tesouro será encontrado."

Para localizar o tesouro, ele utilizou um plano cartesiano, representado pela figura a seguir. Neste plano a escala utilizada foi de 1 : 100, as medidas são dadas em centímetros e o ponto A representa a pedra grande indicada nas instruções.

Considerando que um passo mede 80 cm, encontre as coordenadas, no plano cartesiano, do ponto onde se encontra o tesouro e calcule a distância percorrida, em metros, pelo caçador de tesouros para encontrá-lo.

4 O ponto A pode ser representado de duas formas: (y + 2, 2x   4) e (8x, 3y   10). Determine os valores de *x* e *y*.

5 **FGV 2012** Em um paralelogramo, as coordenadas de três vértices, consecutivos, são, respectivamente, (1, 4), (–2, 6), e (0, 8). A soma das coordenadas do quarto vértice é:

A 8
B 9
C 10
D 11
E 12

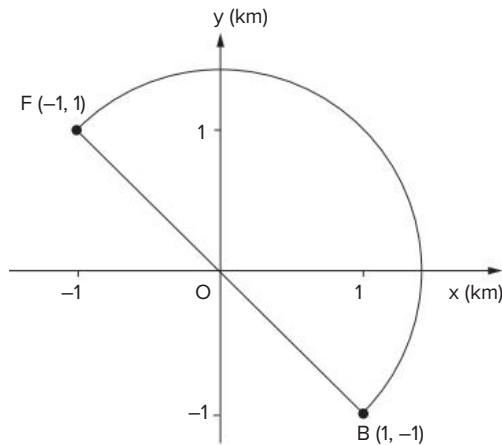
6 **Unioeste 2012** Dado o ponto A(–2, 4), determine as coordenadas de dois pontos P e Q, situados, respectivamente, sobre as retas y = 3x e y =   x, de tal modo que A seja o ponto médio do segmento $\overline{PQ}$.

A P(1, 3) e Q(5, 5)
B P(2, 6) e Q(4,   4)
C P(0, 0) e Q(5, 5).
D P(1, 3) e Q(4,   4).
E P(2, 6) e Q(0, 0).

7 Calcule o perímetro do triângulo ABC sendo A(2, 2), B(4, 8) e C(8, 3).

8 **EEAR 2017** O triângulo ABC formado pelos pontos A(7, 3), B(–4, 3) e C(–4, –2) é:

A escaleno.
B isósceles.
C equilátero.
D obtusângulo.

9 **Enem 2016** Em uma cidade será construída uma galeria subterrânea que receberá uma rede de canos para o transporte de água de uma fonte (F) até o reservatório de um novo bairro (B). Após avaliações, foram apresentados dois projetos para o trajeto de construção da galeria: um segmento de reta que atravessaria outros bairros ou uma semicircunferência que contornaria esses bairros, conforme ilustrado no sistema de coordenadas xOy da figura, em que a unidade de medida nos eixos é o quilômetro.

Estudos de viabilidade técnica mostraram que, pelas características do solo, a construção de 1 m de galeria via segmento de reta demora 1,0 h, enquanto 1 m de construção de galeria via semicircunferência demora 0,6 h. Há urgência em disponibilizar água para esse bairro.

Use 3 como aproximação para π e 1,4 como aproximação para $\sqrt{2}$.

O menor tempo possível, em hora, para conclusão da construção da galeria, para atender às necessidades de água do bairro, é de:

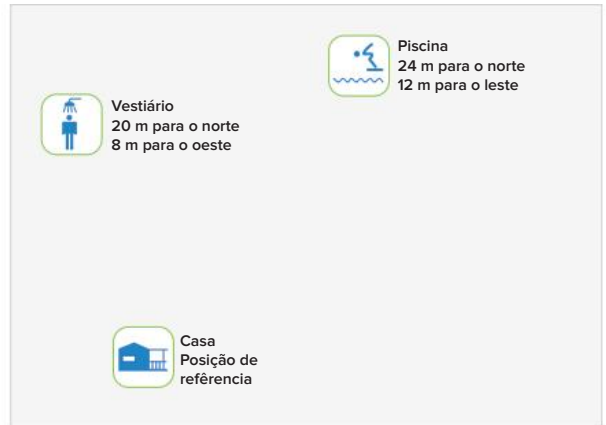
A 1260
B 2520
C 2800
D 3600
E 4000

10 **PUC-Rio** Sejam os pontos A(0, 0) e B(3, 4).

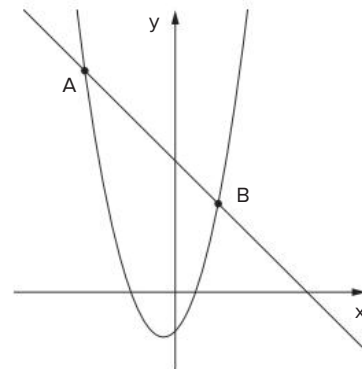
a) Qual é a distância entre A e B?
b) Sabemos que a área do triângulo ABC é igual a 4 e que o vértice C pertence à reta de equação $x + y = 2$. Determine o ponto C.

11 **UFU 2015** Em relação a um sistema de coordenadas xOy (*x* e *y* em metros), o triângulo PQR tem ângulo reto no vértice R(3, 5), base $\overline{PQ}$ paralela ao eixo *x* e está inscrito no círculo de centro C(1, 1). A área desse triângulo, em metros quadrados, é igual a:

A 40
B $8\sqrt{20}$
C $4\sqrt{20}$
D 80

12 **Insper 2015** O Sr. Antônio resolveu construir um poço em seu sítio. Ele passou ao engenheiro o esquema a seguir, indicando a posição da piscina e do vestiário em relação à localização da casa.

O Sr. Antônio disse ao engenheiro que queria o poço em uma localização que estivesse à mesma distância da casa, da piscina e do vestiário. Para atendê-lo o engenheiro deve construir o poço na posição, em relação à casa, dada por, aproximadamente,

A 4,2 m para o leste e 13,8 m para o norte.
B 3,8 m para o oeste e 13,1 m para o norte.
C 3,8 m para o leste e 13,1 m para o norte.
D 3,4 m para o oeste e 12,5 m para o norte.
E 3,4 m para o leste e 12,5 m para o norte.

13 **UFRGS 2013** Considere os gráficos das funções *f* e *g*, definidas por $f(x) = x^2 + x - 2$ e $g(x) = 6 - x$, representadas no mesmo sistema de coordenadas cartesianas, e os pontos A e B, interseção dos gráficos das funções *f* e *g*, como na figura a seguir.

A distância entre os pontos A e B é:

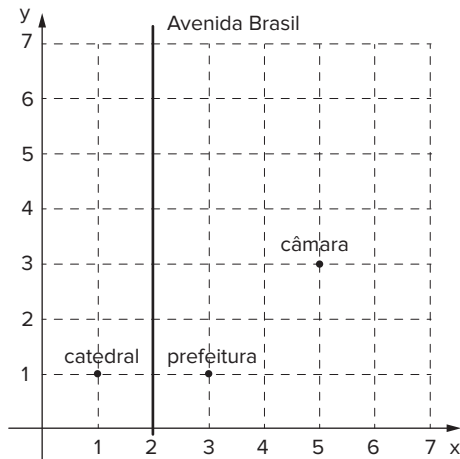
A $2\sqrt{2}$
B $3\sqrt{2}$
C $4\sqrt{2}$
D $5\sqrt{2}$
E $6\sqrt{2}$

14 **ITA 2012** Sejam A(0, 0), B(0, 6) e C(4, 3) vértices de um triângulo. A distância do baricentro desse triângulo ao vértice A, em unidades de distância, é igual a:

A $\frac{5}{3}$
B $\frac{\sqrt{97}}{3}$
C $\frac{\sqrt{109}}{3}$
D $\frac{\sqrt{5}}{3}$
E $\frac{10}{3}$

FRENTE 3

15 **Unicamp 2011** A figura a seguir apresenta parte do mapa de uma cidade, no qual estão identificadas a catedral, a prefeitura e a câmara de vereadores. Observe que o quadriculado não representa os quarteirões da cidade, servindo apenas para a localização dos pontos e retas no plano cartesiano.

Nessa cidade, a Avenida Brasil é formada pelos pontos equidistantes da catedral e da prefeitura, enquanto a Avenida Juscelino Kubitschek (não mostrada no mapa) é formada pelos pontos equidistantes da prefeitura e da câmara de vereadores.

Sabendo que a distância real entre a catedral e a prefeitura é de 500 m, podemos concluir que a distância real, em linha reta, entre a catedral e a câmara de vereadores é de:

A 1500 m

B $500\sqrt{5}$ m.

C $1000\sqrt{2}$ m.

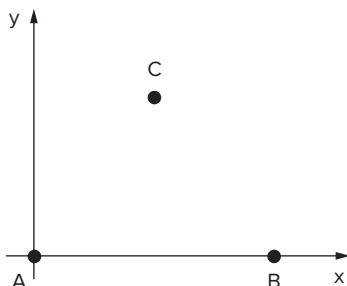
D $500 + 500\sqrt{2}$ m.

16 **UFJF 2016** Considere os pontos A(2, 0), $B\left(\ 1, \sqrt{3}\right)$ e $C\left(\ 1,\ \ \sqrt{3}\right)$ em um plano cartesiano.

a) Determine o ângulo $A\hat{B}C$.

b) Calcule a área do triângulo ABC.

17 **FGV 2012** Um funcionário do setor de planejamento de uma distribuidora de materiais escolares verifica que as lojas dos seus três clientes mais importantes estão localizadas nos pontos A(0, 0), B(6, 0) e C(3, 4). Todas as unidades são dadas em quilômetros.

O setor de planejamento decidiu instalar um depósito no ponto P(x, y), de modo que as distâncias entre o depósito e as três lojas sejam iguais: PA = PB = PC.

Uma pesquisa feita na Loja A estima que a quantidade de certo tipo de lapiseiras vendidas varia linearmente, de acordo com o preço de cada uma. O mesmo ocorre com o preço unitário de determinado tipo de agenda escolar e a quantidade vendida.

Preço de uma lapiseira	Quantidade
R$ 10,00	100
R$ 15,00	80
R$ 20,00	60

Preço de uma agenda	Quantidade
R$ 24,00	200
R$ 13,50	270
R$ 30,00	160

A Loja B monta dois tipos de estojos de madeira fe chados. Um tipo, com 24 lápis de cor em cada estojo, é uma caixa que tem a forma de um paralelepípedo retângulo de base quadrada, de 16 cm de lado e volu me igual a 576 cm^3

O outro tipo, com 18 lápis de cor em cada estojo, tem a forma de um cubo, e o seu custo de fabricação é $\frac{3}{4}$ do custo de fabricação do primeiro estojo.

Para o lojista, o custo de fabricação de cada estojo, independente de sua forma, é R$ 0,10 o centímetro quadrado

A Loja C, a menor de todas, trabalha somente com três funcionários: Alberto, Beatriz e Carla A soma dos salários mensais dos três, em dezembro de 2011, era de R$ 5 000,00.

Determine a quantos quilômetros da Loja A deverá ser instalado o depósito da distribuidora de materiais escolares Aproxime a resposta para um número intei ro de quilômetros

18 **UEA 2013** Em um plano cartesiano, sabe-se que os pontos A, B (1, 2) e C (2, 3) pertencem a uma mesma reta, e que o ponto A está sobre o eixo Oy. O valor da ordenada de A é:

A 0

B 3

C 1

D 2

E 1

19 Três retas de equações $y = 4x + 3$, $y = -x + 3$ e $y = x + 6$ interceptam-se duas a duas nos pontos A, B e C. Determine a área do triângulo ABC.

20 Os vértices de um triângulo ABC são os pontos A(k, k), B(0, 0) e C(–k, k). A área do triângulo ABC vale, em unidades de área:

A $\frac{k^2}{4}$

B $\frac{k^2}{2}$

C k^2

D $2k^2$

E $4k^2$

Texto complementar

Cálculo da área de um polígono convexo

Quando nos deparamos, pela primeira vez, com a expressão usada para o cálculo da área de um triângulo, geralmente a consideramos estranha, pois, para chegarmos ao resultado pretendido, precisamos do auxílio de um determinante Porém, é importante perceber que o determinante presente na expressão é uma coincidência numérica, ou seja, a expressão para o cálculo da área é idêntica ao módulo desse determinante.

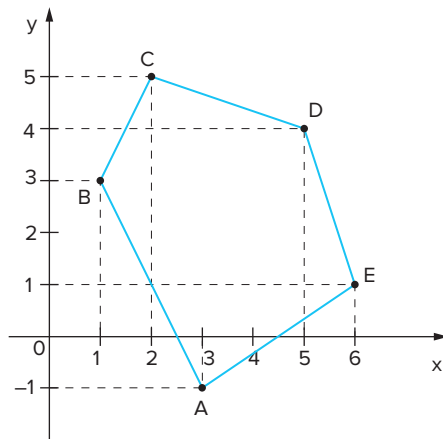
Se continuarmos analisando essa expressão, notaremos que ela pode ser adaptada para um polígono convexo qualquer. Mas, se antes o determinante era apenas uma coincidência, o que ele seria agora?

Vamos trabalhar com uma estrutura parecida com um determinante, porém, como se trata de uma matriz não quadrada, chamaremos essa estrutura de **diferencial**

Para ver como ela funciona, observe o exercício e sua respectiva resolução a seguir.

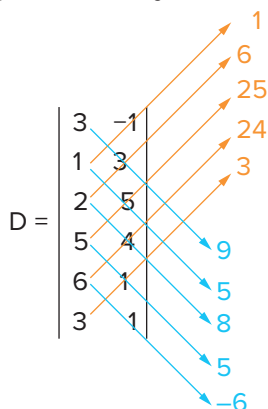
Determine a área de um pentágono ABCDE, com A(3, –1), B(1, 3), C(2, 5), D(5, 4) e E(6, 1).

Resolução:

Primeiro, devemos fazer a representação do polígono no plano cartesiano (Note que, no caso do triângulo, isso não era necessário).

Em seguida, precisamos montar uma matriz com duas colunas, em que cada linha seja composta de coordenadas dos pontos. Vale ressaltar que os pontos devem ser tomados no sentido horário ou anti-horário na ordem em que aparecem na representação gráfica. Portanto, não podemos escolhê-los aleatoriamente e, após o último ponto da sequência, devemos repetir o primeiro.

Tomando os pontos no sentido horário a partir de A, temos:

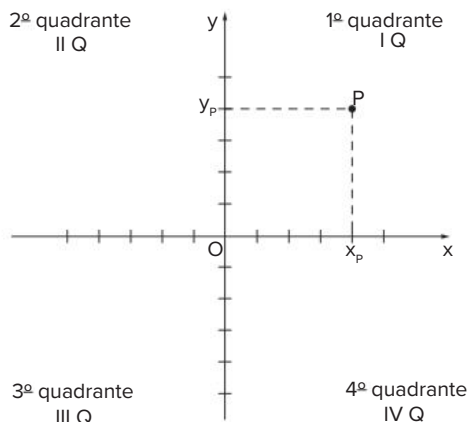
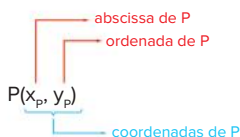
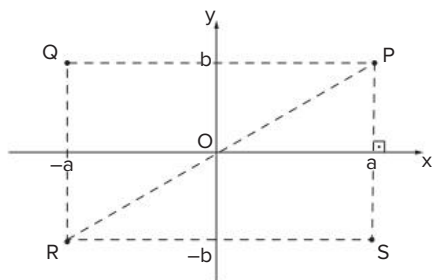
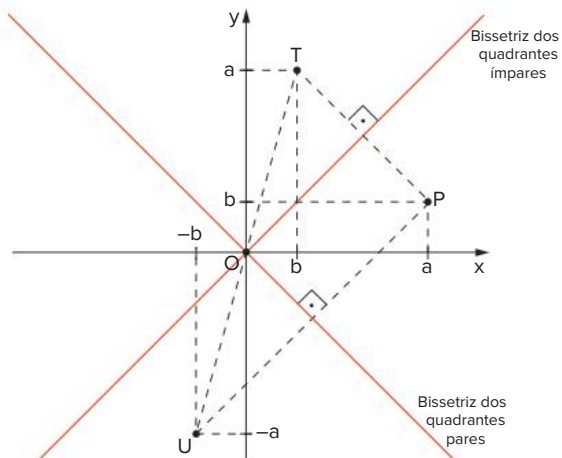
$$D = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 5 & 4 \\ 6 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

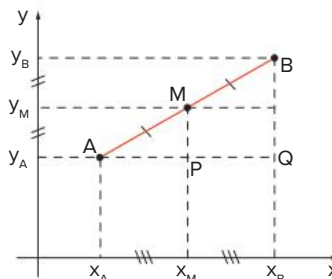
Devemos fazer o cálculo como se estivéssemos resolvendo um determinante Para isso, temos que multiplicar as "diagonais" e calcular a diferença entre as somas dos produtos da diagonal principal e das paralelas e da diagonal secundária e das paralelas.

Logo, D = (9 + 5 + 8 + 5 – 6) – (–1 + 6 + 25 + 24 + 3) = 21 – 57 = –36.

Assim, para calcular a área do pentágono, devemos utilizar a mesma expressão que deduzimos para o triângulo, ou seja, $S_{polígono} = \frac{|D|}{2}$.

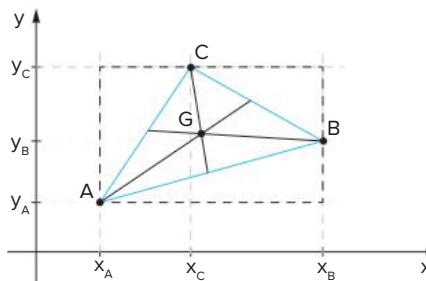
Desse modo: $S_{polígono} = \frac{|-36|}{2} = 18$ u.a.

Resumindo

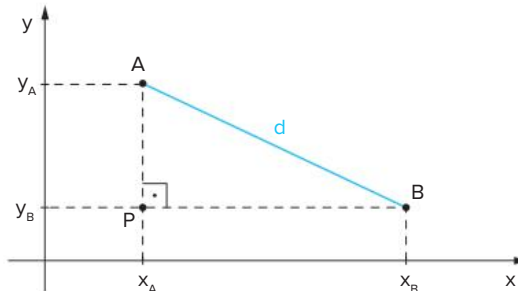
Coordenadas no plano cartesiano

Plano cartesiano ortogonal

Simetrias no plano cartesiano

- P(a, b) e Q(a, b) são simétricos em relação ao eixo Oy;
- P(a, b) e S(a,–b) são simétricos em relação ao eixo Ox;
- P(a, b) e R(–a, –b) são simétricos em relação à origem O.

- P(a, b) e T(b, a) são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares;
- P(a, b) e U(–b, –a) são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes pares;
- T e U são simétricos em relação à origem do sistema cartesiano.

Determinação das coordenadas do ponto médio

Sendo $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ as extremidades de $\overline{AB}$, as coordenadas (x_M, y_M) do ponto médio M são tais que:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Determinação das coordenadas do baricentro de um triângulo

As coordenadas do baricentro $G(x_G, y_G)$ de um triângulo de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ são dadas por:

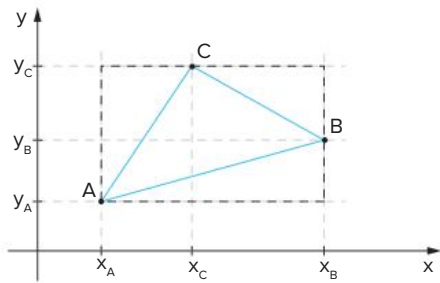
$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Distância entre dois pontos

Sendo $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, a distância d entre eles é dada por:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A \quad x_B)^2 + (y_A \quad y_B)^2}$$

ou

$$d(A, B) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Determinação da área de um triângulo

A área do triângulo de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ é dada por:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{D}{2}, \text{ em que } D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Condição de alinhamento de três pontos

Os pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ estão alinhados se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Quer saber mais?

Sites

- Sistemas de coordenadas, transformações isométricas no plano cartesiano, homotetia e transformações compostas.
  Disponível em: <www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap21.html>.
- Baricentro dos quadriláteros.
  Disponível em: <www.rpm.org.br/cdrpm/86/30.html>.

Vídeo

- Cálculo da área dos polígonos por meio de coordenadas dos vetores associados.
  Disponível em: <www.youtube.com/watch?v=0KjG8Pg6LGk&t=13s>.

Exercícios complementares

1 EEAR 2016 Considere os segmentos de retas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, em que A(0, 10), B(2, 12), C(–2, 3) e D(4, 3). O segmento $\overline{MN}$, determinado pelos pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ é dado pelos pontos M e N, pertencentes respectivamente a $\overline{AB}$ e a $\overline{CD}$. Assinale a alternativa que corresponde corretamente a esses pontos.

A $M\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e N(–1, 3)

B M(–2, 10) e N(–1, 3).

C M(1, –2) e N(1, 3).

D M(1, 11) e N(1, 3).

2 Em um jogo de computador, os jogadores devem mover pontos sobre um sistema de coordenadas até que eles estabeleçam algum tipo de simetria. Determine os valores reais de a e b para os quais os pontos P(a – 1, 2a + 1) e Q(2b, 2 – b) sejam simétricos em relação:

a) ao eixo das abscissas.
b) ao eixo das ordenadas.
c) à origem.
d) à bissetriz dos quadrantes ímpares.

3 PUC-Rio 2013 Se os pontos A(–1, 0), B(1, 0) e C(x, y) são vértices de um triângulo equilátero, então a distância entre A e C é:

A 1

B 2

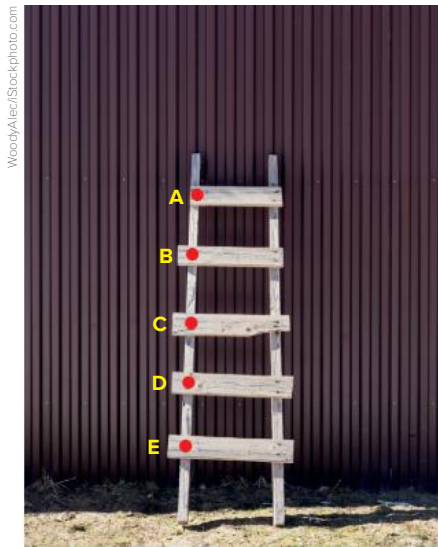
C 4

D $\sqrt{2}$

E $\sqrt{3}$

4 No mapa de uma cidade, as coordenadas dos três hospitais municipais A, B e C são, respectivamente, (–5, 12), (8, –4) e (0, 10). Determine:

a) as coordenadas de um pronto-socorro situado no ponto médio do segmento com extremos nas coordenadas dos hospitais B e C.
b) as coordenadas do corpo de bombeiros situado no baricentro do triângulo de vértices em A, B e C.
c) a área do triângulo de vértices A, B e C, em unidades de área.

5 Uma escada de madeira com 5 degraus consecutivos igualmente afastados um do outro está encostada na parede de uma construção, como ilustra a figura a seguir:

Se o ponto A, no degrau mais alto da escada, está a 10 cm afastado da parede e a 2,0 m de altura, e o ponto E, no degrau mais baixo, está a 70 cm afastado da parede e a 0,4 m de altura, determine o afastamento da parede, em centímetros, e a altura, em metros, do ponto:

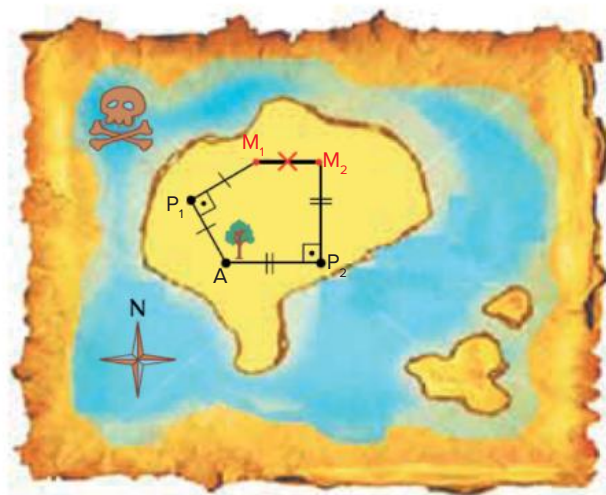
a) C, situado no degrau central da escada.
b) B, situado no penúltimo degrau da escada.
c) D, situado no segundo degrau da escada.

6 O Triângulo das Bermudas é uma região do Oceano Atlântico limitada pelas cidades de Miami, nos Estados Unidos, San Juan, em Porto Rico, e pela ilha Bermuda. Essa região é famosa pelo número de navios e aviões desaparecidos misteriosamente.

Em um sistema cartesiano cujas unidades dos eixos coordenados equivalem a 100 km, as coordenadas dos vértices do triângulo são Miami (7, 9), San Juan (22, 1) e Bermuda (24, 17). Faça uma estimativa da área, em quilômetros quadrados, de região limitada pelo Triângulo das Bermudas.

7 **ITA** A área de um triângulo é de 4 unidades de superfície, sendo dois de seus vértices os pontos A(2, 1) e B(3, −2). Sabendo que o terceiro vértice encontra-se sobre o eixo das abcissas, pode-se afirmar que suas coordenadas são:

A $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ ou (5, 0).
B $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ou (4, 0).
C $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ ou (5, 0).
D $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ ou (4, 0).
E $\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$ ou (3, 0).

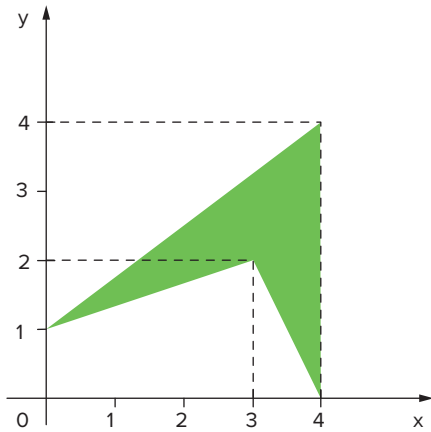
8 **Unesp 2014 (Adapt.)** Chegou às mãos do capitão Jack Sparrow, do Pérola Negra, o mapa da localização de um grande tesouro enterrado em uma ilha do Caribe.

Ao aportar na ilha, Jack, examinando o mapa, descobriu que P_1 e P_2 se referem a duas pedras distantes 10 m em linha reta uma da outra, que o ponto A se refere a uma árvore já não mais existente no local e que:

a) ele deve determinar um ponto M_1 girando o segmento $\overline{P_1A}$ em um ângulo de 90° no sentido anti horário, a partir de P_1;
b) ele deve determinar um ponto M_2 girando o segmento $\overline{P_2A}$ em um ângulo de 90° no sentido horário, a partir de P_2;
c) o tesouro está enterrado no ponto médio do segmento $\overline{M_1M_2}$.

Jack, como excelente navegador, conhecia alguns conceitos matemáticos. Pensou por alguns instantes e introduziu um sistema de coordenadas retangulares com origem em P_1 e com o eixo das abscissas passando por P_2. Fez algumas marcações e encontrou o tesouro.

A partir do plano cartesiano definido por Jack Sparrow, determine as coordenadas do ponto de localização do tesouro.

9 **FGV** A área da figura colorida no diagrama a seguir vale:

A 4,0
B 3,5
C 3,0
D 5,0
E 4,5

10 **Fuvest** Sejam A(1, 2) e B(3, 2) dois pontos do plano cartesiano. Nesse plano, o segmento $\overline{AC}$ é obtido do segmento $\overline{AB}$ por uma rotação de 60°, no sentido anti horário, em torno do ponto A. As coordenadas do ponto C são:

A $\left(2, 2+\sqrt{3}\right)$

B $\left(1+\sqrt{3}, \frac{5}{2}\right)$

C $\left(2, 1+\sqrt{3}\right)$

D $\left(2, 1 \quad \sqrt{3}\right)$

E $\left(1+\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\right)$

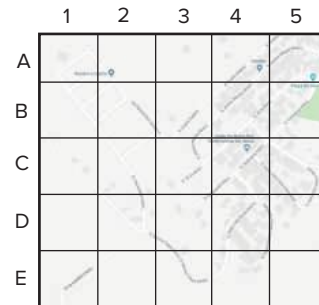
11 **UFMG** Considere A(2, 1) e B(4, 0) dois pontos no plano coordenado As coordenadas do ponto C, simétrico do ponto A em relação ao ponto B, são:

A (6,   1)
B (3, 1)
C (2, –1)
D $\left(3, \frac{1}{2}\right)$
E (1, 0)

12 O baricentro de um triângulo ABC é o ponto $G\left(\frac{4}{3}, 3\right)$, o ponto médio do lado $\overline{AB}$ é $M_1(-1, 5)$ e o ponto médio do lado $\overline{BC}$ é $M_3(1, 1)$. Determine os vértices A, B e C.

13 **Uema** Uma reta passa pelos pontos A(–12, –13) e B(–2, –5). Determine, nesta reta, um ponto cuja abscissa é 3.

A (3, –2)
B (3, 1)
C (3, –1)
D (3, 3)
E (3, 0)

14 Folheando o guia da cidade, Bruno percebeu que tanto a localização de sua casa quanto a da escola em que estuda estavam representadas em uma mesma página. No mapa dessa página, a casa de Júlio fica exatamente no centro do quadrado **D1**; e a escola dele, no centro do quadrado **B4**.

Sabendo que cada quadrado do mapa representa uma região da cidade com 1 km^2 de área, calcule a distância entre a casa e a escola de Bruno.

15 Um terreno no interior do estado de Santa Catarina é quadrangular e tem seus vértices nos pontos A, B, C e D tais que:

- B está a 5 km ao leste e a 2 km ao norte do ponto A;
- C está a 4 km ao leste e a 5 km ao norte do ponto A;
- D está a 1 km ao leste e a 4 km ao norte do ponto A.

O preço médio dos terrenos rurais nessa região do país é de R$ 2.500,00 por hectare, mas o dono desse terreno quer vendê lo rapidamente, por isso irá oferecê-lo por um valor 10% inferior ao preço médio praticado na região.

Sabendo que um hectare equivale a 10 000 m^2, determine o valor da oferta que será feita pelo dono do terreno.

16 **FURRN** A reta *r* é determinada pelos pontos (3, 3) e (5, 1). O ponto (3, m) também pertencerá a *r* para um certo valor de *m*, tal que:

A m =   2
B $-2 < m < 0$
C $0 < m \leq \frac{1}{2}$
D $\frac{1}{2} < m < 2$
E $m > 2$

17 **Efomm** Os pontos A(0, 3), B(2, –2) e C(3, 3) são vértices de um triângulo. Podemos afirmar que a raiz quadrada da soma dos quadrados dos lados desse triângulo é igual a:

A $\sqrt{2}$
B 8
C $\sqrt{3}$
D 12
E $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

18 **ITA** Três pontos de coordenadas, respectivamente, (0, 0), (b, 2b) e (5b, 0), com b > 0, são vértices de um retângulo. As coordenadas do quarto vértice são dadas por:

A (–b, –b)
B (2b, b)
C (4b, –2b)
D (3b, 2b)
E (2b, –2b)

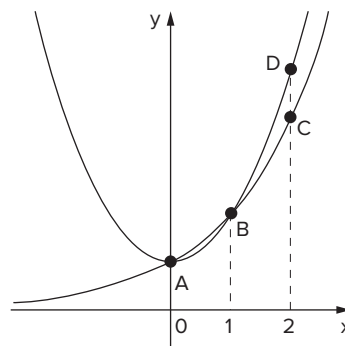
19 **AFA 2016** Considere os pontos A(4, –2), B(2, 0) e todos os pontos P(x, y), sendo *x* e *y* números reais, tais que os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são catetos de um mesmo triângulo retângulo

É correto afirmar que, no plano cartesiano, os pontos P(x, y) são tais que

A são equidistantes de C(2, –1).
B o maior valor de *x* é $3+\sqrt{2}$
C o menor valor de *y* é –3.
D *x* pode ser nulo

20 **ESPM 2013** A figura a seguir representa os gráficos das funções $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 2^x$. A área do quadrilátero ABCD é igual a:

A 2,0
B 1,5
C 0,5
D 2,5
E 1,0

valeriopardi/iStockphoto.com

FRENTE 3

CAPÍTULO

8

O estudo da reta

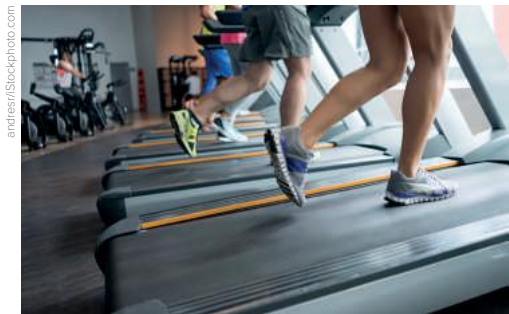
[...] A Geometria existe por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la. [...]

TAHAN, Malba. *O homem que calculava*. 83 ed. Rio de Janeiro: Record, 2013.

O estudo da reta é o primeiro passo para compreender a Geometria Analítica. Todos os ramos da ciência utilizam as importantes ferramentas que conheceremos a seguir.

Teoria angular da reta

Se você já correu (ou observou alguém correndo) em uma esteira inclinada de uma academia, sabe que é possível regular a inclinação por meio de controles Quando isso é feito, no visor do equipamento aparece um número, provavelmente uma porcentagem Você sabe o que ele significa?

andresr/iStockphoto.com

Já observou uma decolagem no aeroporto Santos Dumont, na cidade do Rio de Janeiro? Como a pista é curta, o avião tem de acelerar muito e subir com inclinação acentuada para não se chocar contra o morro Pão de Açúcar Você sabe dizer qual é a inclinação necessária dessa trajetória e como calculá la?

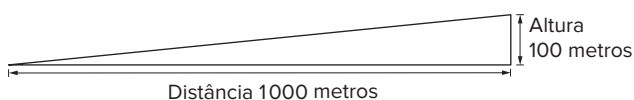
ChandraDhas/iStockphoto.com

Questões como essas fazem parte do cotidiano da humanidade. A Geometria, a Trigonometria e a Geometria Analítica fornecem ferramentas para resolver esse tipo de problema, que consiste, entre outras coisas, em medir a inclinação de uma reta em relação a uma referência.

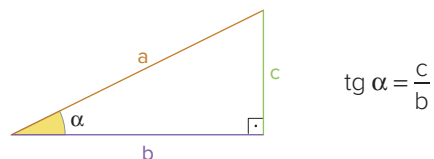
Coeficiente angular

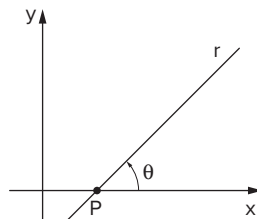
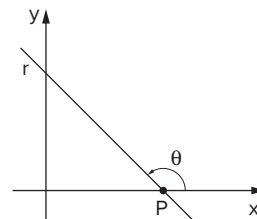
Para se chegar ao resultado, uma primeira abordagem seria medir diretamente o ângulo de inclinação da reta Porém, nem sempre os instrumentos necessários estão disponíveis ou a medida do ângulo é prática Retomando o exemplo da esteira inclinada, saber que ela apresenta uma inclinação de 7° talvez não informe muito sobre o desempenho do corredor Mas, se o visor mostrasse o valor de 10%, o que significaria essa inclinação expressa em porcentagem? Quase de imediato vem à nossa mente a ideia de que o corredor "sobe" 100 metros na vertical a cada 1000 metros de deslocamento na horizontal, ou seja, a inclinação é uma "taxa de subida" igual a $\frac{100\text{ m}}{1000\text{ m}} = 10\%$.

Altura 100 metros

Distância 1000 metros

Cálculo: $\frac{100\text{ m}}{1000\text{ m}} = 0{,}1 = 10\%$

O exemplo da inclinação de decolagem do avião é similar ao do corredor: o avião deve subir uma determinada altura em uma certa distância para passar sobre o Pão de Açúcar. Logo, existe uma taxa mínima de subida para garantir uma decolagem segura.

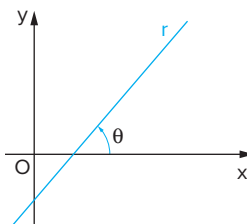
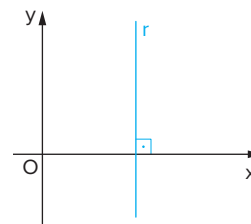
Aqueles que têm alguma familiaridade com a trigonometria do triângulo retângulo conseguem notar que a taxa de subida é a tangente do ângulo de inclinação, definida como a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo.

No estudo da reta pela Geometria Analítica, utilizamos ideias similares às descritas anteriormente. Na sequência, vamos defini-las e generalizá-las.

Definimos o ângulo de inclinação θ de uma reta no plano cartesiano como aquele formado pela reta e pelo eixo das abscissas (x), com vértice no ponto P de interseção da reta e do eixo. O ângulo é orientado no sentido anti-horário, da mesma maneira que é medido na circunferência trigonométrica.

O ângulo θ é agudo.

O ângulo θ é obtuso.

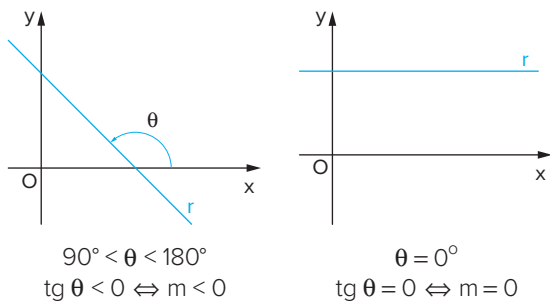
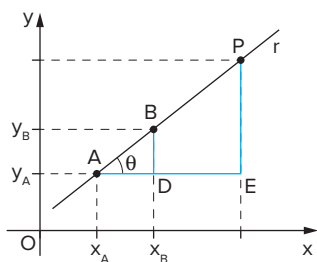
Dada uma reta *r* não perpendicular ao eixo *x*, definimos seu **coeficiente angular *m*** como a tangente do ângulo de inclinação, ou seja:

$$m = \text{tg}\ \theta$$

Assim, se:

$$\begin{cases} \theta \text{ é agudo } (0° < \theta < 90°) \Rightarrow m \text{ é positivo } (\text{tg}\ \theta > 0); \\ \theta \text{ é obtuso } (90° < \theta < 180°) \Rightarrow m \text{ é negativo } (\text{tg}\ \theta < 0); \\ \theta \text{ é nulo } (\theta = 0°) \Rightarrow m \text{ é nulo } (\text{tg}\ 0° = 0); \\ \theta \text{ é reto} \Rightarrow m \text{ não se define.} \end{cases}$$

$0° < \theta < 90°$
$\text{tg}\ \theta > 0 \Leftrightarrow m > 0$

$\theta = 90°$
$\text{tg}\ \theta$ não é definida

$90° < \theta < 180°$
$\text{tg } \theta < 0 \Leftrightarrow m < 0$

$\theta = 0°$
$\text{tg } \theta = 0 \Leftrightarrow m = 0$

Considerando a figura a seguir, podemos determinar o valor do coeficiente angular *m* em função das coordenadas de dois pontos dados, pertencentes à reta: θ

$$m = \text{tg } \theta = \frac{BD}{AD} \therefore m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ pertencem à reta *r*, que não é paralela ao eixo *y* O coeficiente angular é dado por $m = \text{tg } \theta = \frac{BD}{AD} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Se o ângulo θ é obtuso, temos:

$$m = \text{tg } \theta = \quad \text{tg } (180° \quad \theta) = \quad \frac{BD}{AD} = \quad \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Assim, se uma reta *r* não paralela ao eixo *y* passar por $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, seu coeficiente angular sempre será dado por $m = \frac{y_B - y_A}{x_B \; x_A}$.

! Atenção

Se θ é o ângulo que a reta *r* forma com o eixo *x*, medido no sentido anti horário, e $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ são dois pontos conhecidos na reta *r*, o coeficiente angular de *r* é dado por:

$$m = \text{tg } \theta = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

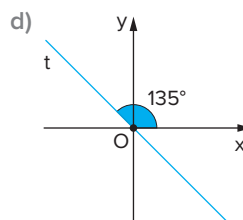
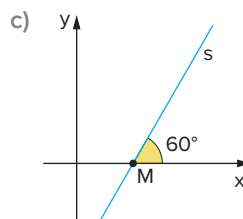
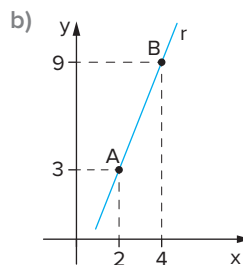
Exercício resolvido

1 Calcule o coeficiente angular das retas a seguir:

a) $\overleftrightarrow{AB}$, tal que A(2, 5) e B(3,   2).

b)

c)

d)

Resolução:

a) $m = \frac{y_B \; y_A}{x_B \; x_A} = \frac{-2 - 5}{3 \quad (\;2)} = \quad \frac{7}{5}$

b) A reta *r* passa pelos pontos A(2, 3) e B(4, 9). Assim, o coeficiente angular *m* é:

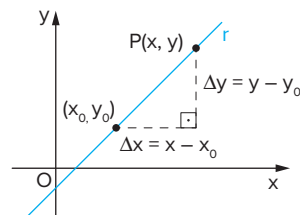
$$m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9 - 3}{4 - 2} = \frac{6}{2} = 3$$

c) $m_s = \text{tg } \theta \Rightarrow m_s = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$

d) $m_t = \text{tg } \theta \Rightarrow m_t = \text{tg } 135° = -1$

Equação fundamental da reta

Seja *r* uma reta não paralela ao eixo *y* que tem coeficiente angular igual a *m*. Se (x_0, y_0) é um ponto conhecido da reta e P(x, y) é um outro ponto qualquer, temos que *P* será um ponto da reta *r* se, e somente se:

$$\frac{y - y_0}{x \quad x_0} = m \Leftrightarrow y \quad y_0 = m(x \quad x_0)$$

Essa equação é conhecida como equação fundamental da reta e é satisfeita por todos os pontos da reta e apenas por eles. A partir dela, podemos deduzir vários formatos da equação da reta

FRENTE 3

Exercício resolvido

2 Escreva as equações fundamentais das quatro retas do exercício resolvido anterior.

Resolução:

a) A reta $\overleftrightarrow{AB}$ passa por A(–2, 5) e B(3, –2) e tem $m = -\frac{7}{5}$, então:

$$y - 5 = -\frac{7}{5}(x - (-2)) \Leftrightarrow y - 5 = -\frac{7}{5}(x + 2)$$

b) A reta *r* passa por A(2, 3) e B(4, 9) e tem m = 3, então: $y - 3 = 3(x - 2)$.

c) A reta *s* passa por $M(x_M, 0)$ e tem $m = \sqrt{3}$, então: $y \quad 0 = \sqrt{3}(x \quad x_M)$.

d) A reta *t* passa por O(0, 0) e tem m = –1, então: $y - 0 = -1(x - 0)$.

A seguir, estudaremos outros formatos de equação de reta que podem ser obtidos a partir da equação fundamental.

Equação reduzida da reta

Seja uma reta *r* de coeficiente angular *m* que passa pelo ponto (x_0, y_0). A equação fundamental da reta é:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Desenvolvendo e isolando o *y*:

$$y = mx + y_0 \quad mx_0$$

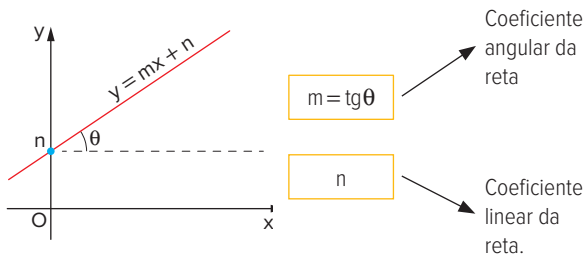
Chamando $y_0 \quad mx_0$ de *n*, temos:

$$y = mx + n$$

Essa equação é conhecida como equação reduzida da reta.

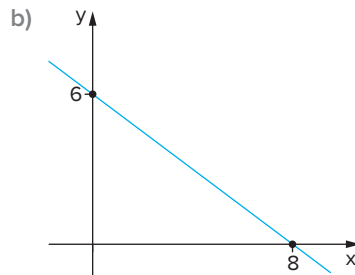
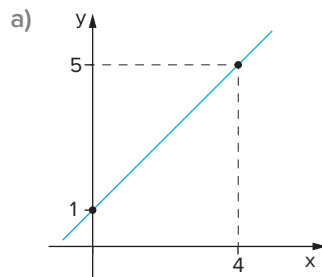
O coeficiente ***n*** é chamado de **coeficiente linear** da reta. Observe que, para x = 0, temos y = n. Assim, *n* é a ordenada do ponto onde a reta intersecta o eixo Oy.

! Atenção

A equação da forma **y = mx + n** é chamada de equação reduzida da reta.

Exercícios resolvidos

3 Encontre a equação reduzida de cada reta nas figuras a seguir.

a)

b)

Resolução:

a) A reta passa pelos pontos (0, 1) e (4, 5), tendo, portanto, coeficiente angular $m = \frac{5 \quad 1}{4 - 0} = \frac{4}{4} = 1$ e coeficiente linear n = 1 (onde a reta intersecta o eixo Oy). Assim, sua equação reduzida é $y = x + 1$.

b) A reta passa pelos pontos (0, 6) e (8, 0), tendo, portanto, coeficiente angular $m = \frac{0 \quad 6}{8 - 0} = \quad \frac{3}{4}$ e coeficiente linear n = 6. Assim, sua equação reduzida é $y = \quad \frac{3}{4}x + 6$.

4 Determine a equação reduzida da reta que passa por A(2, 2) e B(6, 4).

Resolução:

Sabendo que a equação reduzida da reta é da forma $y = mx + n$, temos:

$$\begin{cases} 2 = m \cdot 2 + n \\ 4 = m \cdot 6 + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m + n = 2 \\ 6m + n = 4 \end{cases}$$

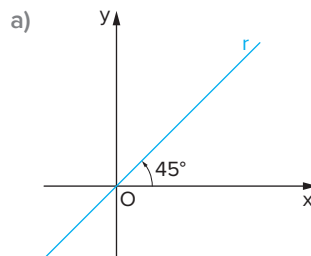
Resolvendo o sistema, obtemos $m = \frac{1}{2}$ e n = 1, assim, a equação pedida é $y = \frac{1}{2}x + 1$.

5 Determine a equação reduzida:

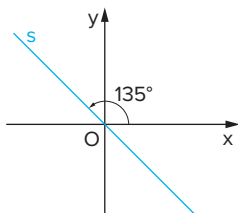
a) da bissetriz dos quadrantes ímpares.

b) da bissetriz dos quadrantes pares.

Resolução:

a)

Conforme a figura, a bissetriz dos quadrantes ímpares passa pela origem e tem coeficiente angular $m = \text{tg } 45° = 1$. Logo, sua equação é dada por:

$$y \quad 0 = 1(x \quad 0) \Leftrightarrow y = x$$

b)

Conforme a figura, a bissetriz dos quadrantes pares passa pela origem e tem coeficiente angular $m = \text{tg } 135° = -1$. Logo, sua equação é dada por:

$$y \quad 0 = \quad 1(x \quad 0) \Leftrightarrow y = \quad x$$

6 Dados os pontos A(1, 4), B(2, 1) e C(2, 1), determine a equação reduzida da reta suporte da mediana do triângulo ABC, traçada pelo vértice A.

Resolução:

A mediana do triângulo ABC traçada por A passa pelo ponto médio do lado $\overline{BC}$. Seja M esse ponto, temos:

$$M\left(\frac{2 \quad 2}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = M(0, 1)$$

A reta suporte da mediana traçada por A é $\overleftrightarrow{AM}$. Seu coeficiente angular é:

$$m_{AM} = \frac{y_A \; y_M}{x_A \; x_M} = \frac{4 \quad 1}{1 \quad 0} = 3$$

A equação fundamental é $y \quad 1 = 3(x \quad 0)$ Logo, a equação reduzida é da forma $y = 3x + 1$.

Observação: como os coeficientes angular e linear são únicos para uma reta, então cada reta possui uma única equação reduzida.

Equação geral da reta

Desenvolvendo a equação fundamental da reta, podemos deixá-la em uma forma conhecida como equação geral da reta:

$$ax + by + c = 0$$

Exercício resolvido

7 Determine a equação geral da reta que passa pelos pontos A(1, 2) e B(7, 6).

Resolução:

O coeficiente angular da reta é dado por

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6-2}{7-1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

A equação fundamental da reta é dada por:

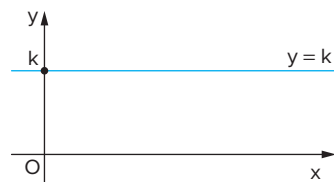
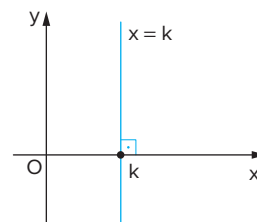
$$y \quad 2 = \frac{2}{3}(x \quad 1)$$

Isso equivale a $3y \quad 6 = 2x \quad 2 \Leftrightarrow 2x \quad 3y + 4 = 0$, que é uma equação geral com $a = 2$, $b = \quad 3$ e $c = 4$.

Uma equação geral de reta, ao ser multiplicada por uma constante não nula, gera uma nova equação resolvida pelo mesmo conjunto de pontos da reta anterior. Assim, uma mesma reta possui infinitas equações gerais.

Note que as equações a seguir são todas equações gerais da reta que passa pelos pontos A(2, 3) e B(6, 5).

$x - 2y + 4 = 0$	$\frac{1}{2}x - y + 2 = 0$
$2x - 4y + 8 = 0$	$5x - 10y + 20 = 0$

Retas paralelas ao eixo *x* têm inclinação igual a zero e coeficiente angular nulo. Suas equações são da forma $y = k$, em que *k* é uma constante

Retas paralelas ao eixo *y* têm inclinação de 90° e, para elas, não está definido o coeficiente angular Suas equações são da forma $x = k$, em que *k* é uma constante

Seja a reta *r* de equação $ax + by + c = 0$, com $b \neq 0$ Temos:

$$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow by = \quad ax \quad c \Leftrightarrow y = \quad \frac{a}{b}x \quad \frac{c}{b}$$

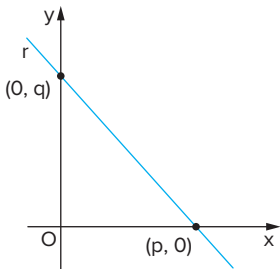
Assim, o coeficiente angular da reta *r* é $m = -\frac{a}{b}$, e o coeficiente linear é $n = \quad \frac{c}{b}$.

! Atenção

Toda reta pode ser representada por uma equação da forma $ax + by + c = 0$. Retas paralelas ao eixo *x* têm equação da forma $y = k$, com $k \in \mathbb{R}$. Retas paralelas ao eixo *y* têm a forma $x = k$, $k \in \mathbb{R}$. Se $b \neq 0$, o coeficiente angular de *r* é $m = -\frac{a}{b}$ e o coeficiente linear é $n = -\frac{c}{b}$.

Equação segmentária da reta

Seja uma reta *r* que intersecta o eixo *y* no ponto (0, q), com $q \neq 0$, e o eixo *x* no ponto (p, 0), com $p \neq 0$. A reta possui equação na forma $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, que é chamada de equação segmentária da reta

Observe:

O coeficiente angular de *r* é $m_r = \frac{0 - q}{p - 0} = \ \frac{q}{p}$.

Temos como equação fundamental $y - y_0 = m(x - x_0)$, logo:

$$y - q = -\frac{q}{p}(x - 0) \Leftrightarrow \frac{q}{p}x + y = q$$

Dividindo por *q*:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Retas que passam pela origem não admitem tal formato.

Equações paramétricas da reta

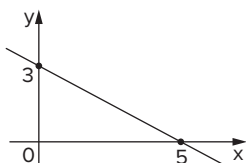
São aquelas em que *x* e *y* são dados em equações separadas como funções de um ou mais parâmetros reais. Por exemplo: para um parâmetro *t* qualquer, temos x = f(t) e y = g(t).

Note a equação paramétrica $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$. Para trans formá la em uma equação geral, isolamos o parâmetro e igualamos as equações obtidas. Ou seja:

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \Rightarrow 2t = 3 - x \Rightarrow t = \frac{3 - x}{2} \\ y = 4 + 3t \Rightarrow 3t = y \ \ 4 \Rightarrow t = \frac{y - 4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 - x}{2} = \frac{y - 4}{3} \Rightarrow 9 - 3x = 2y - 8 \Rightarrow 3x + 2y - 17 = 0$$

Exercícios resolvidos

8 Encontre a equação segmentária da reta dada na fi gura a seguir:

Resolução:

Como a reta intersecta os eixos nos pontos (p, 0) = (5, 0) e (0, q) = (0, 3), a equação segmentária é dada por:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$$

9 A trajetória de um móvel no plano cartesiano pode ser descrita, em função do tempo *t*, pelas equações $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t + 1 \end{cases}$. Encontre uma equação geral da trajetória determinada por essas equações paramétricas.

Resolução:

Isolando *t* na primeira equação, obtemos t = x − 2. Substituindo *t* na segunda equação:

$$y = 3(x - 2) + 1 \Leftrightarrow y = 3x - 5$$

Assim, uma equação da trajetória é 3x − y − 5 = 0.

10 Determine as interseções da reta 3x + 4y − 12 = 0 com os eixos coordenados.

Resolução:

Sendo A o ponto em que a reta intersecta o eixo *x* e B o que intersecta o eixo *y*, temos:

$$3x + 4y \ \ 12 = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y = 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{12} + \frac{4y}{12} = \frac{12}{12} \Leftrightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$$

A última equação corresponde à equação segmentária da reta, logo, os pontos em que a reta intersecta os eixos coordenados são A(4, 0) e B(0, 3).

11 Seja $B \neq (0, 0)$ o ponto da reta de equação y = 2x cuja distância ao ponto A(1, 1) é igual à distância de A até a origem Determine as coordenadas de B.

Resolução:

Como B pertence à reta y = 2x, ele é da forma B(a, 2a), com $a \neq 0$. Assim:

$$d(B, A) = d(A, O)$$

$$\sqrt{(a - 1)^2 + (2a - 1)^2} = \sqrt{(1 - 0)^2 + (1 - 0)^2}$$

$$\sqrt{a^2 - 2a + 1 + 4a^2 - 4a + 1} = \sqrt{1 + 1}$$

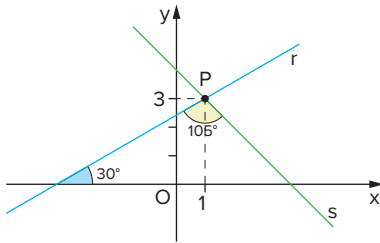
$$\sqrt{5a^2 - 6a + 2} = \sqrt{2}$$

$$5a^2 - 6a + 2 = 2$$

$$5a^2 \ \ 6a = 0$$

$$a(5a - 6) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ (não serve) ou } a = \frac{6}{5}$$

Portanto, $B(a, 2a) = B\left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

12 **Unesp** Na figura a seguir têm-se as retas *r* e *s*, concorrentes no ponto (1, 3).

Se os ângulos assinalados têm as medidas indicadas, determine:

a) uma equação geral da reta *r*.

b) uma equação geral da reta *s*.

c) a área do triângulo formado pelas retas *r*, *s* e o eixo *x*.

Resolução:

a) Se *r* passa por (1, 3) e tem coeficiente angular $m_r = \text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, sua equação geral é:

$$y \quad 3 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x \quad 1) \Leftrightarrow 3y \quad 9 = \sqrt{3}x \quad \sqrt{3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3}x - 3y + 9 - \sqrt{3} = 0$$

b) A inclinação da reta *s* é $\theta = 30° + 105° = 135°$, logo, seu coeficiente angular é $m_s = \text{tg } 135° = -1$. Como *s* também passa pelo ponto (1, 3), sua equação é:

$$y - 3 = -1(x - 1) \Leftrightarrow y - 3 = -x + 1 \Leftrightarrow x + y - 4 = 0$$

c) A reta *r* intersecta *x* em A, tal que $y = 0$:

$$\sqrt{3}x \quad 3 \cdot 0 + 9 \quad \sqrt{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3} \quad 9}{\sqrt{3}} = 1 \quad 3\sqrt{3}$$

Portanto, $A\left(1 - 3\sqrt{3}, 0\right)$.

A reta *s* intersecta *x* em B, tal que $y = 0$:

$$x + 0 - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

Portanto, B(4, 0).

A distância entre A e B, base do triângulo, é igual a:

$$\left|4 - \left(1 - 3\sqrt{3}\right)\right| = \left|3 + 3\sqrt{3}\right| = 3\left(1 + \sqrt{3}\right)$$

Então, a área do triângulo ABP é:

$$S_{\Delta ABP} = \frac{3\left(1+\sqrt{3}\right) \cdot 3}{2} = \frac{9\left(1+\sqrt{3}\right)}{2} \text{ u.a.}$$

13 **Fuvest** Uma reta de coeficiente angular $m < 0$ passa pelo ponto P(1, 2).

a) Escreva a equação da reta para $m = -1$.

b) Calcule *m* de modo que a reta forme com os eixos um triângulo de área 4.

Resolução:

a) A reta passa por P(1, 2) e tem $m = -1$:

$$y \quad 2 = \quad 1(x \quad 1) \Rightarrow y \quad 2 = \quad x + 1 \Rightarrow x + y \quad 3 = 0$$

b) Se a reta passa por P(1, 2) e tem coeficiente angular m ($m \neq 0$), ela é da forma:

$$y \quad 2 = m(x \quad 1) \Rightarrow y \quad 2 = mx \quad m \Rightarrow$$
$$\Rightarrow mx - y + 2 - m = 0$$

Essa reta intersecta os eixos nos pontos:

$$\begin{cases} \text{eixo } x \ (y = 0)\text{: } mx \quad 0 + 2 \quad m = 0 \Rightarrow x = \frac{m-2}{m} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{m-2}{2}, 0\right) \\ \text{eixo } y \ (x = 0)\text{: } m \cdot 0 - y + 2 - m = 0 \Rightarrow y = 2 - m \Rightarrow \\ \Rightarrow (0, 2 - m) \end{cases}$$

Sabendo que a área do triângulo que a reta forma com os eixos é 4, então:

$$4 = \frac{\left(\frac{m-2}{m}\right) \cdot (2 - m)}{2} \Rightarrow \left(\frac{m \quad 2}{m}\right) \cdot (2 - m) = 8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{2m \quad m^2 \quad 4 + 2m}{m} = 8 \Rightarrow -m^2 + 4m - 4 = 8m \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m^2 + 4m + 4 = 0$$

Resolvendo a equação, obtemos $m = -2$.

Posições relativas entre retas

Introdução

Sejam as retas *r* e *s* dadas por:

$$\text{Equações gerais: } \begin{cases} r\text{: } a_r x + b_r y + c_r = 0,\ b_r \neq 0 \\ s\text{: } a_s x + b_s y + c_s = 0,\ b_s \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Equações reduzidas: } \begin{cases} r\text{: } y = m_r x + n_r \\ s\text{: } y = m_s x + n_s \end{cases}$$

Os coeficientes angulares e lineares de *r* e *s* são, respectivamente:

$$m_r = -\frac{a_r}{b_r} \text{ e } n_r = -\frac{c_r}{b_r} \qquad m_s = -\frac{a_s}{b_s} \text{ e } n_s = -\frac{c_s}{b_s}$$

A seguir, analisaremos suas posições relativas.

Retas coincidentes

Duas retas *r* e *s* serão coincidentes (ou paralelas coincidentes) se, e somente se, tiverem o mesmo coeficiente angular e o mesmo coeficiente linear. Assim: $\begin{cases} m_r = m_s \\ n_r = n_s \end{cases}$

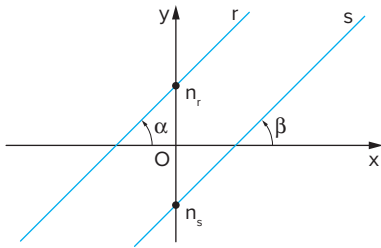
Na forma geral:

$$\frac{a_r}{b_r} = \frac{a_s}{b_s} \text{ e } \frac{c_r}{b_r} = \frac{c_s}{b_s} \Leftrightarrow \frac{a_r}{a_s} = \frac{b_r}{b_s} = \frac{c_r}{c_s}$$

Por exemplo, as retas r: $2x + y - 2 = 0$ e s: $4x + 2y - 4 = 0$ são coincidentes, pois $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{-2}{4}$.

FRENTE 3

Retas paralelas distintas

Duas retas *r* e *s*, paralelas distintas, têm o mesmo coeficiente angular e coeficientes lineares diferentes. Observe a figura:

$$r // s \Leftrightarrow \alpha = \beta \Rightarrow m_r = m_s \text{ e } n_r \neq n_s$$

Formalizando:

$$m_r = m_s \text{ e } n_r \neq n_s \Leftrightarrow -\frac{a_r}{b_r} = -\frac{a_s}{b_s} \text{ e } -\frac{c_r}{b_r} \neq -\frac{c_s}{b_s} \Leftrightarrow$$

$$= \frac{a_r}{a_s} \neq \frac{b_r}{b_s} \quad \frac{c_r}{c_s}$$

Como exemplos, temos:

a. As retas r: $y = 3x \quad 1$ e s: $y = 3x + 2$ são paralelas distintas, pois $m_r = m_s = 3$ e $n_r = \quad 1 \neq 2 = n_s$.

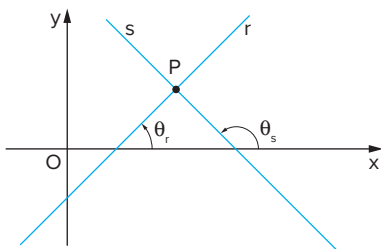
b. As retas r: $2x + 3y \quad 1 = 0$ e s: $4x + 6y \quad 2 = 0$ são coincidentes, pois $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{-2}$.

c. As retas r: $3x \quad y + 2 = 0$ e s: $9x \quad 3y \quad 6 = 0$ são paralelas distintas, pois $\frac{3}{9} = \frac{1}{-3} \neq \frac{2}{-6}$.

d. As retas r: $y \quad 1 = 0$ e s: $y + 2 = 0$ são paralelas distintas, pois ambas são paralelas ao eixo *x*.

e. As retas r: $x \quad 1 = 0$ e s: $x \quad 3 = 0$ são paralelas distintas, pois ambas são paralelas ao eixo *y*.

Retas concorrentes

As retas *r* e *s* são chamadas concorrentes quando se intersectam em apenas um ponto. Isso ocorrerá se, e somente se, tiverem inclinação diferente em relação ao eixo Ox, ou seja, se seus coeficientes angulares forem diferentes (quando estiverem definidos).

$$\theta_r \neq \theta_s \Rightarrow m_r \neq m_s$$

Assim:

$$r \text{ e } s \text{ concorrentes} \Leftrightarrow m_r \neq m_s \Leftrightarrow -\frac{a_r}{b_r} = -\frac{a_s}{b_s} \Leftrightarrow \frac{a_r}{a_s} \neq \frac{b_r}{b_s}$$

Como exemplo, temos:

a. As retas $y = 2x - 1$ e $y = 3x + 1$ são concorrentes, pois $m_r = 2 \neq 3 = m_s$.

b. As retas $2x + 3y \quad 1 = 0$ e $4x + 5y \quad 1 = 0$ são concorrentes, pois $\frac{2}{4} \neq \frac{3}{5}$.

Retas perpendiculares

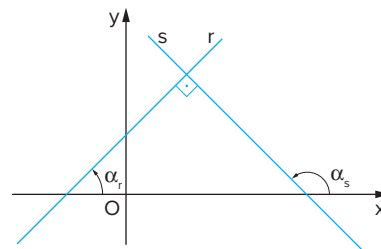
Duas retas *r* e *s* serão perpendiculares se, e somente se, forem concorrentes e formarem um ângulo de 90°.

Se uma das retas for paralela a um dos eixos, ela será perpendicular a qualquer outra reta paralela a outro eixo. Assim, retas com equações na forma $x = k_1$, $k_1 \in \mathbb{R}$ (paralelas ao eixo *y*) são perpendiculares a retas com equações $y = k_2$, $k_2 \in \mathbb{R}$ (paralelas ao eixo *x*).

Teorema (condição de perpendicularidade)

Se *r* e *s* não forem paralelas aos eixos, elas serão perpendiculares se, e somente se, o produto dos coeficientes angulares for igual a –1, ou seja, $m_r \cdot m_s = -1$.

Demonstração:

Suponha que *r* e *s* são retas perpendiculares Analise o gráfico a seguir

Temos que, se $m_r = \text{tg}\,\alpha_r = \frac{B}{A}$, então $m_s = \text{tg}\,\alpha_s =$

$= \text{tg}\,(180° \quad \alpha_s) = \quad \frac{A}{B} = \frac{1}{m_r}$. Assim, $m_r \cdot m_s = \quad 1$.

Por outro lado, como α_r e α_s são ângulos entre 0° e 180° e diferentes de 90°, temos:

$$m_r \quad m_s = \quad 1 \Rightarrow \text{tg}\,\alpha_r \quad \text{tg}\,\alpha_s = \quad 1 \Rightarrow \alpha_s = \alpha_r + 90°$$

Isso implica que *r* e *s* são perpendiculares.

Se *r* e *s* estiverem com suas equações na forma geral, teremos:

$$m_r \quad m_s = \quad 1 \Leftrightarrow \frac{a_r}{b_r} \quad \frac{-a_s}{b_s} = \quad 1 \Leftrightarrow a_r \quad a_s = \quad b_r \quad b_s \Leftrightarrow$$

$$+_r \; a_s \cdot a = b \cdot b \quad 0$$

Como exemplos, temos:

a. r: $y = 3x \quad 1$ e s: $y = \quad \frac{1}{3}x + 1$ são perpendiculares, pois $m_r \cdot m_s = 3 \cdot \left(\quad \frac{1}{3} \right) = \quad 1$.

b. r: $3x + 4y \quad 2 = 0$ e s: $4x \quad 3y + 2 = 0$ são perpendiculares, pois $a_r \cdot a_s + b_r \cdot b_s = 3 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) = 0$.

c. r: $x \quad 1 = 0$ e s: $y + 2 = 0$ são perpendiculares, pois r // Oy e s // Ox.

! Atenção

Dadas as retas r: $y = m_r x + n_r$ e s: $y = m_s x + n_s$, com $m_r \neq 0$ e $m_s \neq 0$, suas posições relativas são:

- Paralelas coincidentes: $m_r = m_s$ e $n_r = n_s$
- Paralelas distintas: $m_r = m_s$ e $n_r \neq n_s$
- Concorrentes: $m_r \neq m_s$
- Perpendiculares: $m_r \cdot m_s = -1$

Dadas as retas r: $a_r x + b_r y + cr = 0$ e s: $a_s x + b_s y + c_s = 0$, com $a_r \neq 0$, $a_s \neq 0$, $b_r \neq 0$ e $b_s \neq 0$, suas posições relativas são:

- Paralelas coincidentes: $\frac{a_r}{a_s} = \frac{b_r}{b_s} = \frac{c_r}{c_s}$
- Paralelas distintas: $\frac{a_r}{a_s} = \frac{b_r}{b_s} \neq \frac{c_r}{c_s}$
- Concorrentes: $\frac{a_r}{a_s} \neq \frac{b_r}{b_s}$
- Perpendiculares: $a_r \cdot a_s + b_r \cdot b_s = 0$

Exercícios resolvidos

14 Dada a reta *r*: y = 2x e o ponto P(1, 4), determine a equação:

a) reduzida da reta *s* que passa por P e é paralela à reta *r*.

b) reduzida da reta *t* que passa por P e é perpendicular à reta *r*.

Resolução:

a) O ponto P(1, 4) não pertence à reta *r*, logo, *r* e *s* são paralelas distintas. Assim, $m_r = m_s = 2$.

A equação fundamental da reta *s* é dada por:

$$y - 4 = 2(x - 1)$$

Portanto, a equação reduzida é:

$$y = 2x \quad 2 + 4 \Rightarrow y = 2x + 2$$

b) Temos:

$$m_r \ \ m_t = \ \ 1 \Leftrightarrow 2 \ \ m_t = \ \ 1 \Leftrightarrow m_t = \ \ \frac{1}{2}$$

A equação fundamental da reta *t* é dada por:

$$y \quad 4 = \ \ \frac{1}{2}(x \quad 1)$$

Portanto, a equação reduzida é:

$$y = \ \ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 4 \Rightarrow y = \ \ \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$$

15 Dada a reta r: 3x + 4y = 0 e o ponto P(2, 4), determine a equação:

a) geral da reta *s* que passa por P e é paralela à reta *r*.

b) geral da reta *t* que passa por P e é perpendicular à reta *r*.

Resolução:

a) O ponto P não pertence à reta *r*, logo, *r* e s são retas paralelas distintas A equação geral de *s* pode ser escrita na forma 3x + 4y + c = 0, pois $\frac{3}{3} = \frac{4}{4} \neq \frac{0}{c}$

Como P(2, 4) pertence à reta *s*, temos:

$$3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + c = 0 \Rightarrow c = \quad 22$$

Logo, uma equação geral da reta *s* é dada por:

$$3x + 4y \quad 22 = 0$$

b) Uma equação geral da reta *t* é dada por:

$$4x \quad 3y + d = 0, \text{ pois } 4 \cdot 3 + (-3) \cdot 4 = 0$$

Como P(2, 4) pertence a *t*, temos:

$$4 \cdot 2 + (-3) \cdot 4 + d = 0 \Rightarrow d = 4$$

Logo, uma equação geral da reta *t* é dada por:

$$4x \quad 3y + 4 = 0$$

16 Considere no plano cartesiano as retas

r: $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t + \frac{1}{2} \end{cases}$ e s: $(k+1)x - y - \frac{k}{2} = 0$, em que $k \in \mathbb{R}$.

Sobre as retas *r* e *s* é correto afirmar que nunca serão

A concorrentes perpendiculares.

B concorrentes oblíquas.

C paralelas distintas.

D paralelas coincidentes.

Resolução:

$$r: \begin{cases} x = 2t \\ y = 3\,t + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} t = \frac{x}{2} \\ y = 3 \cdot \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow 2y = 3x + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r: 3x - 2y + 1 = 0$$

Para testar se *r* e *s* podem ser paralelas, temos:

$$\frac{3}{k+1} = \frac{2}{-1} \Leftrightarrow \frac{3}{k+1} = 2 \Rightarrow 2k + 2 = 3 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Se $k = \frac{1}{2}$, temos: $\frac{1}{\frac{-k}{2}} = \frac{2}{-k} = \frac{2}{-\frac{1}{2}} = -4 \neq 2$.

Assim, não há como as retas *r* e *s* serem paralelas coincidentes.

Se $k \neq \frac{1}{2}$, as retas serão concorrentes. Para que elas sejam perpendiculares, devemos ter:

$$(k+1) \cdot 3 + (\ \ 1) \cdot (\ \ 2) = 0 \Rightarrow 3k + 3 + 2 = 0 \Rightarrow k = \ \ \frac{5}{3}$$

Portanto, de todas as posições relativas, as retas só não podem ser paralelas coincidentes.

17 Encontre a interseção das retas r: $2x + 3y \quad 7 = 0$ e s: $x \quad y \quad 1 = 0$.

Resolução:

As duas retas são concorrentes, pois $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{-1}$.

Assim, para encontrar a interseção, devemos resolver o sistema formado por suas equações:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos x = 2 e y = 1, logo, a interseção das retas é o ponto (2, 1).

FRENTE 3

18 O quadrilátero ABCD é um paralelogramo em que A(1, 1) e B(5, 4). O ponto de encontro das diagonais é M(4, 9). Determine:

a) as coordenadas de C e D;

b) as equações das retas suportes dos lados do paralelogramo.

Resolução:

a) Sabemos que as diagonais de um paralelogramo se cruzam ao meio. Assim, M(4, 9) é ponto médio dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_C}{2} = x_M \\ \dfrac{y_A + y_C}{2} = y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1 + x_C}{2} = 4 \\ \dfrac{1 + y_C}{2} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 7 \\ y_C = 17 \end{cases} \Rightarrow C(7, 17)$$

$$\begin{cases} \dfrac{x_B + x_D}{2} = x_M \\ \dfrac{y_B + y_D}{2} = y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5 + x_D}{2} = 4 \\ \dfrac{4 + y_D}{2} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 3 \\ y_D = 14 \end{cases} \Rightarrow D(3, 14)$$

b) O coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 1}{5 - 1} = \frac{3}{4}$$

Então, a equação geral de $\overleftrightarrow{AB}$ é:

$$y - 1 = \frac{3}{4}(x - 1) \Leftrightarrow 4y - 4 = 3x - 3 \Leftrightarrow 3x - 4y + 1 = 0$$

O coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{BC}$ é:

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{17 - 4}{7 - 5} = \frac{13}{2}$$

Então, a equação geral de $\overleftrightarrow{BC}$ é:

$$y - 4 = \frac{13}{2}(x - 5) \Leftrightarrow 2y - 8 = 13x - 65 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 13x - 2y - 57 = 0$$

Como $\overleftrightarrow{AD}$ é paralela a $\overleftrightarrow{BC}$, sua equação tem a forma $13x - 2y + t = 0$. Como D pertence a essa reta, temos:

$$13x_D - 2y_D + t = 0 \Rightarrow 13 \cdot 3 - 2 \cdot 14 + t = 0 \Rightarrow t = -11$$

Assim, a equação geral de $\overleftrightarrow{AD}$ é $13x - 2y - 11 = 0$

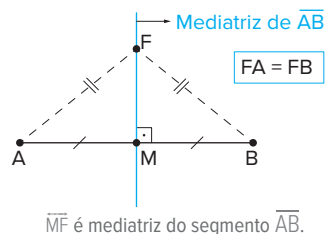
Como $\overleftrightarrow{CD}$ é paralela a $\overleftrightarrow{AB}$, sua equação tem a forma $3x - 4y + w = 0$. Como D pertence a essa reta, temos:

$$3x_D - 4y_D + w = 0 \Rightarrow 3 \cdot 3 - 4 \cdot 14 + w = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9 - 56 + w = 0 \Rightarrow w = 47$$

Assim, a equação geral de $\overleftrightarrow{CD}$ é $3x - 4y + 47 = 0$.

19 Determine a equação da mediatriz do segmento $\overline{AB}$ em que A(–2, 3) e B(4, 7).

Resolução:

A mediatriz de um segmento é a reta que passa pelo ponto médio dele e é perpendicular a ele. Desse modo, a mediatriz é o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos extremos do segmento.

$\overleftrightarrow{MF}$ é mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

Da figura, temos que os triângulos FMA e FMB são congruentes pelo caso LAL. Assim, qualquer que seja F pertencente à mediatriz, FA = FB.

O ponto médio M de $\overline{AB}$ tem coordenadas:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = M\left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{3 + 7}{2}\right) = M(1, 5)$$

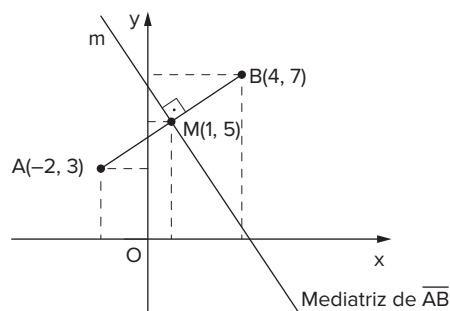
O coeficiente angular de AB é dado por:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7 - 3}{4 - (-2)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Como a mediatriz *m* e a reta $\overleftrightarrow{AB}$ (suporte do segmento) são perpendiculares, temos:

$$m_m \cdot m_{AB} = -1 \Rightarrow m_m = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$$

A equação da mediatriz *m* é dada por:

$$y - 5 = -\frac{3}{2}(x - 1) \Leftrightarrow 2y - 10 = -3x + 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x + 2y - 13 = 0$$

Uma segunda forma de resolução para o problema poderia ser obtida considerando que todo ponto P(x, y) da mediatriz *m* equidista de A e B. Assim:

$$d_{PA} = d_{PB}$$
$$\sqrt{(x - (-2))^2 + (y - 3)^2} = \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 7)^2}$$
$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = (x - 4)^2 + (y - 7)^2$$
$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 14y + 49$$
$$4x - 6y + 13 = -8x - 14y + 65$$
$$12x + 8y - 52 = 0$$
$$3x + 2y - 13 = 0$$

20 Determine a projeção ortogonal do ponto A(1, 5) em relação à reta *r* de equação $2x + 3y - 4 = 0$.

Resolução:

A projeção ortogonal de A sobre *r* é o ponto P de interseção de *r* com a reta *t* que passa por A e é perpendicular a *r*. Assim, temos:

$$r: 2x + 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow m_r = -\frac{2}{3}$$

$$m_r \cdot m_t = -1 \Rightarrow m_t = \frac{-1}{m_r} = \frac{-1}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

Equação de t (de coeficiente angular m_t passando por A):

$$y - 5 = \frac{3}{2}(x - 1) \Leftrightarrow 2y - 10 = 3x - 3 \Leftrightarrow 3x - 2y + 7 = 0$$

O ponto P, projeção ortogonal de A em r, é a interseção entre as retas r e t, logo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x \quad 2y = \quad 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 8 \\ 9x \quad 6y = \quad 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow P(-1, 2)$$

21 Determine o simétrico do ponto A(1, 5) em relação à reta r de equação $2x + 3y \quad 4 = 0$.

Resolução:

O simétrico de A em relação a r é o ponto A' tal que $\overline{AA'}$ é perpendicular a r e r divide $\overline{AA'}$ ao meio. A interseção de r e $\overline{AA'}$ é a projeção ortogonal P(–1, 2) de A sobre r, determinado no exercício resolvido anterior. P é o ponto médio de $\overline{AA'}$, logo:

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_{A'}}{2} = x_P \\ \frac{y_A + y_{A'}}{2} = y_P \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1 + x_{A'}}{2} = -1 \Rightarrow 1 + x_{A'} = -2 \Rightarrow x_{A'} = -3 \\ \frac{5 + y_{A'}}{2} = 2 \Rightarrow 5 + y_{A'} = 4 \Rightarrow y_{A'} = -1 \end{cases} \Rightarrow A'(-3, -1)$$

22 Dado o triângulo ABC de vértices A(0, 0), B(10, 5) e C(3, 9), determine:

a) A equação geral da reta que contém a mediana relativa ao lado $\overline{AB}$.

b) A equação geral da reta suporte da altura relativa ao lado $\overline{AB}$.

c) A equação geral da mediatriz do lado $\overline{AB}$.

d) O pé da altura relativa ao lado $\overline{AB}$.

e) O comprimento da altura relativa ao lado $\overline{AB}$.

Resolução:

a) O ponto médio M do lado $\overline{AB}$ é dado por $M\left(\frac{0+10}{2}, \frac{0+5}{2}\right) = M\left(5, \frac{5}{2}\right)$. A reta suporte da mediana relativa ao lado $\overline{AB}$ é $\overleftrightarrow{CM}$, cujo coeficiente angular é $m_{CM} = \frac{y_C - y_M}{x_C - x_M} = \frac{9 \quad \frac{5}{2}}{3 - 5} = \frac{\frac{13}{2}}{-2} = -\frac{13}{4}$.

A equação de $\overleftrightarrow{CM}$ é: $y \quad 9 = \quad \frac{13}{4}(x \quad 3) \Leftrightarrow$

$= \quad 4y + 36 \Leftrightarrow 13x + 39 \qquad 13x \quad 4y - 75 \quad 0$

b) O coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é $m_{AB} = \frac{y_B \; y_A}{x_B \; x_A} =$

$= \frac{5 \quad 0}{10 \quad 0} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. O coeficiente $m_\perp$ da perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$ é tal que $m_\perp \quad m_{AB} = \quad 1 \Rightarrow m_\perp = \frac{1}{m_{AB}} =$

$\frac{1}{\frac{1}{2}} = \quad 2$. Assim, a equação da altura é:

$$y - 9 = -2(x - 3) \Leftrightarrow y - 9 = -2x + 6 \Leftrightarrow$$
$$2 \quad x \quad y - 15 \quad 0$$

c) A mediatriz t é perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ e, portanto, paralela à altura relativa a $\overline{AB}$. Assim, $m_\perp = m_t = 2$.

Como t passa por M, temos que a equação de t é:

$$y \quad \frac{5}{2} = \quad 2(x \quad 5) \Leftrightarrow y \quad \frac{5}{2} = 2x \quad 1 + 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad y \quad 5 = -4x + 20 \Leftrightarrow 4x + 2y \quad 25 = 0$$

d) A equação da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é:

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 0) \Leftrightarrow 2y = x \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

Sendo H o pé da altura relativa a $\overline{AB}$, ele corresponde à interseção dessa altura com a reta $\overleftrightarrow{AB}$. Assim H é a solução do sistema $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 15 \end{cases}$:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 4x + 2y = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow H(6, 3)$$

e) A altura relativa a $\overline{AB}$ tem medida, em unidades de comprimento, igual à distância entre os pontos C e H. Então:

$$d(C, H) = \sqrt{(3 - 6)^2 + (9 - 3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} =$$

$$\sqrt{9 \quad 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ u.c.}$$

23 Considere, no plano cartesiano, duas retas r e s cujas equações são dadas, respectivamente, por y = x − 5 e y = 2x + 12. Encontre a equação geral da reta que passa por P(1, 3) e intersecta r e s nos pontos A e B, com A ∈ r e B ∈ s, de modo que P seja o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

Resolução:

Como o ponto A pertence à reta r, suas coordenadas são da forma (k, k 5), com $k \in \mathbb{R}$

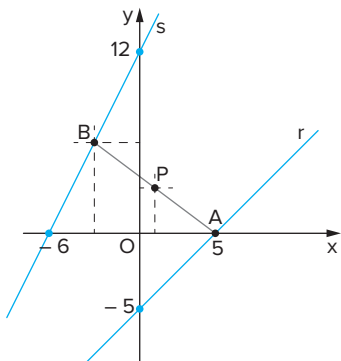
Como o ponto B pertence à reta s, suas coordenadas são da forma (t, 2t + 12), com $t \in \mathbb{R}$

Se P(1, 3) é o ponto médio de $\overline{AB}$, então:

$$\begin{cases} \frac{k + t}{2} = 1 \\ \frac{k - 5 + 2t + 12}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k + t = 2 \\ k + 2t = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \quad k - t = \quad 2 \\ k + 2t = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 5 \\ t = -3 \end{cases}$$

Logo, os pontos A e B têm coordenadas respectivamente iguais a (5, 0) e (–3, 6).

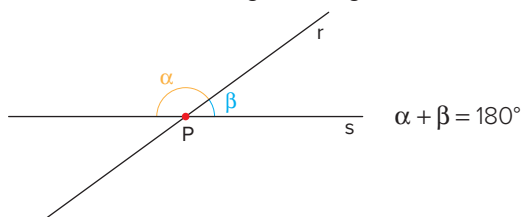
FRENTE 3

Portanto, a equação da reta que passa por P, A e B é:

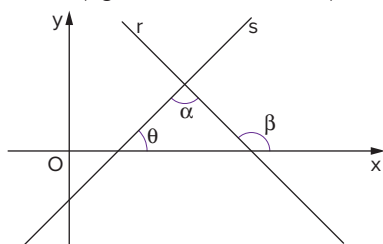
$$y - 0 = \frac{3-0}{1-5}(x-5) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}(x-5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = -3x + 15 \Rightarrow 3x + 4y - 15 = 0$$

Ângulo entre retas

Na Geometria Analítica, há várias situações que envolvem o ângulo formado por duas retas. Quando elas são concorrentes, sempre formam um par de ângulos suplementares, como mostra a figura a seguir:

$\alpha + \beta = 180°$

Quando as retas são perpendiculares, temos $\alpha = \beta = 90°$

Sejam *r* e *s* duas retas com coeficientes angulares definidos, ou seja, não paralelas ao eixo *y* Conforme a figura a seguir, sejam β e θ as inclinações das retas *r* e *s* e α um ângulo entre elas (agudo, obtuso ou reto)

Temos que $m_r = \text{tg}\,\beta$ e $m_s = \text{tg}\,\theta$. O ângulo β é o ângulo externo do triângulo formado pelas retas *r* e *s* e o eixo *x*. Pelo teorema do ângulo externo:

$$\alpha + \theta = \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta - \theta \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,(\beta - \theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \text{tg}\,\alpha = \frac{\text{tg}\,\beta \quad \text{tg}\,\theta}{1 + \text{tg}\,\beta \cdot \text{tg}\,\theta} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{m_r \quad m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \qquad (1)$$

Os ângulos formados por duas retas concorrentes são suplementares, portanto têm tangentes opostas (com mesmo módulo e sinais opostos). Se quisermos que α seja o ângulo agudo formado pelas duas retas, é preciso garantir que sua tangente seja positiva. Para isso, basta tomar o resultado (1) em módulo, ou seja:

$$\text{tg}\,\alpha = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}\right|$$

Se uma das duas retas for paralela ao eixo *y* e a outra tiver inclinação igual a θ, o ângulo agudo α formado entre elas será igual a $(90° - \theta)$ ou $(\theta - 90°)$. Nos dois casos:

$$\text{tg}\,\alpha = \left|\frac{1}{\text{tg}\,\theta}\right| = \left|\frac{1}{m_s}\right|$$

! Atenção

Se *r* e *s* são duas retas não paralelas ao eixo *y*, a tangente do ângulo agudo α formado por elas é dada por:

$$\text{tg}\,\alpha = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}\right|$$

Se *r* é paralela ao eixo *y*, então:

$$\text{tg}\,\alpha = \left|\frac{1}{m_s}\right|$$

Exercícios resolvidos

24 Qual é o ângulo agudo formado pelas retas r: 2x – 3y + 1 = 0 e x + y = 0?

Resolução:

Temos que:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow 3y = 2x + 1 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \Rightarrow m_r = \frac{2}{3} \\ x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x \Rightarrow m_s = \quad 1 \end{cases}$$

Assim, sendo α o ângulo agudo entre as duas retas, temos:

$$\text{tg}\,\alpha = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r \quad m_s}\right| = \left|\frac{\frac{2}{3} \quad (\ 1)}{1 + \frac{2}{3} \cdot (\ 1)}\right| = \left|\frac{\frac{2}{3} + 1}{1 \quad \frac{2}{3}}\right| = \left|\frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}}\right| = 5$$

Logo, $\alpha = \text{arctg}\,5$ (α é um arco de tangente 5).

25 Sejam r: x = 4 e s: x – 3y + 1 = 0. Determine o ângulo agudo formado pelas duas retas.

Resolução:

A reta *r* é paralela ao eixo Oy. Como $m_s = \frac{1}{3}$, temos que $\text{tg}\,\alpha = \left|\frac{1}{m_s}\right| = \left|\frac{1}{\frac{1}{3}}\right| = 3$, logo, $\alpha = \text{arctg}\,3$

26 Dada a reta x   3y + 6 = 0 no plano xOy, responda:

a) Se P é um ponto qualquer desse plano, quantas retas passam por P e formam um ângulo de 45° com a reta dada?

b) Para o ponto P(2, 5), determine as equações das retas mencionadas no item anterior.

Resolução:

a) Seja *s* a reta que forma um ângulo agudo $\alpha = 45°$ com $r: x - 3y + 6 = 0$. Então, temos que:

$$r: x - 3y + 6 = 0 \Leftrightarrow 3y = x + 6 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + 2 \Rightarrow m_r = \frac{1}{3}$$

$$\text{tg } 45° = \left|\frac{\frac{1}{3} - m_s}{1 + \frac{1}{3} \cdot m_s}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{\frac{1 - 3m_s}{3}}{\frac{3 + m_s}{3}}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1 - 3m_s}{3 + m_s}\right| =$$

$$= 1 \begin{cases} \frac{1 - 3m_s}{3 + m_s} = 1 \Rightarrow 1 - 3m_s = 3 + m_s \Rightarrow m_s = -\frac{1}{2} \\ \frac{1 - 3m_s}{3 + m_s} = -1 \Rightarrow 1 - 3m_s = -3 - m_s \Rightarrow m_s = 2 \end{cases}$$

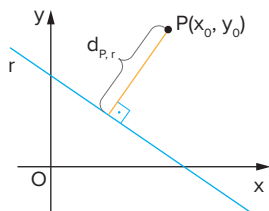
Assim, sempre existirão duas retas *s* que passam por qualquer ponto P do plano e formam 45° com *r*.

b) As duas retas *s* e *s'* do plano que passam por P(2, 5) e formam um ângulo de 45° com *r* têm coeficientes angulares iguais a $-\frac{1}{2}$ ou 2 e suas equações são dadas por:

$$s: y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Leftrightarrow 2y - 10 = -x + 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x + 2y - 12 = 0$$
$$s': y - 5 = 2(x - 2) \Leftrightarrow y - 5 = 2x - 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x - y + 1 = 0$$

Distância entre ponto e reta

No exercício resolvido 22, determinamos o comprimento da altura relativa ao vértice C do triângulo ABC em que A(0, 0), B(10, 5) e C(3, 9). Para isso, seguimos um longo roteiro. Primeiro, determinamos o coeficiente angular e a equação da reta $\overleftrightarrow{AB}$. Depois, por condição de perpendicularidade, determinamos o coeficiente angular da reta suporte da altura relativa ao vértice C e sua equação. Em seguida, determinamos a interseção H entre a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e a reta suporte da altura relativa. Finalmente, calculamos o comprimento da altura pela distância entre C e H.

Existe, porém, um caminho mais curto para a resolução de problemas desse tipo. A questão central era o cálculo da distância do ponto C à reta $\overleftrightarrow{AB}$, ou seja, a distância de um ponto a uma reta. Geometricamente, definimos a distância de um ponto P a uma reta *r* como sendo o comprimento do segmento perpendicular à reta *r* que passa pelo ponto P.

d é a distância do ponto P à reta *r*.

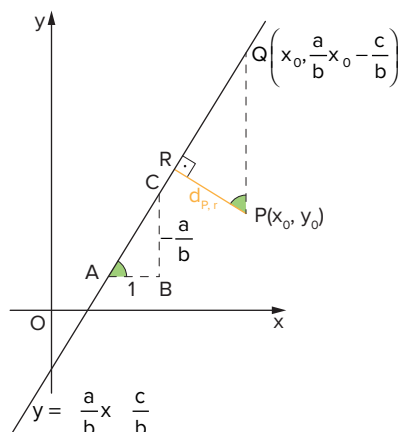
Dada a reta *r* de equação $ax + by + c = 0$ e o ponto $P(x_0, y_0)$, a distância de P à reta *r* é dada por:

$$d_{P,r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

A seguir, vamos demonstrar esse resultado.

Considere a reta *r* de equação $ax + by + c = 0$ ou, escrita na forma reduzida, $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Agora, vamos calcular a distância $d_{P,r}$ de um ponto $P(x_0, y_0)$ à reta *r*.

Na reta $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, o coeficiente angular da reta *r* é $-\frac{a}{b}$ e representa a tangente do seu ângulo de inclinação, que pode ser agudo ou obtuso, conforme já estudamos.

Para garantir que tenhamos a tangente do ângulo agudo α que a reta forma com o eixo *x*, devemos ter $\text{tg}\alpha = \left|-\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

O triângulo ABC tem hipotenusa $\overline{AC}$ sobre a reta *r* e o cateto $\overline{AB}$ mede 1. A medida BC do outro cateto é dada por:

$$\frac{BC}{AB} = \text{tg}\alpha \Leftrightarrow \frac{BC}{1} = \frac{|a|}{|b|} \Rightarrow BC = \frac{|a|}{|b|}$$

Cálculo da hipotenusa $\overline{AC}$:

$$AC^2 = 1^2 + \left(\frac{|a|}{|b|}\right)^2 \Rightarrow AC^2 = 1 + \frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2 + a^2}{b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{b^2}} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{|b|}$$

Agora, considere o triângulo PQR, em que PR é a distância de P à reta *r*. Os pontos P e Q estão na mesma vertical, portanto têm a mesma abscissa x_0. Como Q pertence à reta de equação $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, então $Q\left(x_0, -\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b}\right)$.

A medida da hipotenusa $\overline{PQ}$ é a diferença (em módulo) das ordenadas dos pontos P e Q, ou seja:

$$PQ = \left|y_0 - \left(-\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b}\right)\right| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|b|}$$

Pela semelhança dos triângulos ABC e PQR, temos:

$$\frac{PR}{AB} = \frac{PQ}{AC} \Leftrightarrow \frac{d}{1} = \frac{\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|b|}}{\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{|b|}}$$

Simplificando essa expressão, obtemos a fórmula da distância do ponto P à reta *r*:

$$d_{P,r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

FRENTE 3

Exercícios resolvidos

27 Calcule a distância, em unidades de comprimento, do ponto P(1, 5) à reta *r*: 3x + 4y – 3 = 0.

Resolução:

Temos:

$$d_{P,r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 5 - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} =$$
$$= \frac{|3 + 20 \quad 3|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4 \text{ u.c.}$$

28 Calcule a altura relativa ao lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC de vértices A(0, 0), B(10, 5) e C(3, 9)
(Resolução alternativa para o exercício resolvido 22)

Resolução:

A altura relativa à $\overline{AB}$ corresponde à distância do ponto C até a reta $\overleftrightarrow{AB}$. Uma equação geral de $\overleftrightarrow{AB}$ é dada por:

$$y \quad 0 = \frac{5 \quad 0}{10 \quad 0}(x \quad 0) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2y = x \Leftrightarrow x \quad 2y = 0$$

Assim, a distância é:

$$d_{C,AB} = \frac{|1 \cdot 3 - 2 \cdot 9|}{\sqrt{1^2 + (\ 2)^2}} = \frac{|3 - 18|}{\sqrt{5}} =$$
$$= \frac{15}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{15\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5}$$

29 Um quadrado ABCD tem a diagonal $\overline{AC}$ sobre a reta r: x – 3y + 6 = 0. Sabendo que B(0, 6), calcule a área do quadrado.

Resolução:

Seja *x* o lado do quadrado e x^2 sua área. As diagonais do quadrado se intersectam no ponto médio M e são perpendiculares. Assim, a medida BM é igual à metade da diagonal do quadrado e também à distância do ponto B à reta *r*. Logo:

$$BM = d_{B,r} \Leftrightarrow \frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{|1 \cdot 0 - 3 \cdot 6 + 6|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{12}{\sqrt{10}} \Rightarrow x = \frac{24}{\sqrt{20}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

Portanto, a área do quadrado é $x^2 = \left(\frac{12}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{144}{5}$.

30 Determine, em unidades de comprimento, a distância entre as retas r: $5x + 12y \quad 12 = 0$ e s: $10x + 24y + 4 = 0$.

Resolução:

Como $\frac{5}{10} = \frac{12}{24} \neq \frac{12}{4}$, as retas são paralelas.
A distância entre duas paralelas pode ser medida escolhendo-se um ponto P de uma delas e medindo a distância desse ponto à outra reta.

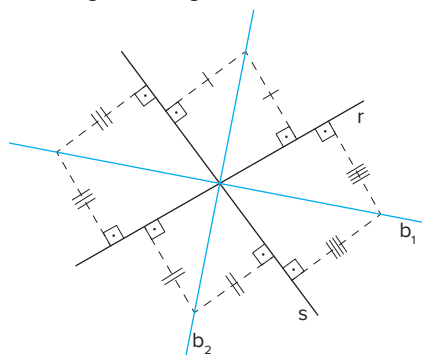
Para escolher um ponto em *r*, atribuímos, por exemplo, um valor para *x* e o substituímos na equação da reta, obtendo o valor correspondente de *y*. Escolhendo x = 0, temos:

$$5 \cdot 0 + 12y \quad 12 = 0 \Rightarrow 12y = 12 \Rightarrow y = 1$$

Portanto, P(0, 1) ∈ r.
Calculando a distância de P até *s*, temos:

$$d_{r,s} = d_{P,s} = \frac{|10 \quad 0 + 24 \quad 1 + 4|}{\sqrt{10^2 + 24^2}} = \frac{|28|}{\sqrt{676}} = \frac{28}{26} = \frac{14}{13} \text{ u.c.}$$

Bissetrizes dos ângulos entre duas retas

Considerando os ângulos formados por duas retas concorrentes *r* e *s*, o lugar geométrico dos pontos que equidistam de ambas é formado pelas bissetrizes b_1 e b_2, como mostra a figura a seguir.

Sejam duas retas concorrentes r: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e s: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Se P(x, y) é um ponto genérico das bissetrizes de *r* e *s*, então a expressão a seguir é a que fornece as equações das duas bissetrizes de *r* e *s*:

$$d_{P,r} = d_{P,s} \Leftrightarrow \frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Note que as bissetrizes são perpendiculares entre si.

Exercício resolvido

31 Sejam as retas r: $3x + 2y \quad 7 = 0$ e s: $2x \quad 3y + 1 = 0$
Determine as equações das bissetrizes dessas retas.

Resolução:

$$\frac{3x + 2y - 7}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \pm \frac{2x - 3y + 1}{\sqrt{2^2 + (\ 3)^2}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{3x + 2y - 7}{\sqrt{13}} = \pm \frac{2x - 3y + 1}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x + 2y - 7 = \pm(2x - 3y + 1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 7 = 2x - 3y + 1 \Rightarrow x + 5y - 8 = 0 \\ \text{ou} \\ 3x + 2y - 7 = 0 = -2x + 3y - 1 \Rightarrow 5x - y - 6 = 0 \end{cases}$$

As bissetrizes de *r* e *s* têm equações $x + 5y \quad 8 = 0$ e $5x \quad y \quad 6 = 0$.

Revisando

1 Seja θ a inclinação da reta *r* e P um ponto que pertence a *r*. Determine a equação geral e a reduzida nos seguintes casos:

a) $\theta = 45°$ e A(0, 4)

b) $\theta = 135°$ e A(0, 4)

c) $\theta = 60°$ e $A\left(\sqrt{3}, 1\right)$.

2 Determine a equação geral e a reduzida das retas que passam pelos pontos:

a) A(0, 0) e B(3, 4).

b) C(0, 5) e D(10, 0).

c) P(2, 3) e Q(11, 6).

3 Determine a equação segmentária da reta que passa pelos pontos A(0, 4) e B(6, 0).

4 Determine a equação geral da reta dada por $\begin{cases} x = 4t + 5 \\ y = 3t + 4 \end{cases}$.

5 Dadas as retas (r): $x \quad 2y \quad 10 = 0$ e (s): $3x + 2y \quad 6 = 0$, determine o ponto de interseção entre elas

FRENTE 3

6 Calcule a área do triângulo formado pelas retas r: $3x \quad 4y + 12 = 0$ e s: $x + y = 3$ e o eixo *x*.

7 Determine a equação reduzida da reta *r* que passa por A(2, 6) e é paralela à reta s: $y = 2x + 3$.

8 Determine a equação geral da reta *r* que passa por P(3, 4) e é paralela à reta s: $2x + 3y = 0$

9 Determine a equação reduzida da reta *t* que passa por P(0, 4) e é perpendicular à reta que passa por A(2, 1) e B(2, 3).

10 Determine a equação da reta *t* perxpendicular à r: $3x + 4y - 1 = 0$ e que passa por P(1, 2).

11 Determine a equação geral da mediatriz do segmento $\overline{AB}$ em que A(1, 4) e B(7, 2).

12 Seja o triângulo ABC em que A(6, 8), B(1, 2) e C(9, 4). Determine a equação da reta suporte da altura relativa ao vértice A.

13 Determine o ponto simétrico de A(1, 10) em relação à reta r: $2x + 3y - 6 = 0$.

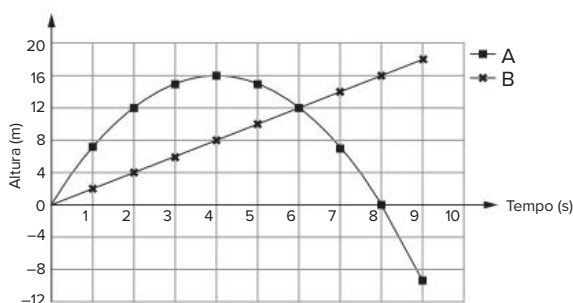
14 Determine a distância, em unidades de comprimento, do ponto P(3, 5) à reta r: $12x - 5y + 15 = 0$.

15 Seja o triângulo ABC em que A(6, 8), B(1, 2) e C(9, 4). Determine o comprimento, em unidades de comprimento, da altura relativa ao vértice A.

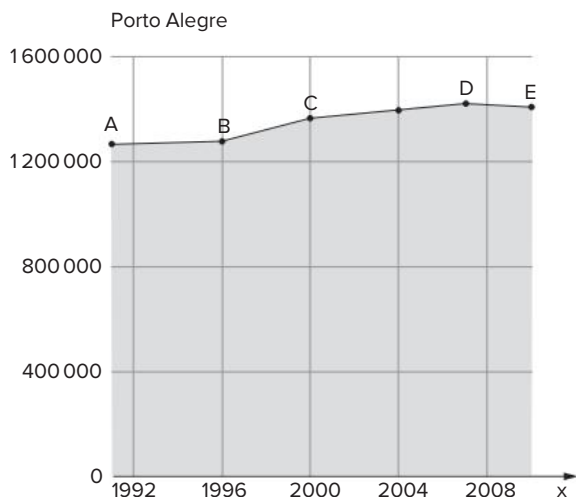
16 Determine as equações gerais das retas que passam por A(0, 2) e formam um ângulo de 30° com a reta r: $y = \left(2 \quad \sqrt{3}\right)x$

FRENTE 3

Exercícios propostos

1 Enem 2016 Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simula ções realizadas.

Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado.
Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B deverá

A diminuir em 2 unidades.
B diminuir em 4 unidades.
C aumentar em 2 unidades.
D aumentar em 4 unidades.
E aumentar em 8 unidades.

2 PUC RS 2017 O gráfico a seguir representa a evolução populacional de Porto Alegre entre os anos de 1992 e 2010.

Fontes: IBGE: Censo Demográfico 1991, Contagem Populacional 1996, Censo Demográfico 2000, Contagem Populacional 2007 e Censo Demográfico 2010.

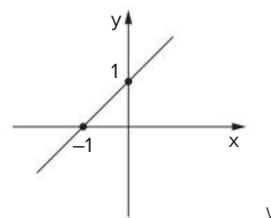
Considerando as seguintes retas: *r*, determinada pe los pontos A e B; *s*, pelos pontos B e C; *t*, pelos pontos C e D; e *u*, pelos pontos D e E, cujos coeficientes an gulares são, respectivamente, a_r, a_s, a_t e a_u, é correto afirmar que

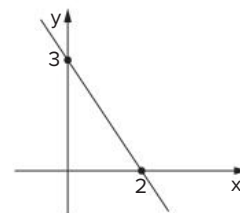
A $a_r < a_u < a_t < a_s$
B $a_r < a_u < a_s < a_t$
C $a_u < a_r < a_t < a_s$
D $a_u < a_r < a_s < a_t$
E $a_u < a_t < a_r < a_s$

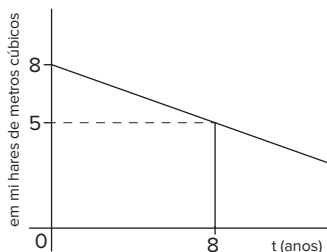
3 EEAR 2016 A equação reduzida da reta que passa pelos pontos A(0, 1) e B(6, 8) é dada por

A $y = 7x + 1$
B $y = 6x + 1$
C $y = \frac{7}{6}x + 1$
D $y = \frac{6}{7}x + 1$

4 PUC RS 2013 A equação que representa a reta na figu ra a seguir é:

v

A $y = x$
B $y = \quad x + 1$
C $y = \quad x \quad 1$
D $y = x \quad 1$
E $y = x + 1$

5 IFSul 2011 A equação da reta, representada no gráfico a seguir, é:

A $y = \frac{3}{2}x + 3$
B $y = \quad \frac{3}{2}x + 3$
C $y = \frac{2}{3}x + 3$
D $y = \quad \frac{2}{3}x + 3$

6 Unesp Ao ser inaugurada, uma represa possuía 8 mil m^3 de água. A quantidade de água da represa vem diminuindo anualmente. O gráfico mostra que a quantidade de água na represa oito anos após a inauguração é de 5 mil m^3.

Se for mantida essa relação de linearidade entre o tempo e a quantidade de água em m^3, determine em quantos anos, após a inauguração, a represa terá 2 mil m^3.

7 Enem PPL 2012 Os procedimentos de decolagem e pouso de uma aeronave são os momentos mais críticos de operação, necessitando de concentração total da tripulação e da torre de controle dos aeroportos. Segundo levantamento da Boeing, realizado em 2009, grande parte dos acidentes aéreos com vítimas ocorre após iniciar-se a fase de descida da aeronave. Desta forma, é essencial para os procedimentos adequados de segurança monitorar-se o tempo de descida da aeronave.

A tabela mostra a altitude *y* de uma aeronave, registrada pela torre de controle, *t* minutos após o início dos procedimentos de pouso.

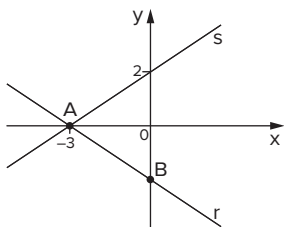
tempo *t* (em minutos)	0	5	10	15	20
altitude *y* (em metros)	10000	8000	6000	4000	2000

Considere que, durante todo o procedimento de pou so, a relação entre *y* e *t* é linear

Disponível em: <www.meioaereo.com>.

De acordo com os dados apresentados, a relação en tre *y* e *t* é dada por

A $y = \quad 400t$
B $y = \quad 2000t$
C $y = 8000 \quad 400t$
D $y = 10000 \quad 400t$
E $y = 10000 \quad 2000t$

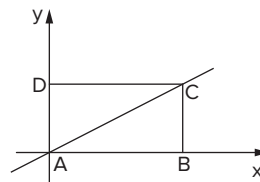
8 UEPB 2012 No sistema de eixos cartesianos xy, a reta *r*, simétrica da reta *s* em relação ao eixo *x*, tem equação:

A $x + y + 6 = 0$
B $3x + 2y + 6 = 0$
C $2x + 3y - 5 = 0$
D $2x + 3y - 6 = 0$
E $2x + 3y + 6 = 0$

9 CFTMG 2014 A tabela seguinte mostra o número de ovos postos, por semana, pelas galinhas de um sítio.

Semana	Número de galinhas (x)	Número de ovos (y)
1ª	2	11
2ª	3	18
3ª	4	25
4ª	5	32

Considerando-se esses dados, é correto afirmar que os pares ordenados (x, y) satisfazem a relação:

A $y = 4x + 3$
B $y = 6x - 1$
C $y = 7x - 3$
D $y = 5x + 7$

10 PUC-Rio 2014 O retângulo ABCD tem um lado sobre o eixo *x* e um lado sobre o eixo *y*, como mostra a figura. A área do retângulo ABCD é 15, e a medida do lado AB é 5.

A equação da reta que passa por A e por C é:

A $y = 3x$
B $y = \quad 3x$
C $y = 5x$
D $y = \frac{3}{5}x$
E $y = \frac{5}{3}x$

11 Uern 2012 Uma reta tem coeficiente angular igual a -2 e passa pelos pontos (3, 4) e (4, k). A soma do coeficiente linear da reta com o valor de *k* é:

A 5
B 7
C 12
D 14

12 Uema 2016 Uma cidade gera, em média, 20 mil toneladas de lixo, diariamente, de diversos tipos: lixo residencial, lixo hospitalar, entulho. Uma cooperativa analisou os dados de coleta seletiva fornecidos pela Prefeitura, considerando somente a produção de lixo residencial para dois tipos de resíduo em uma determinada área onde pretendia atuar. Tais dados se referem à média diária, em toneladas, para cada ano de coleta, conforme tabela a seguir.

Ano \ Tipo	Garrafas PET	Papel
2012	15	20
2013	20	25
2014	20	35
2015	30	35

Disponível em: <www3.prefeitura.sp gov.br/limpeza_urbana/formspublic/limpezarua.apx>. (Adapt.).

(Use, para fins de cálculo, apenas os dois últimos dígitos do ano.)

a) Qual a equação da reta que representa o comportamento da coleta total do ano de 2012 ao de 2014?
b) A partir dos dados na tabela, qual será o valor total recolhido para esses dois resíduos no ano de 2020?

13 PUC-Minas 2016 No final do ano de 2005, o número de casos de dengue registrados em certa cidade era de 400 e, no final de 2013, esse número passou para 560. Admitindo-se que o gráfico do número de casos registrados em função do tempo seja formado por pontos situados em uma mesma reta, é correto afirmar que, no final de 2015, o número de casos de dengue registrados será igual a:

A 580
B 590
C 600
D 610
E 650

14 Uema 2015 O método analítico em Geometria é uma ferramenta muito utilizada em estudo de coordenadas. Para fazer uma aplicação desse método, um professor lançou o seguinte desafio aos seus alunos: teriam de construir, em sistema de coordenadas, a figura de um paralelogramo ABCD, cujo ponto A está na origem; o ponto D(5, 0) e a diagonal maior com extremidade no ponto C(9, 4).

Com base nas informações,

a) faça o esboço em sistema de coordenadas da figura que representa o paralelogramo.

b) determine a equação da reta que contém a diagonal maior.

15 UEPB 2013 A reta de equação (x   2)m + (m   3)y + + m   4 = 0, com *m* constante real, passa pelo ponto P(2, 0) Então, seu coeficiente angular é:

A 4
B   4
C $\frac{1}{4}$
D $\frac{1}{4}$
E 2

16 Unicamp 2015 No plano cartesiano, a equação $|x \quad y| = |x + y|$ representa

A um ponto.
B uma reta.
C um par de retas paralelas.
D um par de retas concorrentes.

17 FGV-SP No plano cartesiano, o ponto P que pertence à reta de equação y = x é equidistante dos pontos A(−1, 3) e B(5, 7) tem abscissa igual a:

A 3,1
B 3,3
C 3,4
D 3,5
E 3,2

18 Unicamp 2014 No plano cartesiano, a reta de equação 2x − 3y = 12 intercepta os eixos coordenados nos pontos A e B. O ponto médio do segmento $\overline{AB}$ tem coordenadas:

A $\left(4, \frac{4}{3}\right)$
B (3, 2)
C $\left(4, -\frac{4}{3}\right)$
D (3, −2)

19 Uern 2013 A área do triângulo retângulo formada pela sobreposição das retas *r* e *s*, no gráfico, é igual a 36 unidades. Logo, a equação da reta *r* é:

A y = x + 12
B y = −x + 16
C y = −2x + 16
D y = −2x + 12

20 Insper 2014 No plano cartesiano, a reta *r*, de coeficiente angular 10, intercepta o eixo *y* em um ponto de ordenada *a*. Já a reta *s*, de coeficiente angular 9, intercepta o eixo *y* em um ponto de ordenada *b*. Se as retas *r* e *s* interceptam-se em um ponto de abscissa 6, então:

A b = a
B b = a − 9
C b = a − 6
D b = a + 9
E b = a + 6

21 FGV 2017 Os pares (x, y) dados a seguir pertencem a uma reta (r) do plano cartesiano:

x	−4	−2	0	2	4
y	−24	−14	−4	6	16

Podemos afirmar que

A a reta (r) intercepta o eixo das abscissas no ponto de abscissa   4.
B o coeficiente angular da reta (r) é   5.
C a reta (r) determina com os eixos cartesianos um triângulo de área 1,6
D *y* será positivo se, e somente se, $x > \frac{-4}{5}$
E a reta (r) intercepta o eixo das ordenadas no ponto de abscissa $\frac{4}{5}$

22 PUC Rio 2013 O triângulo ABC da figura a seguir tem área 25 e vértices A(4, 5), B(4, 0) e C(c, 0).

A equação da reta *r* que passa pelos vértices A e C é:

A $y = -x + 7$

B $y = \frac{x}{3} + 5$

C $y = -\frac{x}{2} + 5$

D $y = \frac{x}{2} + 7$

E $y = \frac{x}{3} + 7$

23 **UPE 2017** No plano cartesiano, a reta s: $4x - 3y + 12 = 0$ intersecta o eixo das abscissas no ponto A e o eixo das ordenadas no ponto B. Nessas condições, qual é a distância entre os pontos A e B?

A 5 **B** $\sqrt{5}$ **C** $2\sqrt{2}$ **D** 2 **E** $\sqrt{2}$

24 **Fuvest** Duas retas *s* e *t* do plano cartesiano se interceptam no ponto (2, 2). O produto de seus coeficientes angulares é 1 e a reta *s* intercepta o eixo dos *y* no ponto (0, 3). A área do triângulo delimitado pelo eixo dos *x* e pelas retas *s* e *t* é:

A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6

25 **Uece 2017** Em um plano, munido do sistema de coordenadas cartesianas usual, as equações $3x - 2y + 6 = 0$ e $3x + 4y - 12 = 0$ representam duas retas concorrentes. A medida da área da região limitada por essas retas e pelo eixo dos *x* é:

Dado: u.a. = unidades de área

A 9 u.a

B 10 u.a

C 11 u.a

D 12 u.a

26 **FGV** No plano cartesiano, a reta de equação $y = x + 1$ corta o lado $\overline{AC}$ do triângulo de vértices A(1, 7), B(1, 1) e C(10, 1), no ponto:

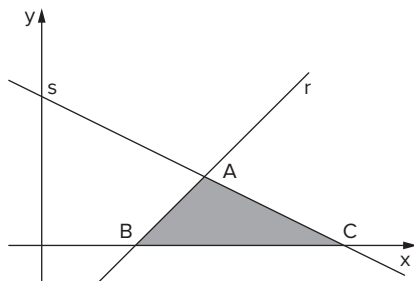
A (3, 4)

B (4, 5)

C (5, 6)

D $\left(\frac{\sqrt{117}}{2}, \frac{\sqrt{117}}{2} + 1\right)$

E (5,5; 4)

27 **PUC-Rio 2015** Sejam *r* e *s* as retas de equações $y = x - 2$ e $y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$, respectivamente, representadas no gráfico a seguir. Seja A o ponto de interseção das retas *r* e *s*. Sejam B e C os pontos de interseção de *r* e *s* com o eixo horizontal, respectivamente.

A área do triângulo ABC vale:

A 1,0

B 1,5

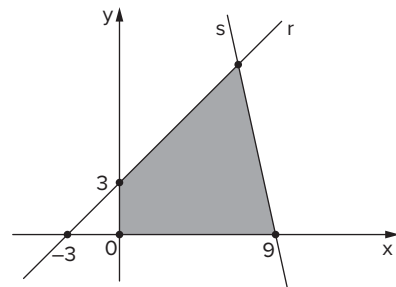
C 3,0

D 4,5

E 6,0

28 **Uece 2015** No referencial cartesiano ortogonal usual com origem no ponto O, a reta *r*, paralela à reta $y = -2x + 1$ intercepta os semieixos positivos Ox e Oy, respectivamente, nos pontos P e Q formando o triângulo POQ. Se a medida da área deste triângulo é igual a $9\ m^2$, então a distância entre os pontos P e Q é igual a:

A $\sqrt{5}$ m **B** $3\sqrt{5}$ m **C** $4\sqrt{5}$ m **D** $2\sqrt{5}$ m

29 **IFPE 2014** A figura a seguir ilustra as representações cartesianas das retas *r* e *s* de equações $y = x + 3$ e $y = -3x + 27$, respectivamente, com *x* e *y* dados em metros. Determine a área, em metros quadrados, do quadrilátero destacado.

A 45,5

B 49,5

C 52,5

D 55,5

E 58,5

30 **Unemat** Dada a equação de reta s: $2x \quad y + 1 = 0$, a equação de reta paralela a *s* pelo ponto P(1, 1) será:

A $2x \quad y = 0$

B $2x + y + 1 = 0$

C $2x + y \quad 1 = 0$

D $2x \quad y \quad 1 = 0$

E $2x \quad y + 2 = 0$

31 **Fuvest** O conjunto dos pontos (x, y), do plano carte siano que satisfazem $t^2 \quad t \quad 6 = 0$, onde $t = |x \quad y|$, consiste de

A uma reta.

B duas retas.

C quatro retas.

D uma parábola.

E duas parábolas.

32 **FGV** No plano cartesiano, os pontos A(–1, 4) e B(3, 6) são simétricos em relação à reta (r). O coeficiente angular da reta (r) vale:

A –1

B –2

C –3

D –4

E –5

33 **Unisc 2016** A equação da reta *r* que passa pelo ponto (16, 11) e que não intercepta a reta de equação $y = \frac{x}{2} - 5$ é

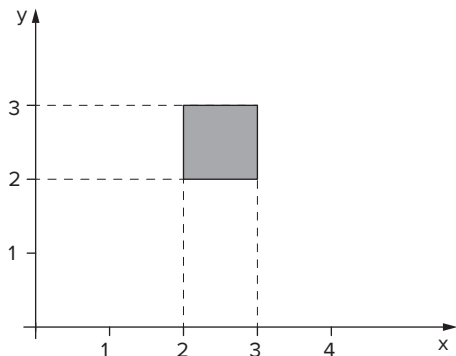
A $y = \frac{x}{2} - 8$

B $y = \frac{x}{2} + 11$

C $y = \frac{x}{2} + 3$

D $y = x - 8$

E $y = x + 3$

34 **PUC-RS 2016** Considere a figura a seguir, onde um quadrado está representado no primeiro quadrante do plano xy.

Para que uma reta da forma y = x + m não intercepte qualquer ponto do quadrado, devemos ter:

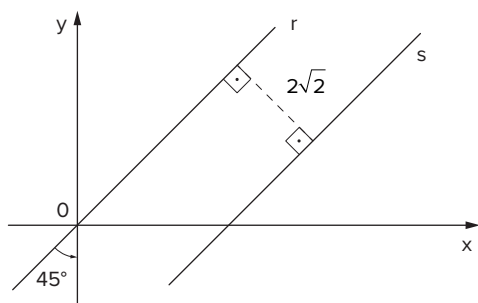
A $m < 3$

B $m < 0$

C $m > 0$

D $m > \ \ 1$

E $m < \ \ 1$ ou $m > 1$

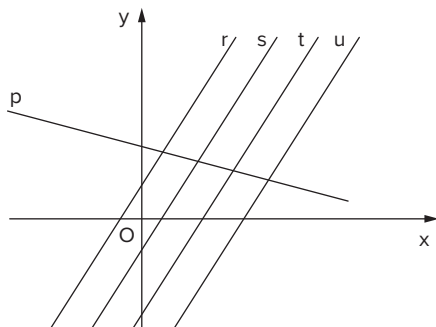
35 **Mackenzie 2012** Na figura, as retas *r* e *s* são paralelas. Se (x, y) é um ponto de *s*, então x – y vale:

A 2

B $\sqrt{2}$

C 4

D $2\sqrt{2}$

E $4\sqrt{2}$

36 **UEG 2017** Na figura a seguir, as retas *r*, *s*, *t* e *u* são paralelas e seus coeficientes lineares estão em uma progressão aritmética de razão –2.

Sabendo-se que a equação da reta *p* é $y = -\frac{1}{2}x + 3$ e da reta *u* é $y = 3x - 5$, o ponto de interseção da reta *p* com a reta *s* é:

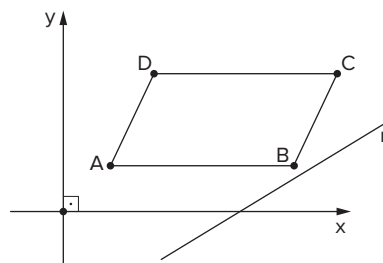
A $\left(\frac{4}{7}, \frac{19}{7}\right)$

B $\left(\frac{8}{7}, \frac{17}{7}\right)$

C $\left(\frac{12}{7}, \frac{15}{7}\right)$

D $\left(\frac{16}{7}, \frac{13}{7}\right)$

E $\left(\frac{18}{7}, \frac{11}{7}\right)$

37 **Unifesp** Em um sistema cartesiano ortogonal, são dados os pontos A(1, 1), B(5, 1), C(6, 3) e D(2, 3), vértices de um paralelogramo, e a reta *r*, de equação r: $3x - 5y - 11 = 0$.

A reta *s*, paralela à reta *r*, que divide o paralelogramo ABCD em dois polígonos de mesma área terá por equação:

A $3x - 5y - 5 = 0$

B $3x - 5y = 0$

C $6x - 10y - 1 = 0$

D $9x - 15y - 2 = 0$

E $12x - 20y - 1 = 0$

38 **UFPR 2017** Considere a reta *r* de equação y = 2x + 1. Qual das retas a seguir é perpendicular à reta *r* e passa pelo ponto P(4, 2)?

A $y = \frac{1}{2}x$

B $y = 2x \ \ 10$

C $y = -\frac{1}{2}x + 5$

D $y = -2x$

E $y = \ \ \frac{1}{2}x + 4$

39 **EEAR 2016** A reta *s* que passa por P(1, 6) e é perpendicular a r: $y = \frac{2}{3}x + 3$ é:

A $y = \frac{3}{2}x$

B $y = x + 5$

C $y = -\frac{2}{3}x + \frac{20}{3}$

D $y = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{2}$

40 **Unioeste 2013** Os valores de *k* para que as retas $2x + ky = 3$ e $x + y = 1$ sejam paralelas e perpendiculares entre si, respectivamente, são:

A $-\frac{3}{2}$ e 1

B $\ \ 1$ e 1

C 1 e –1

D –2 e 2

E 2 e $\ \ 2$

41 FGV Considere os pontos A(1, −2), B(−2, 4) e C(3, 3). A altura do triângulo ABC pelo vértice C tem equação:

A $2y - x - 3 = 0$
B $y \quad 2x + 3 = 0$
C $2y + x + 3 = 0$
D $y + 2x + 9 = 0$
E $2y + x \quad 9 = 0$

42 Mackenzie 2017 A equação da mediatriz do segmento que une os pontos P(1, –2) e Q(5, 4) é:

A $2x + 3y - 9 = 0$
B $2x - 3y + 9 = 0$
C $2x - 3y - 3 = 0$
D $3x - 2y - 7 = 0$
E $3x + 2y \quad 11 = 0$

43 Enem 2013 Nos últimos anos, a televisão tem pas sado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades As localizações das antenas estão representadas no pla no cartesiano:

A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas.
O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas:

A (65, 35)
B (53, 30)
C (45, 35)
D (50, 20)
E (50, 30)

44 UFU Se *r* e *s* são as retas perpendiculares, conforme esboçadas a seguir, determine a ordenada do ponto P, que é a interseção de *r* e *s*

45 Unicamp 2012 A área do triângulo OAB esboçado na figura a seguir é:

A $\frac{21}{4}$
B $\frac{23}{4}$
C $\frac{25}{4}$
D $\frac{27}{4}$

46 UFRN Uma formiga se desloca num plano, ao longo de uma reta. Passa pelo ponto (1, –2) e percorre a **menor** distância até interceptar a trajetória retilínea de outra formiga, nesse mesmo plano, descrita pela equação $y + 2x = 8$.
A equação da reta que representa a trajetória da primeira formiga é:

A $2y - x + 5 = 0$
B $y - x + 3 = 0$
C $y + x + 1 = 0$
D $2y + x + 2 = 0$

47 EsPCEx 2014 O ponto simétrico do ponto (1, 5) em relação à reta de equação $2x + 3y - 4 = 0$ é o ponto:

A (–3, –1)
B (–1, –2)
C (–4, 4)
D (3, 8)
E (3, 2)

48 ITA Dadas as retas r_1: $x + 2y - 5 = 0$, r_2: $x - y - 2 = 0$ e r_3: $x - 2y - 1 = 0$, podemos afirmar que:

A são 2 a 2 paralelas.
B r_1 e r_3 são paralelas.
C r_1 é perpendicular a r_3.
D r_2 é perpendicular a r_3.
E as três são concorrentes num mesmo ponto.

49 UFC Os vértices do quadrado ABCD no plano cartesia no são A(1, 3), B(1, 1), C(3, 3) e D(x, y) Então, os valores de *x* e *y* são:

A $x = 1$ e $y = 5$.
B $x = 5$ e $y = 1$.
C $x = 1 + \sqrt{5}$ e $y = 1 + \sqrt{5}$.
D $x = 1 - \sqrt{5}$ e $y = 1$.
E $x = 1$ e $y = 1 \quad \sqrt{5}$.

FRENTE 3

50 **UFPR 2011** Um balão de ar quente foi lançado de uma rampa inclinada. Utilizando o plano cartesiano, a figura a seguir descreve a situação de maneira simplificada.

Ao ser lançado, o balão esticou uma corda presa aos pontos P e Q, mantendo-se fixo no ar. As coordenadas do ponto P, indicado na figura, são, então:

A (21, 7)
B (22, 8)
C (24, 12)
D (25, 13)
E (26, 15)

51 **UFC** Considere a reta *r* cuja equação é y = 3x. Se P_0 é o ponto de *r* mais próximo do ponto Q(3, 3) e *d* é a distância de P_0 a Q, então $d\sqrt{10}$ é igual a:

A 3
B 4
C 5
D 6
E 7

52 **EEAR 2016** Dada a reta r: 2x – 3y + 5 = 0 e o ponto P(5, 6), a distância de P à reta *r* é

A $\sqrt{91}$
B $30\sqrt{13}$
C $\dfrac{3\sqrt{91}}{91}$
D $\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

53 **Fac. Albert Einstein 2016** A figura a seguir ilustra as localizações de um Posto de Saúde (P) e de um trecho retilíneo de uma rodovia (AB) em um plano cartesiano ortogonal, na escala 1 : 200.

Pretende-se construir uma estrada ligando o Posto à rodovia, de modo que a distância entre eles seja a menor possível. Se a unidade de medida real é o metro, a distância entre o Posto e a rodovia deverá ser igual a:

A 600 m
B 800 m
C 2 km
D 4 km

54 **Unifesp** Considere a reta de equação 4x – 3y + 15 = 0, a senoide de equação y = sen(x) e o ponto $P\left(\dfrac{\pi}{2}, 3\right)$, conforme a figura.

A soma das distâncias de P à reta e de P à senoide é:

A $\dfrac{(12+2\pi)}{5}$
B $\dfrac{(13+2\pi)}{5}$
C $\dfrac{(14+2\pi)}{5}$
D $\dfrac{(15+2\pi)}{5}$
E $\dfrac{(16+2\pi)}{5}$

55 **FGV** No plano cartesiano existem dois valores de *m* de modo que a distância do ponto P(m, 1) à reta de equação 3x + 4y + 4 = 0 seja 6; a soma desses valores é:

A $-\dfrac{16}{3}$
B $-\dfrac{17}{3}$
C $-\dfrac{18}{3}$
D $-\dfrac{19}{3}$
E $-\dfrac{20}{3}$

56 **UFPE** Na figura a seguir as retas *r* e *s* são paralelas e a distância da origem (0, 0) à reta *s* é $\sqrt{3}$. A equação cartesiana da reta *s* é y = ax + b. Determine $6a^2 + 4b^2$.

57 **Uece** No sistema usual de coordenadas ortogonais, as equações x + y = k e x   y = t representam famílias de retas perpendiculares. Existem quatro destas retas que limitam a superfície de um quadrado cujo centro é a origem do sistema e a área é 6 u.a. (unidades de área). O produto dos valores de *k* e de *t*, que determi nam estas retas, é:

A 9
B 8
C 6
D 4

58 **Uece 2015** Em um sistema de coordenadas cartesiano usual os pontos P(1, 2) e Q(4, 6) são vértices do triângulo PQM. Se o vértice M está sobre a reta paralela ao segmento $\overline{PQ}$ que contém o ponto (8, 6), então a medida da área do triângulo PQM é

u.a ≡ unidade de área

A 7 u a
B 8 u a
C 9 u a
D 10 u.a.

59 **Unifesp** Dada a matriz, 3 × 3, $A = \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, a distância entre as retas *r* e *s* de equações, respectivamente, det(A) = 0 e det(A) = 1 vale:

A $\frac{\sqrt{2}}{4}$
B $\sqrt{2}$
C 2
D 3
E $3\sqrt{2}$

Texto complementar

Sistemas lineares e retas

A principal ideia da Geometria Analítica é associar a Geometria e a Álgebra. Um aspecto interessante dessa integração é o uso de sistemas lineares de duas incógnitas para encontrar interseções de retas. Como se fosse a outra face da moeda, também podemos interpretar os sistemas lineares de duas incógnitas de maneira geométrica.

Todo sistema linear de duas incógnitas pode ser escrito na forma:

$$\begin{cases} a_r x + b_r y + c_r = 0 \\ a_s x + b_s y + c_s = 0 \end{cases}$$

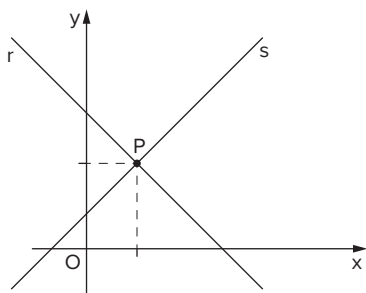
As duas equações representam retas no plano cartesiano Na Álgebra Linear, classificamos um sistema com solução única como Sistema Possível e Determinado (SPD). A solução é um par ordenado que pode ser interpretado como coordenadas de um ponto do plano cartesiano. Essa situação corresponde a retas concorrentes e ocorre se, e somente se, $\frac{a_r}{a_s} \neq \frac{b_r}{b_s}$.

Um sistema que não possui solução é classificado como Sistema Impossível (SI). Geralmente, ele ocorre quando há contradição entre as equações. Do ponto de vista geométrico, ocorre quando as duas retas são paralelas distintas, o que é equivalente a $\frac{a_r}{a_s} = \frac{b_r}{b_s} \neq \frac{c_r}{c_s}$.

Se as duas retas forem coincidentes, a interseção corresponderá a todos os pontos da reta. Nesse caso, o sistema terá infinitas soluções, o que ocorrerá quando $\frac{a_r}{a_s} = \frac{b_r}{b_s} = \frac{c_r}{c_s}$. Esse sistema é classificado como um Sistema Possível e Indeterminado (SPI).

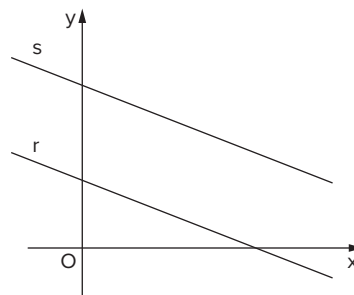
Observe, nos exemplos a seguir, os sistemas lineares, suas soluções e classificações:

a. $\begin{cases} r: x + y \quad 5 = 0 \\ s: x - y + 1 = 0 \end{cases}$

Graficamente:

Sistema Possível e Determinado, pois $\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1}$.

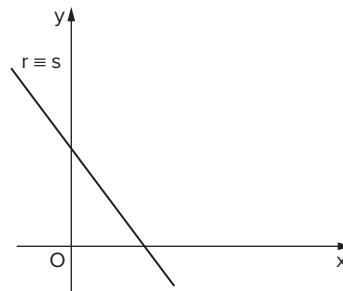
Solução única.

b. $\begin{cases} r: 4x + 10y \quad 20 = 0 \\ s: 2x + 5y - 25 = 0 \end{cases}$

Graficamente:

Sistema Impossível, pois $\frac{4}{2} = \frac{10}{5} \neq \frac{-20}{25}$.

Não possui soluções

c $\begin{cases} r: \ 2x + 3y - 1 = 0 \\ s: \ 4x + 6y - 2 = 0 \end{cases}$

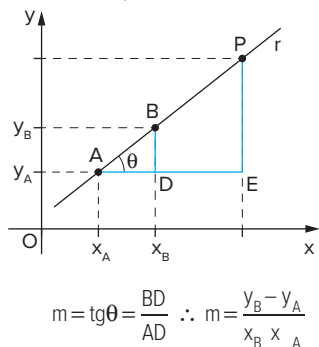
Graficamente:

Sistema Possível e Indeterminado, pois $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{-1}{-2}$.

Possui infinitas soluções.

Resumindo

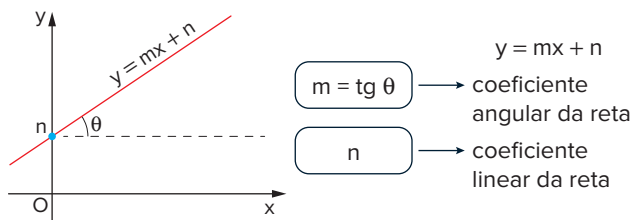
Coeficiente angular

Dados $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ pertencentes à reta *r*, não paralela ao eixo *y*, o coeficiente angular *m* é dado por:

$$m = \text{tg}\,\theta = \frac{BD}{AD} \therefore m = \frac{y_B - y_A}{x_B \ x_A}$$

Equação fundamental da reta

Se (x_0, y_0) é um ponto conhecido da reta e $P(x, y)$ é outro ponto qualquer, temos que P é um ponto da reta *r* se, e somente se:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

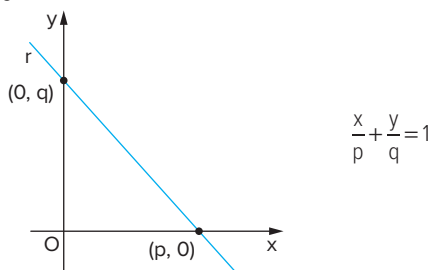
Equação reduzida da reta

Equação geral da reta

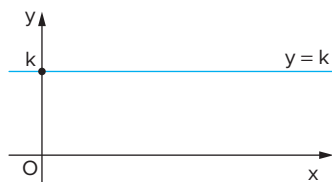
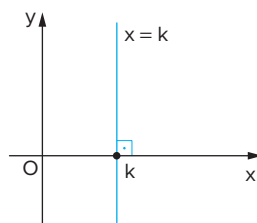
Desenvolvendo a equação fundamental, podemos deixá-la em uma forma conhecida como equação geral da reta:

$$ax + by + c = 0$$

Equação segmentária da reta

Se a reta *r* intersecta o eixo *y* no ponto (0, q), com $q \neq 0$, e o eixo *x* no ponto (p, 0), com $p \neq 0$, ela pode ser escrita em uma forma chamada de equação segmentária da reta.

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Retas paralelas aos eixos

Retas paralelas ao eixo *x* têm inclinação e coeficiente angular zero. Suas equações são da forma $y = k$, sendo *k* uma constante

Retas paralelas ao eixo *y* têm inclinação de 90° e, para elas, não está definido o coeficiente angular. Suas equações são da forma $x = k$, sendo *k* uma constante.

Posições relativas entre retas

Equações gerais: $\begin{cases} r: a_r x + b_r y + c_r = 0,\ b_r \neq 0 \\ s: a_s x + b_s y + c_s = 0,\ b_s \neq 0 \end{cases}$

Equações reduzidas: $\begin{cases} r: y = m_r x + n_r \\ s: y = m_s x + n_s \end{cases}$

Retas coincidentes

$$\frac{a_r}{a_s} = \frac{b_r}{b_s} = \frac{c_r}{c_s} \text{ ou } m_r = m_s \text{ e } n_r = n_s$$

Retas paralelas distintas

$$\frac{a_r}{a_s} = \frac{b_r}{b_s} \neq \frac{c_r}{c_s} \text{ ou } m_r = m_s \text{ e } n_r \neq n_s$$

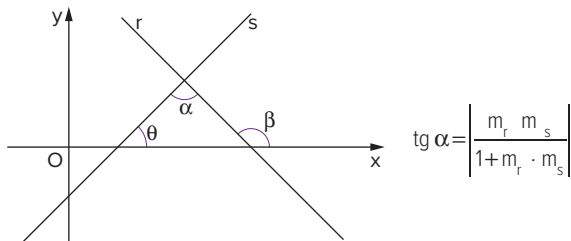
Retas concorrentes

$$\frac{a_r}{a_s} \neq \frac{b_r}{b_s} \text{ ou } m_r \neq m_s$$

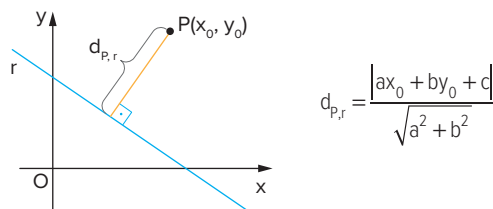
Retas perpendiculares

$$a_r \cdot a_s + b_r \cdot b_s = 0 \text{ ou } m_r \cdot m_s = -1$$

Ângulo entre retas

$$\text{tg}\,\alpha = \left|\frac{m_r \ m_s}{1 + m_r \cdot m_s}\right|$$

Distância entre ponto e reta

Dada a reta *r* de equação $ax + by + c = 0$ e o ponto $P(x_0, y_0)$, a distância de P à reta *r* é dada por:

$$d_{P,r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Bissetrizes dos ângulos entre duas retas

Sejam duas retas concorrentes $r: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Se $P(x, y)$ é um ponto genérico das bissetrizes de *r* e *s*, então, a expressão que fornece as equações das duas bissetrizes de *r* e *s* é:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Quer saber mais?

Sites

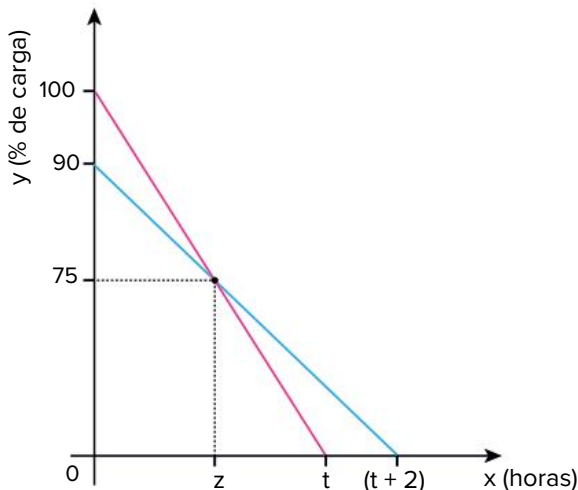
- Produto escalar de vetores
  Disponível em: <www.ufrgs br/reamat/AlgebraLinear/livro/s12 comprimento_x00e2ngulos_e_o_produto escalar html>
- Retas e vetores
  Disponível em: <http://ganuff weebly com/uploads/1/9/2/5/19255685/lgebra_vetorial_e_geometria_analitica_ _retas_e_planos.pdf>

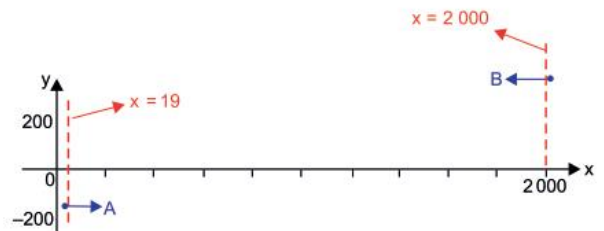
Exercícios complementares

1 **Unesp** Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, o coeficiente angular e a equação geral da reta que passa pelos pontos P e Q, sendo P(2, 1) e Q o simétrico, em relação ao eixo *y*, do ponto Q'(1, 2) são, respectivamente:

A $\frac{1}{3}$; $x - 3y - 5 = 0$
B $\frac{2}{3}$; $2x - 3y - 1 = 0$
C $\frac{1}{3}$; $x + 3y + 5 = 0$
D $\frac{1}{3}$; $x + 3y - 5 = 0$
E $-\frac{1}{3}$; $x + 3y - 5 = 0$

2 **Uerj 2015** As baterias B_1 e B_2 de dois aparelhos celulares apresentam em determinado instante, respectivamente, 100% e 90% da carga total
Considere as seguintes informações:
- as baterias descarregam linearmente ao longo do tempo;
- para descarregar por completo, B_1 leva **t** horas e B_2 leva duas horas a mais do que B_1;
- no instante **z**, as duas baterias possuem o mesmo percentual de carga igual a 75%.

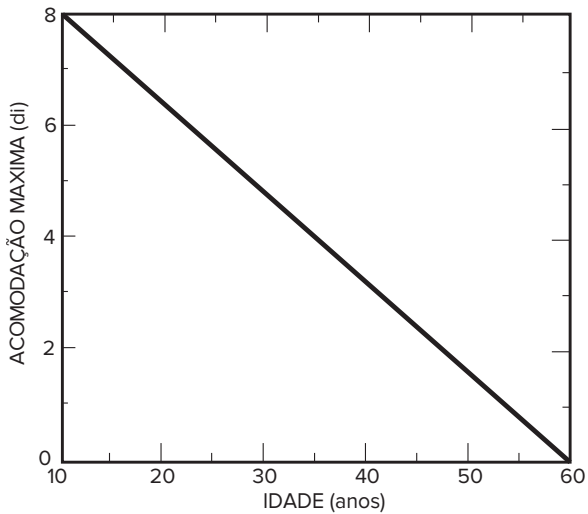
Observe o gráfico:

O valor de *t*, em horas, equivale a:
A 1 B 2 C 3 D 4

3 **Insper 2018** Um retângulo ABCD possui vértices A(17, 158), B(2017, 242) e D(19, y) Na impossibilidade de esboçar os vértices desse retângulo por meio de um desenho em escala, Joana resolveu colocar os dados disponíveis em um programa de computador, que exibiu a seguinte imagem

Como a imagem não permitiu a visualização do ponto D, Joana usou seus conhecimentos de Geometria Analítica e calculou, corretamente, a ordenada de D, igual a:

A –172
B –168
C –326
D –196
E –224

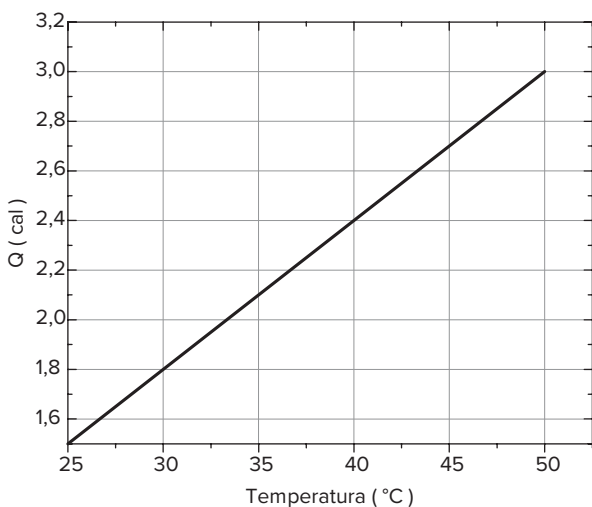
4 **Efomm 2018** A forma de uma montanha pode ser descrita pela equação $y = -x^2 + 17x - 66$ $(6 \le x \le 11)$. Considere um atirador munido de um rifle de alta precisão, localizado no ponto (2, 0) e que a trajetória do tiro é uma linha reta. A partir de que ponto, na montanha, um indefeso coelho estará 100% seguro?

A (8, 9)
B (8, 6)
C (7, 9)
D (7, 5)
E (7, 4)

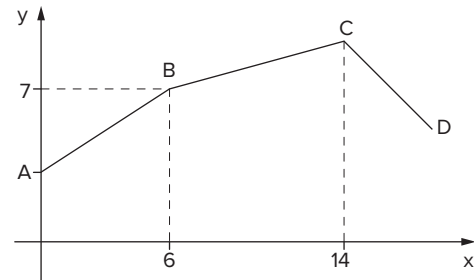
5 **Enem PPL 2012** O cristalino, que é uma lente do olho humano, tem a função de fazer ajuste fino na focalização, ao que se chama acomodação À perda da capacidade de acomodação com a idade chamamos presbiopia. A acomodação pode ser determinada por meio da convergência do cristalino Sabe-se que a convergência de uma lente, para pequena distância focal em metros, tem como unidade de medida a dioptria (di)
A presbiopia, representada por meio da relação entre convergência máxima C_{max} (em di) e a idade T (em anos), é mostrada na figura seguinte

COSTA, E. V.; FARIA LEITE, C. A. F. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 20, n. 3, set. 1998.

Considerando esse gráfico, as grandezas convergência máxima C_{max} e idade T estão relacionadas algebricamente pela expressão:

A $C_{max} = 2^{-T}$
B $C_{max} = T^2 \quad 70T + 600$
C $C_{max} = \log_2 (T^2 \quad 70T + 600)$
D $C_{max} = 0,16T + 9,6$
E $C_{max} = \quad 0,16T + 9,6$

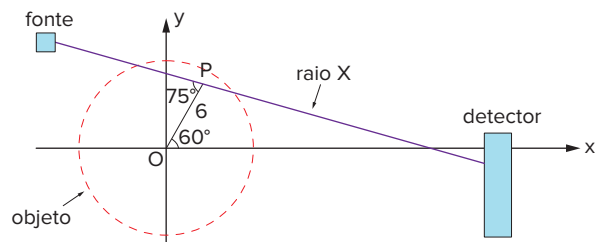
6 **UEM** Um cientista deseja determinar o calor específico de um material. Para isso, utilizando um calorímetro, ele aquece 20 miligramas desse material, mede a quantidade de calor fornecida ao material e a sua temperatura a cada instante.
Na figura a seguir, é apresentado um gráfico da quantidade de calor absorvida pelo material em função da temperatura. Analise cuidadosamente o gráfico e assinale o que for correto.

01 O coeficiente angular da reta descrita pelos dados experimentais é a capacidade térmica dos 20 miligramas desse material.
02 O valor da capacidade térmica dos 20 miligramas desse material é 0,06 cal/°C.
04 O valor do calor específico desse material é 3 cal/(g·°C).
08 No Sistema Internacional de Unidades (SI), a unidade de capacidade térmica é cal/(g·°C).
16 Esses dados experimentais do cientista descrevem uma equação matemática de segundo grau.

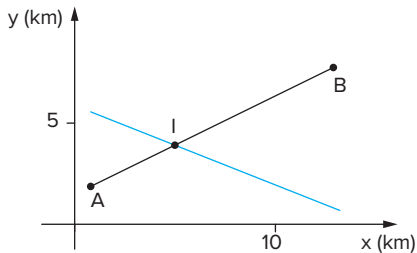
Soma:

7 **ESPM 2015** O gráfico a seguir é formado por 3 segmentos de retas consecutivos

Sabe-se que:
I. A reta que contém o segmento $\overline{AB}$ tem coeficiente linear igual a 4.
II. O coeficiente angular do segmento $\overline{BC}$ vale metade do coeficiente angular do segmento $\overline{AB}$.
III. A ordenada do ponto D é $\frac{2}{3}$ da ordenada do ponto C.
IV. O coeficiente angular do segmento $\overline{CD}$ é igual a 1.

Podemos concluir que a abscissa do ponto D vale:

A 17 **B** 19 **C** 15 **D** 18 **E** 16

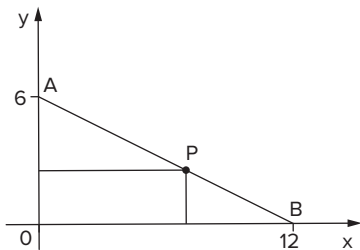
8 **Unifesp 2015** Um tomógrafo mapeia o interior de um objeto por meio da interação de feixes de raios X com as diferentes partes e constituições desse objeto. Após atravessar o objeto, a informação do que ocorreu com cada raio X é registrada em um detector, o que possibilita, posteriormente, a geração de imagens do interior do objeto.
No esquema indicado na figura, uma fonte de raios X está sendo usada para mapear o ponto P, que está no interior de um objeto circular centrado na origem O de um plano cartesiano. O raio X que passa por P se encontra também nesse plano. A distância entre P e a origem O do sistema de coordenadas é igual a 6.

a) Calcule as coordenadas (x, y) do ponto P.
b) Determine a equação reduzida da reta que contém o segmento que representa o raio X da figura.

9 **Uerj 2018** No projeto de construção de uma estrada retilínea entre duas vilas, foi escolhido um sistema referencial cartesiano em que os centros das vilas estão nos pontos A(1, 2) e B(11, 7). O trecho AB é atravessado por um rio que tem seu curso em linha reta, cuja equação, nesse sistema, é x + 3y = 17. Observe a seguir o esboço do projeto.

Desprezando as larguras da estrada e do rio, determine as coordenadas do ponto de interseção I.

10 **FGV** No plano cartesiano, são dadas as retas *r* de equação $y = -\sqrt{3}x + 7$ e *s* de equação y = x + 7. Se θ é a medida, em graus, do maior ângulo do triângulo formado pelas retas *r*, *s* e o eixo *x*, determine:

a) o valor do ângulo θ.

b) a área desse triângulo.

11 **PUC-Rio 2018** Considere os pontos A(0, 6) e B(12, 0). Tomamos um ponto P sobre o segmento de reta $\overline{AB}$. Considere o retângulo R com um vértice na origem, um vértice em P e lados sobre os eixos *x* e *y* conforme a figura a seguir.

a) Encontre a equação da reta *r* que passa pelos pontos A e B.

b) Sejam (x, y) as coordenadas do ponto P. Escreva, em função apenas de *x*, uma fórmula para a área do retângulo R.

c) Qual é a maior área possível para o retângulo R?

12 **UFU 2016** Considere o feixe de retas concorrentes no ponto P(8, 3). Seja *r* a reta desse feixe que determina junto com os eixos cartesianos um triângulo retângulo (ângulo reto na origem) contido no quarto quadrante e área igual a 6 unidades de área

Na equação geral ax + by + c = 0 da reta *r*, a soma dos inteiros a + b + c é múltiplo de:

A 7

B 13

C 11

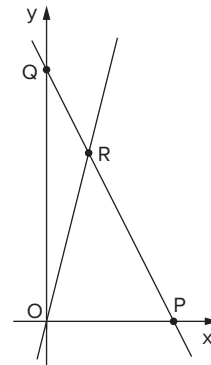
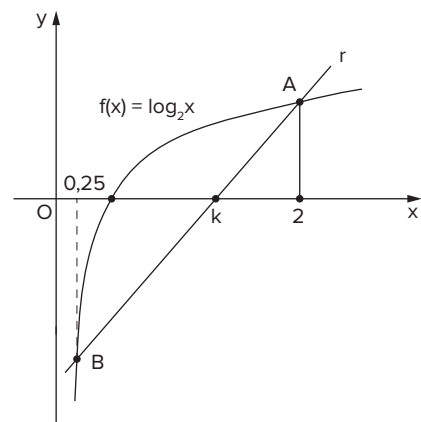
D 5

13 **ITA 2012** A área do quadrilátero definido pelos eixos coordenados e as retas r: x − 3y + 3 = 0 e s: 3x + y − 21 = 0, em unidades de área, é igual a:

A $\frac{19}{2}$ B 10 C $\frac{25}{2}$ D $\frac{27}{2}$ E $\frac{29}{2}$

14 **Unicamp** As retas de equações y = ax + b e y = cx são ilustradas na figura a seguir. Sabendo que o coeficiente *b* é igual à média aritmética dos coeficientes *a* e *c*,

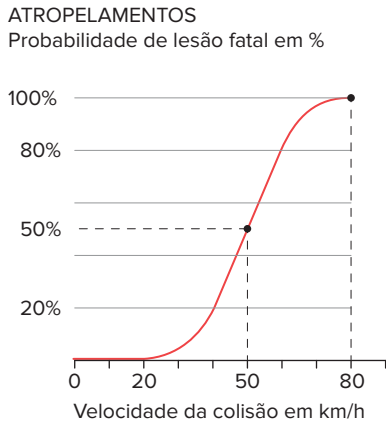
a) expresse as coordenadas dos pontos P, Q e R em termos dos coeficientes *a* e *b*;

b) determine *a*, *b* e *c* sabendo que a área do triângulo OPR é o dobro da área do triângulo ORQ e que o triângulo OPQ tem área 1.

15 **UFPR 2016** Considere o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$ e a reta *r* que passa pelos pontos A e B, como indicado na figura a seguir, sendo *k* a abscissa do ponto em que a reta *r* intersecta o eixo Ox Qual é o valor de *k*?

A $\frac{17}{12}$ B $\frac{14}{11}$ C $\frac{12}{7}$ D $\frac{11}{9}$ E $\frac{7}{4}$

16 **FGV-RJ 2017** Considere a reta de equação 4x − 7y + 10 = 0. Seja y = mx + h a equação da reta obtida ao se fazer a reflexão da reta dada em relação ao eixo *x*.

O valor de m + h é:

A $\frac{10}{11}$ B $\frac{10}{7}$ C 2 D 7 E 10

17 PUC-SP 2017 O jornal *Folha de S.Paulo* publicou em 11 de outubro de 2016 a seguinte informação:

Fonte: Prefeitura de São Paulo e CET. (Adapt.).

De acordo com as informações apresentadas, suponha que para uma velocidade de 35 km/h a probabilidade de lesão fatal seja de 5% e que para velocidades no intervalo [35, 55] o gráfico obedeça a uma função do 1º grau. Nessas condições, se um motorista dirigindo a 55 km/h, quiser reduzir a probabilidade de lesão fatal por atropelamento à metade, ele terá que reduzir a sua velocidade em, aproximadamente:

A 20% B 25% C 30% D 35%

18 UFRGS 2017 As retas de equações $y = ax$ e $y = -x + b$ interceptam-se em um único ponto cujas coordenadas são estritamente negativas. Então, pode-se afirmar que

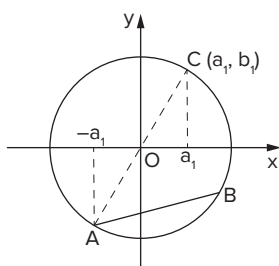
A $a > 0$ e $b > 0$.
B $a < 0$ e $b < 0$.
C $a < -1$ e $b > 0$.
D $a > 0$ e $b < 0$.
E $a < -1$ e $b < 0$.

19 Unifesp 2011 Considere a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 números reais estritamente positivos, tais que os pontos (a_1, b_1), (a_2, b_2) e (a_3, b_3) pertençam à reta $y = 2x$.

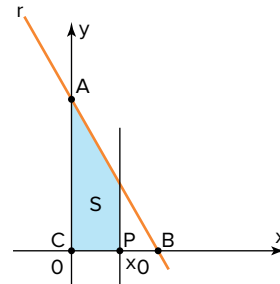
a) Sabendo-se que

$$Q(x) = \frac{a_1x^2 + a_2x + a_3}{b_1x^2 + b_2x + b_3} \quad \left(\text{com } b_1x^2 + b_2x + b_3 \neq 0\right)$$

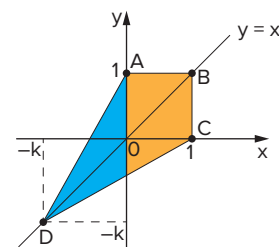
independe de *x*, pede-se determinar seu valor.

b) Na figura, se os pontos A, B e C são vértices de um triângulo isósceles e o segmento $\overline{AC}$ é um dos diâmetros da circunferência convenientemente centrada na origem do sistema ortogonal, pede-se determinar a medida do segmento $\overline{AB}$ em função de a_1.

20 AFA 2011 Um quadrado de 9 cm² de área tem vértices consecutivos sobre a bissetriz dos quadrantes pares do plano cartesiano.
Se os demais vértices estão sobre a reta *r*, que não possui pontos do 3º quadrante, é **incorreto** afirmar que a reta *r*

A pode ser escrita na forma segmentária.
B possui o ponto $P\left(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$.
C tem coeficiente linear igual a $3\sqrt{2}$.
D é perpendicular à reta de equação $2x - 2y = 0$.

21 Uerj 2017 Considere o gráfico a seguir, em que a área S é limitada pelos eixos coordenados, pela reta *r*, que passa por A(0, 4) e B(2, 0), e pela reta perpendicular ao eixo *x* no ponto $P(x_0, 0)$, sendo $0 \leq x_0 \leq 2$.

Para que a área S seja a metade da área do triângulo de vértices C(0, 0), A e B, o valor de x_0 deve ser igual a:

A $2 \quad \sqrt{2}$
B $3 - \sqrt{2}$
C $4 - \sqrt{2}$
D $5 - \sqrt{2}$

22 FGV 2017 Os pontos A(0, 1), B(1, 1), C(1, 0) e D(–k, –k), com $k > 0$, formam o quadrilátero convexo ABCD, com eixo de simetria sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares.

O valor de *k* para que o quadrilátero ABCD seja dividido em dois polígonos de mesma área pelo eixo *y* é igual a:

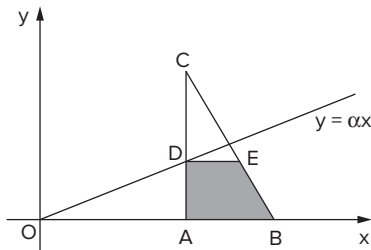
A $\dfrac{2 + \sqrt{5}}{4}$

B $\dfrac{3 + \sqrt{2}}{4}$

C $\dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}$

D $\dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$

E $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

23 **Fuvest 2018** No plano cartesiano real, considere o triângulo ABC, em que A(5, 0), B(8, 0), C(5, 5), e a reta de equação $y = \alpha x$, $0 < \alpha < 1$ Seja $f(\alpha)$ a área do trapézio ABED, em que D é a interseção da reta $y = \alpha x$ com a reta de equação $x = 5$, e o segmento $\overline{DE}$ é paralelo ao eixo Ox.

a) Encontre o comprimento do segmento $\overline{DE}$ em fun ção de α.
b) Expresse $f(\alpha)$ e esboce o gráfico da função *f*.

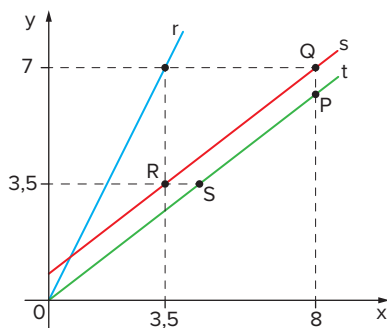
24 **ITA 2016** Se a reta de equação $x = a$ divide o quadrilátero cujos vértices são (0, 1), (2, 0), (4, 0) e (6, 4) em duas regiões de mesma área, então o valor de **a** é igual a:

A $2\sqrt{5}$ 1
B $2\sqrt{6}$ 1
C $3\sqrt{5}$ 4
D $2\sqrt{7}$ 2
E $3\sqrt{7}$ 5

25 **ITA 2018** No plano cartesiano são dados o ponto P(0, 3) e o triângulo de vértices A(0, 0), B(3, 0) e C(3, 2). Determine um ponto N sobre o eixo dos *x* de modo que a reta que passa por P e N divida o triângulo ABC em duas regiões de mesma área.

26 **IME 2017** Sejam os pontos A(0, 0), B(–1, 1), C(1, 2), D(4, 1) e $E\left(3, \frac{1}{2}\right)$. A reta *r* passa por A e corta o lado $\overline{CD}$, dividindo o pentágono ABCDE em dois polígonos de mesma área. Determine a soma das coordenadas do ponto de interseção da reta *r* com a reta que liga C e D.

A $\frac{25}{7}$
B $\frac{51}{14}$
C $\frac{26}{7}$
D $\frac{53}{14}$
E $\frac{27}{7}$

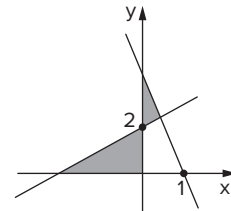
27 **Unifesp 2016** Na figura, as retas *r*, *s* e *t* estão em um mesmo plano cartesiano. Sabe-se que *r* e *t* passam pela origem desse sistema, e que PQRS é um trapézio.

a) Determine as coordenadas do ponto de interseção entre as retas *r* e *s*.
b) Prove que os lados não paralelos do trapézio PQRS não possuem a mesma medida, ou seja, que o tra pézio PQRS não é isósceles.

28 **IFMG 2017** Sejam as funções reais $p(x) = 3x - 4$, $q(x) = -\frac{x}{2} + 4$, $r(x) = 3x - 10$ e $s(x) = 1$. Considerando todas as interseções entre essas retas, o único quadrilátero que pode ser desenhado, utilizando quatro dessas interseções como vértices, é um

A losango.
B trapézio.
C quadrado.
D retângulo.

29 **UPE 2017** Qual é a medida da área do quadrilátero limitado pelas retas (r) $y = 4$; (s) $3x - y - 2 = 0$; (t) $y = 1$ e (u) $3x + 2y - 20 = 0$?

A 7,5
B 9,0
C 10,5
D 11
E 12

30 **UEMG 2017** No gráfico, representado a seguir, uma das retas esboçadas tem inclinação igual a –3 e a outra reta, inclinação igual a $\frac{1}{2}$. Sabendo-se disso, a área (em unidade de área) da região hachurada é:

A 6 u.a.
B $\frac{21}{5}$ u.a.
C $\frac{29}{7}$ u.a.
D $\frac{33}{7}$ u.a.

31 **Unicamp** Os pontos A, B, C e D pertencem ao gráfico da função $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$. As abscissas de A, B e C são iguais a 2, 3 e 4, respectivamente, e o segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao segmento $\overline{CD}$.

a) Encontre as coordenadas do ponto D.
b) Mostre que a reta que passa pelos pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ passa também pela origem.

32 **PUC-Rio 2016** Sejam $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as funções definidas por $f(x) = |3x - 1|$ e $g(x) = 1 - 3x$.

a) Esboce os gráficos de *f* e *g* no mesmo sistema de coordenadas cartesianas.
b) Para quais valores de *x*, temos $f(x) - g(x) \leq 28$? Justifique sua resposta.
c) Determine a área do triângulo ABC, onde A(0, f(0)), B(3, g(3)) e C(3, f(3)), justificando sua resposta.

33 **Col. Naval 2015** As retas r_1: $2x - y + 1 = 0$, r_2: $x + y + 3 = 0$ e r_3: $\alpha x + y - 5 = 0$ concorrem em um mesmo ponto P para determinado valor de $\alpha \in \mathbb{R}$. Sendo assim, pode-se afirmar que o valor da expressão $\cos\left(\frac{\alpha\pi}{3}\right) - 3\text{sen}^3\left[\frac{(-3-\alpha)\pi}{8}\right] - \frac{5\sqrt{3}}{2}\,\text{tg}\left(\frac{-\alpha\pi}{6}\right)$ é:

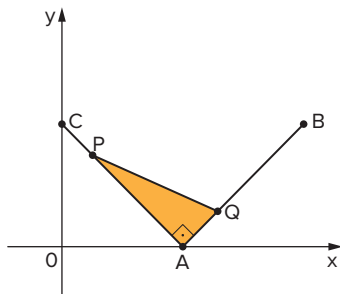
A $3\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

B $2-\frac{3\sqrt{2}}{4}$

C $2+\frac{\sqrt{2}}{8}$

D $3+\frac{\sqrt{2}}{4}$

E $3\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

34 **Uerj 2014**

No gráfico apresentado, estão indicados os pontos A(1, 0), B(2, 1) e C(0, 1), que são fixos, e os pontos P e Q, que se movem simultaneamente. O ponto P se desloca no segmento de reta de C até A, enquanto o ponto Q se desloca no segmento de A até B. Nesses deslocamentos, a cada instante, a abscissa de P é igual à ordenada de Q.
Determine a medida da maior área que o triângulo PAQ pode assumir.

35 **Unicamp 2014** Considere no plano cartesiano os pontos A(–1, 1) e B(2, 2)

a) Encontre a equação que representa o lugar geométrico dos centros dos círculos que passam pelos pontos A e B
b) Seja C um ponto na parte negativa do eixo das ordenadas Determine C de modo que o triângulo ABC tenha área igual a 8

36 **Fuvest** A hipotenusa de um triângulo retângulo está contida na reta r: $y = 5x - 13$, e um de seus catetos está contido na reta s: $y = x - 1$. Se o vértice onde está o ângulo reto é um ponto da forma (k, 5) sobre a reta *s*, determine

a) todos os vértices do triângulo;
b) a área do triângulo.

37 **FGV-SP 2018** Sejam *m* e *n* números reais e $\begin{cases} 3x + my = n \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ um sistema de equações nas incógnitas *x* e *y*. A respeito da representação geométrica desse sistema no plano cartesiano, é correto afirmar que, necessariamente, é formada por duas retas

A paralelas distintas, se $m = 6$ e $n \neq 3$.
B paralelas coincidentes, se $m = 6$ e $n \neq 3$.
C paralelas distintas, se $m = 6$.
D paralelas coincidentes, se $n = 3$.
E concorrentes, se $m \neq 0$.

38 **AFA 2018** Considere no plano cartesiano as retas *r* e *s* dadas pelas equações:

$$\begin{array}{l} r: 3x + 3py + p = 0 \\ s: px + 9y - 3 = 0 \end{array}, \text{ onde } p \in \mathbb{R}$$

Baseado nessas informações, marque a alternativa **incorreta**.

A *r* e *s* são retas concorrentes se $|p| \neq 3$.
B Existe um valor de *p* para o qual *r* é equação do eixo das ordenadas e *s* é perpendicular a *r*.
C *r* e *s* são paralelas distintas para dois valores reais de *p*.
D *r* e *s* são retas coincidentes para algum valor de *p*.

39 **ITA 2017** Considere as retas de equações r: $y = \sqrt{2}x + a$ e s: y bx c , em que *a*, *b* e *c* são reais Sabendo que *r* e *s* são perpendiculares entre si, com *r* passando por (0, 1) e *s*, por $(\sqrt{2}, 4)$, determine a área do triângulo formado pelas retas *r*, *s* e o eixo *x*

40 **FGV-RJ 2017** No plano cartesiano são dados os pontos A(3, 1) e B(4, 5). A reta *r* de equação kx   y + 2 = 0 é variável, pois sua posição depende do coeficiente real *k*.

a) Determine para que valores de *k* os pontos A e B ficam de um mesmo lado da reta *r*.
b) Determine para que valor de *k* os pontos A e B ficam equidistantes da reta *r*.

41 **Efomm 2018** A projeção ortogonal de A sobre a reta $\overleftrightarrow{BC}$, sabendo-se que A(3, 7), B(1, 1) e C(9, 6), terá as coordenadas da projeção:

A $x = \frac{468}{85}; y = \frac{321}{89}$

B $x = \frac{478}{87}; y = \frac{319}{87}$

C $x = \frac{487}{84}; y = \frac{321}{87}$

D $x = \frac{457}{89}; y = \frac{319}{89}$

E $x = \frac{472}{89}; y = \frac{295}{89}$

42 **UEMG 2018** Com o sistema de coordenadas da Geometria Analítica, é possível obter a interpretação algébrica de problemas geométricos. Por exemplo, sabendo-se que as retas *r* e *s* são perpendiculares, conhecendo a equação da reta *r* dada por x + y   1 = 0 e sabendo que o ponto P(3, 2) pertence à reta *s*, é possível encontrar o ponto Q, simétrico de P em relação à reta *r* Nesse caso, o ponto Q é dado por:

A (1, 3)   B (1, 3)   C (1, 4)   D (1, 4)

43 **UFTM 2012** Seja A o conjunto dos pontos (x, y) do plano cartesiano ortogonal em que *x* e *y* podem assumir quaisquer valores do conjunto { 1, 0, 1}, incluindo valores iguais.

a) Calcule o total de retas distintas que passam por pelo menos dois pontos de A.
b) Dentre todas as retas distintas que passam por pelo menos dois pontos de A, calcule a porcentagem daquelas que são perpendiculares à reta de equação 2x + 2y   5 = 0.

44 **ITA 2015** Dados o ponto $A\left(4, \frac{25}{6}\right)$ e a reta $r: 3x + 4y - 12 = 0$, considere o triângulo de vértices ABC, cuja base $\overline{BC}$ está contida em *r* e a medida dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é igual a $\frac{25}{6}$. Então, a área e o perímetro desse triângulo são, respectivamente, iguais a:

A $\frac{22}{3}$ e $\frac{40}{3}$.
B $\frac{23}{3}$ e $\frac{40}{3}$.
C $\frac{25}{3}$ e $\frac{31}{3}$.
D $\frac{25}{3}$ e $\frac{35}{3}$.
E $\frac{25}{3}$ e $\frac{40}{3}$.

45 **ITA 2017** Considere a reta $r: y = 2x$. Seja $A(3, 3)$ o vértice de um quadrado ABCD, cuja diagonal $\overline{BD}$ está contida em *r*. A área deste quadrado é:

A $\frac{9}{5}$
B $\frac{12}{5}$
C $\frac{18}{5}$
D $\frac{21}{5}$
E $\frac{24}{5}$

46 **EsPCEx 2017** Considere a reta *t* mediatriz do segmento cujos extremos são os pontos em que a reta intercepta os eixos coordenados. Então, a distância do ponto $M(1, 1)$ à reta *t* é:

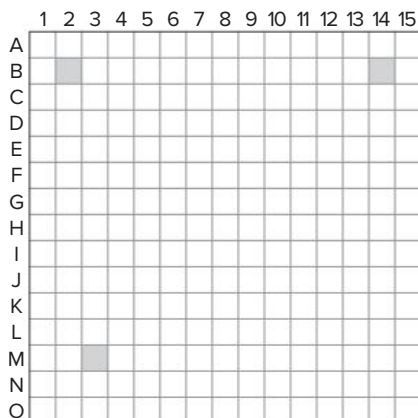
A $\frac{13\sqrt{3}}{11}$
B $\frac{10\sqrt{13}}{13}$
C $\frac{13\sqrt{11}}{13}$
D $\frac{3\sqrt{11}}{13}$
E $\frac{3\sqrt{3}}{11}$

47 **ITA 2015** Considere os pontos $A(0, -1)$, $B(0, 5)$ e a reta $r: 2x - 3y + 6 = 0$. Das afirmações a seguir:

I. $d(A, r) = d(B, r)$
II. B é simétrico de A em relação à reta *r*.
III. $\overline{AB}$ é base de um triângulo equilátero ABC de vértice $C\left(-3\sqrt{3}, 2\right)$ ou $C\left(3\sqrt{3}, 2\right)$.

É (são) verdadeira(s) apenas

A I.
B II.
C I e II.
D I e III.
E II e III.

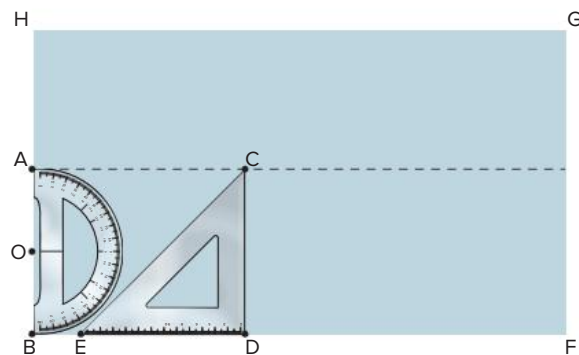
48 **Insper 2014** A figura mostra um tabuleiro de um jogo Batalha Naval, em que André representou três navios nas posições dadas pelas coordenadas B2, B14 e M3. Cada navio está identificado por um quadrado sombreado.

André deseja instalar uma base em um quadrado do tabuleiro cujo centro fique equidistante dos centros dos três quadrados onde foram posicionados os navios. Para isso, a base deverá estar localizada no quadrado de coordenadas:

A G8
B G9
C H8
D H9
E H10

49 **UFSCar** Admita os pontos $A(2, 2)$ e $B(\ 3, 4)$ como sendo vértices opostos de um losango ACBD.

a) Determine a equação geral de cada uma das retas suportes das diagonais do losango ACBD.
b) Calcule o comprimento do lado do losango ACBD, admitindo-se que um de seus vértices esteja no eixo das abscissas

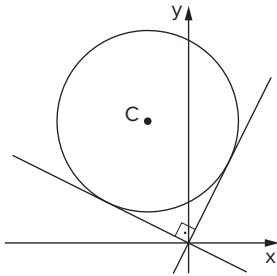
50 **Uerj 2012** A figura a seguir representa a superfície plana de uma mesa retangular BFGH na qual estão apoiados os seguintes instrumentos para desenho geométrico, ambos de espessuras desprezíveis

– um transferidor com a forma de um semicírculo de centro O e diâmetro $\overline{AB}$;
– um esquadro CDE, com a forma de um triângulo retângulo isósceles.

Considere as informações a seguir:
$\overline{ED}$ está contido em $\overline{BF}$;
$\overline{OA}$ está contido em $\overline{BH}$;
$AB = 10$ cm;
$BD = 13$ cm.
Calcule a medida, em centímetros, do menor segmento que liga a borda do transferidor à borda do esquadro.

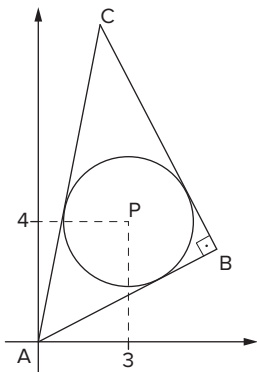
51 **IME 2016** O lugar geométrico dos pontos em $\mathbb{R}^2$ equidistantes às retas de equações $4x + 3y \quad 2 = 0$ e $12x \quad 16y + 5 = 0$ é:

A $4x + 28y + 13 = 0$
B $8x - 7y - 13 = 0$
C $28x - 4y - 3 = 0$
D $56x^2 + 388y - 184x - 56y^2 - 16y + 19 = 0$
E $112x^2 + 768xy - 376x - 112y^2 - 32y + 39 = 0$

52 ITA 2015 Sabe-se que a equação $3x^2 + 5xy - 2y^2 - 3x + 8y - 6 = 0$ representa a reunião de duas retas concorrentes, *r* e *s*, formando um ângulo agudo θ. Determine a tangente de θ.

53 Unicamp 2012 Um círculo de raio 2 foi apoiado sobre as retas $y = 2x$ e $y = -\frac{x}{2}$, conforme mostra a figura a seguir.

a) Determine as coordenadas do ponto de tangência entre o círculo e a reta $y = -\frac{x}{2}$.

b) Determine a equação da reta que passa pela origem e pelo ponto C, centro do círculo.

54 Fuvest Na figura a seguir, os pontos A, B e C são vértices de um triângulo retângulo, sendo B o ângulo reto. Sabendo-se que A(0, 0), B pertence à reta $x - 2y = 0$ e P(3, 4) é o centro da circunferência inscrita no triângulo ABC, determinar as coordenadas

a) do vértice B.

b) do vértice C.

55 AFA 2013 Sejam **a** e **b** dois números reais positivos. As retas **r** e **s** se interceptam no ponto (a, b).

Se $\left(\frac{a}{2}, 0\right) \in r$ e $\left(0, \frac{b}{2}\right) \in s$, então uma equação para a reta **t**, que passa por (0, 0) e tem a tangente do ângulo agudo formado entre **r** e **s** como coeficiente angular, é:

A $3abx + (2a^2 - b^2)y = 0$

B $36bx \quad b(a^2 + b^2)y = 0$

C $3ax - a(a^2 + b^2)y = 0$

D $3abx \quad 2(a^2 + b^2)y = 0$

56 ITA 2012 Dados os pontos A(0, 0), B(2, 0) e C(1, 1), o lugar geométrico dos pontos que se encontram a uma distância d = 2 da bissetriz interna, por A, do triângulo ABC é um par de retas definidas por:

A $r_{1,2}: \sqrt{2}y - x \pm 2\sqrt{4 + \sqrt{2}} = 0$

B $r_{1,2}: \frac{\sqrt{2}}{2}y \quad x \pm 2\sqrt{10 + \sqrt{2}} = 0$

C $r_{1,2}: 2y - x \pm 2\sqrt{10 + \sqrt{2}} = 0$

D $r_{1,2}: \left(\sqrt{2} + 1\right)y - x \pm \sqrt{2 + 4\sqrt{2}} = 0$

E $r_{1,2}: \left(\sqrt{2} + 1\right)y \quad x \pm 2\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = 0$

57 PUC-SP 2011 Em um sistema cartesiano ortogonal, em que a unidade de medida nos eixos é o centímetro, considere:

- a reta *r*, traçada pelo ponto (2, 3) e paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares;
- a reta *s*, traçada pelo ponto (2, 5) e perpendicular a *r*;
- o segmento $\overline{OA}$ em que O é a origem do sistema e A é a interseção de *r* e *s*.

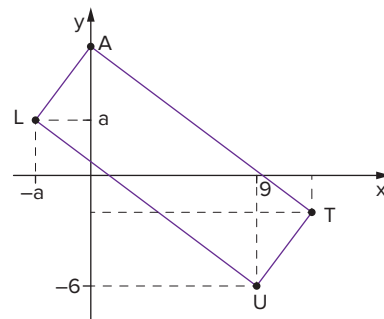
Um ponto M é tomado sobre o segmento $\overline{OA}$ de modo que OM e MA correspondam às medidas da hipotenu sa e de um dos catetos de um triângulo retângulo Δ. Se o outro cateto de Δ mede 3 cm, a área de sua superfície, em centímetros quadrados, é:

A 1,8 B 2,4 C 3,5 D 4,2 E 5,1

58 FGV 2012 Os pontos A(3, 9), B(1, 1), C(5, 3) e D são vértices de um quadrilátero ABCD, de diagonais AC e BD, no primeiro quadrante do plano cartesiano ortogonal O polígono cujos vértices são os pontos médios de AB, BC, CD e DA é um quadrado.

a) Denotando por α o ângulo agudo de lados $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$, calcule $\cos\alpha$.

b) Determine as coordenadas do vértice D.

59 Ifal 2011 Os pontos L(–a, a) com a > 0 e U(9, –6) são vértices do retângulo LUTA, sendo LU um dos seus lados, tal que LU = 3 · LA e o vértice A pertence ao eixo das ordenadas.

Podemos afirmar que:

A o vértice T(4a, 1 – a).

B a área deste retângulo vale 75 unidades de área.

C a coordenada do centro do retângulo LUTA é $\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

D o comprimento de $\overline{TA}$ vale 15 unidades.

E todas as alternativas anteriores estão corretas.

MartinM303/iStockphoto.com

FRENTE 3

CAPÍTULO

9

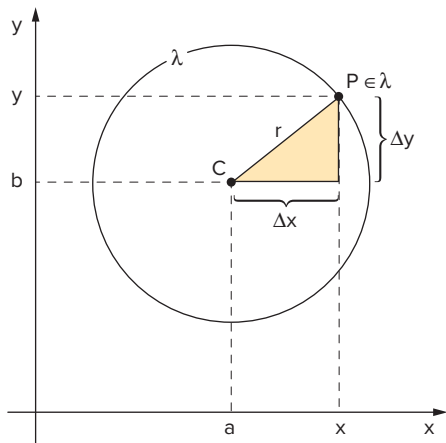
Equações da circunferência

A abóbada da Basílica de São Pedro, no Vaticano, reproduz uma circunferência, que é uma figura geométrica plana.

Neste capítulo, do ponto de vista da Geometria Analítica, estudaremos a circunferência e suas equações e propriedades.

Equação reduzida da circunferência

Como a distância de todos os pontos de uma circunferência ao centro dela são iguais à medida do seu raio *r*, podemos definir circunferência como o lugar geométrico dos pontos do plano que distam *r* de um centro dado

Na figura a seguir, vemos como usar o teorema de Pitágoras para deduzir a equação da circunferência:

Do teorema de Pitágoras, temos que:

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 = \text{raio}^2$$

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

Essa é a equação reduzida da circunferência.

De maneira um pouco mais formal, seja λ a circunferência de centro $C(x_c, y_c)$ e raio *r*. Um ponto $P(x, y)$ pertence a λ se, e somente se:

$$d_{P,C} = r \Leftrightarrow \sqrt{(x \ \ x_C)^2 \quad (y \ \ y_C)^2} \quad r \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 \quad \text{(I)}$$

A equação (I) é chamada de equação reduzida da circunferência. Nela, podemos identificar claramente o centro e o raio da circunferência.

Exercícios resolvidos

1 Encontre a equação reduzida das circunferências de centro C e raio *r* a seguir:

a) $C(2, 3)$ e $r = 4$.

b) $C(–2, 0)$ e $r = \sqrt{2}$.

Resolução:

a) $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4^2$

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$

b) $(x \ \ x_C)^2 + (y \ \ y_C)^2 = r^2$

$(x + (\ \ 2))^2 \quad (y \ \ 0)^2 \quad (\sqrt{2})^2$

$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + y^2 = 2$

2 Encontre o centro e o raio das circunferências de equações reduzidas dadas a seguir:

a) $(x \ \ 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$

b) $x^2 + y^2 = 5$

Resolução:

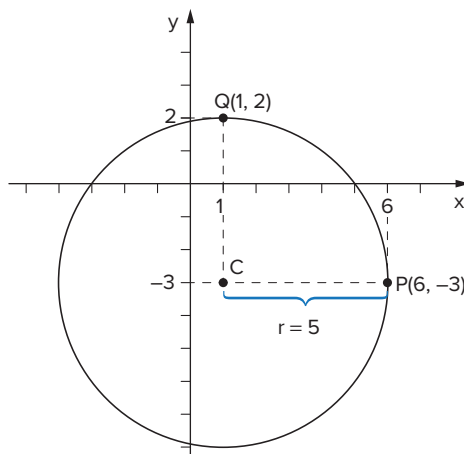
Sabendo que a equação reduzida de uma circunferência de centro $C(x_c, y_c)$ e raio *r* é $(x \ \ x_c)^2 + (y \ \ y_c)^2 = r^2$, temos:

a) $(x \ \ 4)^2 + (y + 3)^2 = 25 \Rightarrow C(4, \ \ 3)$ e $r = 5$

b) $x^2 + y^2 = 5 \Leftrightarrow (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow C(0, 0)$ e $r = \sqrt{5}$

3 Determine o centro C, o raio R, o ponto P de maior abscissa e o ponto Q de maior ordenada da circunferência de equação reduzida $(x \ \ 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

Resolução:

Na circunferência $(x \ \ 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$, temos:

Centro: $C(1, \ \ 3)$

Raio: $r = 5$.

Ponto de maior abscissa:

$$P(x_c + r, y_c) = P(1 + 5, \ \ 3) = P(6, \ \ 3)$$

Ponto de maior ordenada:

$$Q(x_c, y_c + r) = Q(1, \ \ 3 + 5) = Q(1, 2)$$

4 Encontre as interseções entre a circunferência e os eixos ordenados.

Resolução:

Interseção com o eixo *y* ($x = 0$):

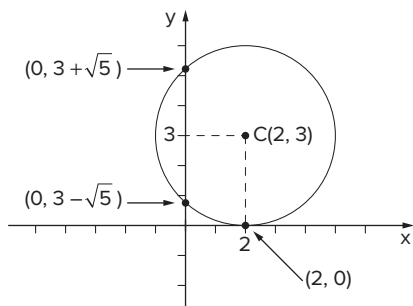
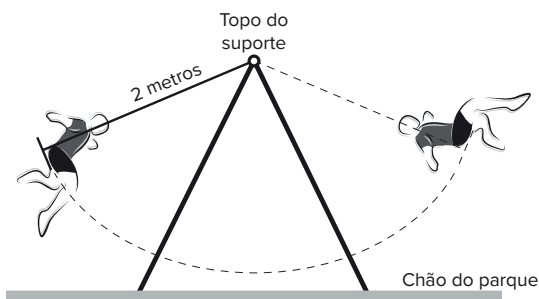
$$(0 \ \ 2)^2 + (y \ \ 3)^2 = 9 \Rightarrow (y \ \ 3)^2 = 9 \quad 4 = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 3 = \pm\sqrt{5} \quad \begin{cases} y = 3 + \sqrt{5} \\ \text{ou} \\ y = 3 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Pontos: $\left(0, 3 + \sqrt{5}\right)$ ou $\left(0, 3 \ \ \sqrt{5}\right)$

Interseção com o eixo *x* ($y = 0$):

$$(x \ \ 2)^2 + (0 \ \ 3)^2 = 9 \Rightarrow (x \ \ 2)^2 = 9 \quad 9 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Ponto: (2, 0) (circunferência tangente ao eixo *x*).
Veja a figura a seguir:

5 **Enem 2014** A figura mostra uma criança brincando em um balanço no parque. A corda que prende o assento do balanço ao topo do suporte mede 2 metros. A criança toma cuidado para não sofrer um acidente, então se balança de modo que a corda não chegue a alcançar a posição horizontal.

Na figura, considere o plano cartesiano que contém a trajetória do assento do balanço, no qual a origem está localizada no topo do suporte do balanço, o eixo X é paralelo ao chão do parque, e o eixo Y tem orientação positiva para cima.
A curva determinada pela trajetória do assento do balanço é parte do gráfico da função:

A $f(x) = \quad \sqrt{2 \quad x^2}$

B $f(x) = \sqrt{2 \quad x^2}$

C $f(x) = x^2 \quad 2$

D $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$

E $f(x) = \sqrt{4 \quad x^2}$

Resolução:

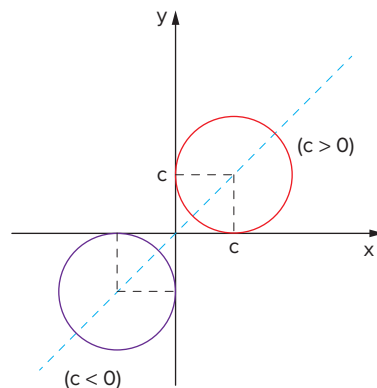
Utilizando o sistema cartesiano sugerido no texto, o balanço descreve um arco sobre a circunferência de centro (0, 0) e raio 2, com equação $x^2 + y^2 = 4$. Assim, para $y < 0$ e $-2 < x < 2$:

$$x^2 + y^2 = 2^2 \Leftrightarrow y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow y = -\sqrt{4 - x^2}$$

Alternativa: **D**.

6 Determine a equação reduzida de uma circunferência de centro em P(c, c), com $c \neq 0$, que tangencia o eixo das abscissas e o eixo das ordenadas

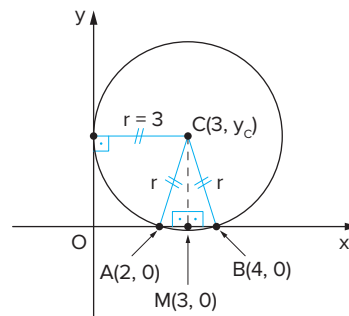
Resolução:

Conforme a figura a seguir, se $c > 0$, o centro da circunferência se encontra no primeiro quadrante e ela tem raio $r = c$. Se $c < 0$, o centro da circunferência se encontra no terceiro quadrante e ela tem raio $r = -c$.

Nos dois casos, a equação da circunferência será:

$$(x \quad c)^2 + (y \quad c)^2 = (\pm c)^2 \Leftrightarrow (x \quad c)^2 + (y \quad c)^2 = c^2$$

7 Determinar a equação reduzida da circunferência que passa pelos pontos A(2, 0) e B(4, 0) e que é tangente ao eixo *y*.

Resolução:

Na figura a seguir, temos AC = BC = r. Assim, o triângulo ABC é isósceles e o ponto médio M(3, 0) da base $\overline{AB}$ também é pé da altura. Assim, temos r = OM = 3 e AM = 1.

No triângulo AMC:

$$AM^2 + CM^2 = AC^2 \Leftrightarrow 1^2 + y_C^2 = 3^2 \Rightarrow \Rightarrow y_C = 2\sqrt{2}$$

Portanto, a equação reduzida da circunferência é:

$$(x-3)^2 + \left(y - 2\sqrt{2}\right)^2 = 9$$

Equação geral da circunferência

Veremos, agora, que toda circunferência tem equação da forma $x^2 + v^2 + Ax + Bv + C = 0$, que é chamada de equação geral da circunferência

Observe o exemplo a seguir:

Considere uma circunferência de centro (3, 2) e raio 4
Sua equação reduzida é:

$$(x \quad 3)^2 + (y \quad (\quad 2))^2 = 4^2 \Leftrightarrow (x \quad 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$$

Desenvolvendo os quadrados, temos:

$$x^2 \quad 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 16 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \quad 6x + 4y \quad 3 = 0$$

A equação tem a forma $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, com A = 6, B = 4 e C = 3

FRENTE 3

Generalizando para uma circunferência de raio *r* e centro (x_0, y_0) , temos:

$$(x \quad x_0)^2 + (y \quad y_0)^2 = r^2$$

$$x^2 \quad 2 \cdot x_0 \cdot x + x_0^2 + y^2 \quad 2 \cdot y_0 \cdot y + y_0^2 \quad r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 \quad 2x_0x \quad 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 \quad r^2 = 0$$

Como essa equação é idêntica a $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, devemos ter:

$$\begin{cases} A = -2x_0 \\ B = -2y_0 \\ C = x_0^2 + y_0^2 - r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \quad \dfrac{A}{2} \\ y_0 = -\dfrac{B}{2} \\ r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - C} \end{cases}$$

Uma condição necessária para que a equação $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ represente uma circunferência é, portanto, que:

$$x_0^2 + y_0^2 \quad C > 0 \Leftrightarrow C < x_0^2 + y_0^2 \Leftrightarrow C < \frac{A^2 + B^2}{4}$$

Assim, toda circunferência tem uma equação geral, mas, dependendo dos valores de A, B e C, uma equação geral pode representar também um único ponto ou até mesmo o conjunto vazio.

Exercícios resolvidos

8 Escreva a equação geral da circunferência de centro C e raio *r* em cada caso:

a) C(3, –2) e r = 5.

b) $C\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ e $r = \frac{1}{2}$.

Resolução:

a) $(x \quad 3)^2 + (y + 2)^2 = 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 \quad 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 \quad 25 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 \quad 6x + 4y \quad 12 = 0$

b) $\left(x \quad \frac{3}{2}\right)^2 + (y \quad 0)^2 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 \cdot 2 \cdot x + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} \quad y^2 \Rightarrow \frac{1}{4} \quad x^2 \quad y^2 \quad 3x \quad 2 \quad 0$

9 O que representa cada equação a seguir?

a) $x^2 + y^2 + 4x \quad 3y + 5 = 0$

b) $x^2 + y^2 \quad 2x \quad 4y + 5 = 0$

c) $x^2 + y^2 \quad 3x + y + 3 = 0$

Resolução:

Utilizaremos o método conhecido como completar quadrados.

a) Primeiro, reagrupamos os termos da equação, deixando espaços no primeiro e no segundo membro, conforme o esquema a seguir:

$x^2 + 4x +$ ____ $+ y^2 \quad 3y +$ ____ $= \quad 5 +$ ____ $+$ ____

Depois, somamos dois números no primeiro membro com o objetivo de completar os trinômios quadrados perfeitos. Devemos somar os mesmos números no segundo membro ' manter a igualdade:

Portanto, o centro dessa circunferência é o ponto $\left(\quad 2, \frac{3}{2}\right)$ e seu raio mede $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 \quad \underbrace{2x}_{2 \cdot 1 \cdot x} + 1^2 + y^2 \quad \underbrace{4y}_{2 \cdot 2 \cdot y} \quad 2^2 \quad 5 \quad 1^2 \Leftrightarrow 2^2$

$\Leftrightarrow (x \quad 1)^2 + (y \quad 2)^2 \quad 0$

A equação é verdadeira para um único par ordenado, que é (1, 2). Assim, essa equação representa um único ponto de coordenadas (1, 2).

c) $x^2 + y^2 \quad 3x + y + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 \quad \underbrace{3x}_{2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x} \left(\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + \underbrace{y}_{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot y} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \quad 3 \quad \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x \quad \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \quad \frac{1}{2}$

No conjunto dos reais, uma soma de quadrados não pode ser negativa. Portanto, essa equação representa o conjunto vazio.

10 Determine o maior valor inteiro de *p* para que a equação $x^2 + y^2 + 6x + 8y + p = 0$ represente uma circunferência.

Resolução:

Completando quadrados:

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = -p + 9 + 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 25 \quad p$$

Para que essa equação represente uma circunferên cia, devemos ter:

$$25 \quad p > 0 \Leftrightarrow p < 25$$

O maior valor inteiro que satisfaz essa condição é 24.

11 Determine a equação geral da circunferência que passa pelos pontos A(–2, 0), B(7, 3) e C(–1, 7).

Resolução:

Devemos encontrar uma equação da forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, satisfeita pelos pontos A, B e C. Assim:

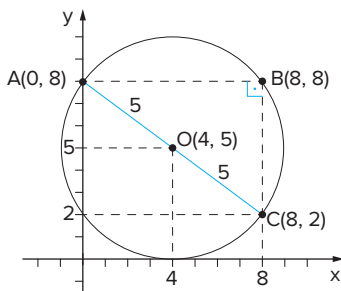
$$\begin{cases} (\quad 2)^2 \quad 0^2 \cdot a \ (\cdot \ 2) \quad b = 0 \quad c \quad 0 \\ 7^2 + 3^2 + a \cdot 7 + b \cdot 3 + c = 0 \\ (-1)^2 + 7^2 + a \cdot (-1) + b \cdot 7 + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 \quad 2a = c \quad 0 \\ 58 + 7a + 3b + c = 0 \\ 50 - a + 7b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - c = 4 \\ 7a + 3b + c = -58 \\ a - 7b - c = 50 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = -4$, $b = -6$ e $c = -12$. Portanto, a circunferência tem equação $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ ou $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$, tendo centro (2, 3) e raio 5.

12 Determine uma equação geral da circunferência que passa pelos pontos A(0, 8), B(8, 8) e C(8, 2)

Resolução:

O triângulo ABC é retângulo em B. Logo, o centro O da circunferência circunscrita coincide com o ponto médio da hipotenusa $\overline{AC}$: $O\left(\frac{0+8}{2}, \frac{8+2}{2}\right) = O(4, 5)$

O raio é dado por:

$$r = AO = \sqrt{(4 - 0)^2 + (5 - 8)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Assim, a equação da circunferência que passa por A, B e C é dada por:

$$(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 5^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 = 25 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$$

! Atenção

A circunferência λ de centro $C(x_C, y_C)$ e raio *r* tem equação reduzida dada por:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 \quad \text{(I)}$$

E equação geral dada por:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \quad \text{(II)}$$

Uma equação da forma (II) pode também representar um ponto ou o conjunto vazio

Se a circunferência for:

- tangente ao eixo das abscissas, então $r = |y_C|$
- tangente ao eixo das ordenadas, então $r = |x_C|$.

Reta e circunferência

Interseções entre reta e circunferência

Um tipo de problema bastante comum na Geometria Analítica e presente em várias situações contextualizadas consiste em encontrar os pontos de interseção entre uma reta e uma circunferência. Uma das maneiras de encontrá-los é resolver o sistema formado por equações do seguinte tipo:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \end{cases}$$

O processo de resolução desse tipo de sistema é o da substituição da relação linear na quadrática, que leva a uma equação do 2º grau na variável *x* ou na variável *y*.

Observe o exemplo a seguir:

Devemos encontrar as interseções entre a reta $r: 2x - y + 4 = 0$ e a circunferência $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 20 = 0$.

Isolando o *y* na equação da reta, temos:

$$y = 2x + 4 \quad \text{(I)}$$

Substituindo na equação da circunferência, temos:

$$x^2 + (2x + 4)^2 - 8x - 6(2x + 4) - 20 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 4x^2 + 16x + 16 - 8x - 12x - 24 - 20 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5x^2 - 4x - 28 = 0 \quad \text{(II)}$$

Resolvendo a equação (II):

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-28) = 16 + 560 = 576$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{576}}{2 \cdot 5} = \frac{4 \pm 24}{10} \quad \begin{array}{l} \nearrow x = \frac{14}{5} \\ \quad \text{ou} \\ \searrow x = -2 \end{array}$$

Substituindo na equação da reta:

$$\begin{cases} x = \frac{14}{5} \Rightarrow y = 2 \cdot \frac{14}{5} + 4 = \frac{28}{5} + 4 = \frac{48}{5} \\ x = -2 \Rightarrow y = 2 \cdot (-2) + 4 = 0 \end{cases}$$

Logo, os pontos de interseção são $\left(\frac{14}{5}, \frac{48}{5}\right)$ e (−2, 0)

Distância do centro da circunferência a uma reta

Para calcular a distância de uma reta de equação $r: ax + by + c = 0$ ao centro $C(x_c, y_c)$ de uma circunferência, devemos utilizar a fórmula da distância de ponto à reta que vimos no capítulo anterior:

$$d_{C,r} = \frac{|ax_C + by_C + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

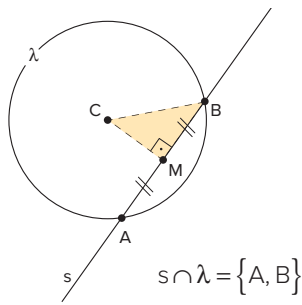
Posições relativas entre reta e circunferência

Podemos analisar a posição relativa entre uma reta e uma circunferência utilizando duas abordagens: pelo número de pontos de interseção entre a reta e a circunferência ou pela distância entre o centro da circunferência e a reta.

A distância entre o centro da circunferência e a reta pode ser calculada pela fórmula da distância entre ponto e reta, como já citado.

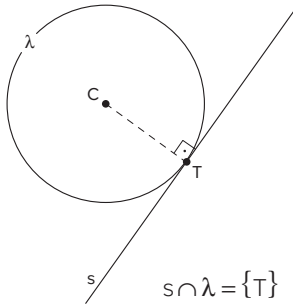
O número de interseções é obtido a partir da resolução do sistema formado pela equação da reta e da circunferência. Como visto anteriormente, resolver esse sistema leva a uma equação do 2º grau, que, dependendo do valor do seu discriminante (Δ), pode ter duas, uma ou nenhuma solução.

São três as posições relativas entre uma circunferência de centro $C(x_C, y_C)$ e raio R e a reta de equação $ax + by + c = 0$:

1. **Secantes**

O número de interseções é 2, portanto, $\Delta > 0$.

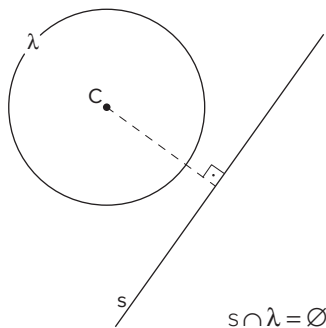
A distância entre o centro da circunferência e a reta é menor que a medida do raio:

$$d_{C,\,s} < R \iff \frac{|ax_C + by_C + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} < R$$

2. **Tangentes**

O número de interseções é 1, portanto, $\Delta = 0$.

A distância entre o centro da circunferência e a reta é igual à medida do raio:

$$d_{C,\,s} = R \iff \frac{|ax_C + by_C + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = R$$

3. **Externa**

O número de interseções é zero, portanto, $\Delta < 0$.

A distância entre o centro da circunferência e a reta é maior do que a medida do raio:

$$d_{C,\,s} > R \iff \frac{|ax_C + by_C + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} > R$$

Exercícios resolvidos

13 Determine a posição relativa entre a circunferência $(x + 2)^2 + (y \quad 1)^2 = 25$ e as retas:

a) s: $4x + 3y \quad 16 = 0$

b) t: $4x + 3y \quad 20 = 0$

c) u: $4x + y \quad 24 = 0$

Resolução:

O centro e o raio da circunferência são, respectivamente, iguais a C(2, 1) e R = 5. Assim:

a) $d_{C,\,s} = \frac{|4\cdot(\ 2)\ \cdot 3\ 1\ \ 16|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|-8+3-16|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|-21|}{\sqrt{25}} = \frac{21}{5} < 5,$

logo, *s* é secante à circunferência.

b) $d_{C,\,t} = \frac{|4\cdot(\ 2)\ \cdot 3\ 1\ \ 20|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|-8+3-20|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|-25|}{\sqrt{25}} = \frac{25}{5} = 5,$

logo, *t* é tangente à circunferência.

c) $d_{C,\,u} = \frac{|4\cdot(\ 2)\ \cdot 3\ 1\ \ 24|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|\ 8\ \ 3\ \ 24|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|\ 29|}{\sqrt{25}} = \frac{29}{5} > 5,$

logo, *u* é exterior à circunferência.

14 Determine a equação da reta tangente à λ: $x^2 + y^2 = 25$ no ponto P(3, 4).

Resolução:

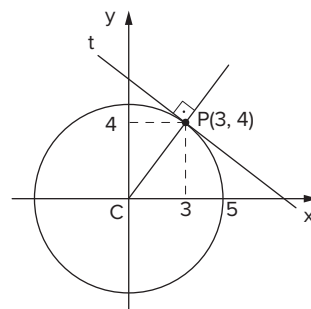
O centro da circunferência é C(0, 0). O ponto P pertence a λ, pois $3^2 + 4^2 = 25$.

Portanto, a reta *t* é perpendicular a $\overline{CP}$ no ponto P. Assim:

$$m_{CP} = \frac{y_P \quad y_C}{x_P - x_C} = \frac{4 \quad 0}{3 - 0} = \frac{4}{3}$$

$$m_t \cdot m_{CP} = \ 1 \iff m_t \cdot \frac{4}{3} = \ \ \iff m_t = \ \ \frac{3}{4}$$

$$y \quad 4 = \ \ \frac{3}{4}(x \quad 3) \Rightarrow \ 4y \quad 16 \quad 3x + 9 \Rightarrow$$

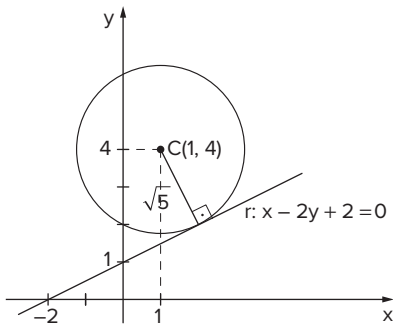
$$\Rightarrow t\!: 3x + 4y - 25 = 0$$

15 Escreva a equação geral da circunferência de centro C(1, 4) tangente à reta r: $x \quad 2y + 2 = 0$.

Resolução:

Como *r* é tangente à circunferência, o raio é dado por:

$$R = d_{C,\,r} \iff R = \frac{|1 - 2\cdot 4 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|1-8+2|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

A equação da circunferência é dada por:

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 - 5 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 8y + 12 = 0$$

16 Determine as equações das retas que passam pela origem e são tangentes à circunferência de equação geral $x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0$.

Resolução:

Temos: $x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x + 6^2 + y^2 = -32 + 6^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 6)^2 + (y - 0)^2 = 4$

A circunferência tem centro C(6, 0) e raio R = 2.

Uma reta *r* que passa pela origem tem equação na forma $y = mx$ ou $mx - y = 0$

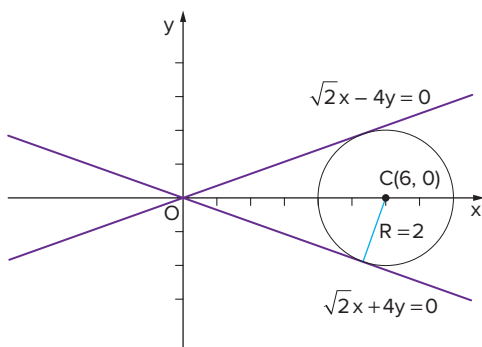
Aplicando a condição de tangência:

$$d_{C,\,r} = R \Leftrightarrow \frac{|m \cdot 6 - 0|}{\sqrt{m^2 + 1^2}} = 2 \Leftrightarrow |6m| = 2\sqrt{m^2 + 1}$$

Elevando os dois lados da igualdade ao quadrado, temos:

$$36m^2 = 4(m^2 + 1) \Leftrightarrow 36m^2 = 4m^2 + 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 32m^2 = 4 \Rightarrow m^2 = \frac{2}{16} \Rightarrow m = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Assim, as equações das retas são:

$$y = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}x \Leftrightarrow 4y = \pm\sqrt{2}x \; \begin{cases} \sqrt{2}x - 4y = 0 \\ \sqrt{2}x + 4y = 0 \end{cases}$$

17 Determine as equações gerais das retas que passam por P(0, 4) e são tangentes à circunferência λ de equação $(x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

Resolução:

A circunferência tem centro C(6, 1) e raio R = 3.

As retas que passam por P(0, 4) têm equação da forma: $y - 4 = m(x - 0) \Leftrightarrow mx - y + 4 = 0$.

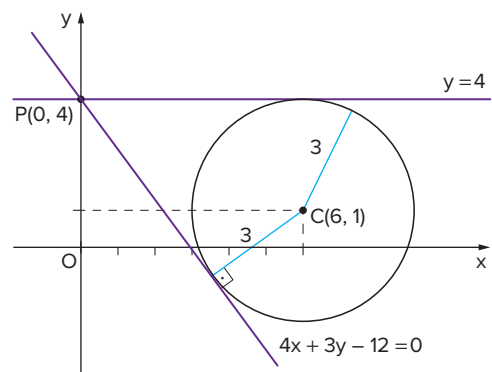
Aplicando a condição de tangência:

$$d_{C,\,r} = R \Leftrightarrow \frac{|m \cdot 6 - 1 + 4|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{|6m + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3 \Leftrightarrow |6m + 3| = 3\sqrt{m^2 + 1}$$

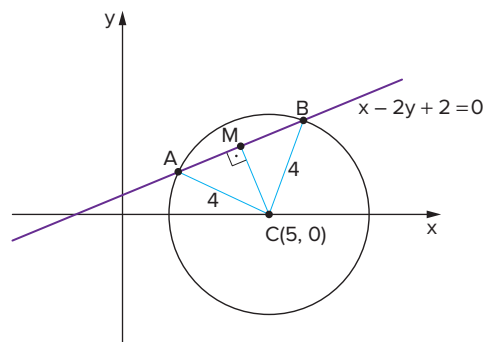
Elevando ao quadrado:

$$36m^2 + 36m + 9 = 9m^2 + 9 \Leftrightarrow 27m^2 + 36m = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9m(3m + 4) = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ ou } m = -\frac{4}{3}$$

As equações das retas são dadas por:

$$\begin{cases} r_1:\ y - 4 = 0(x - 0) \Leftrightarrow y = 4 \\ r_2:\ y - 4 = -\frac{4}{3}(x - 0) \Leftrightarrow 4x + 3y - 12 = 0 \end{cases}$$

18 Determine a medida da corda que a reta $x - 2y + 2 = 0$ determina na circunferência λ: $(x - 5)^2 + y^2 = 16$.

Resolução:

λ: $(x - 5)^2 + y^2 = 16$ é uma circunferência de centro C(5, 0) e raio R = 4.

Sejam A e B os pontos de interseção que a reta r: $x - 2y + 2 = 0$ determina na circunferência.

Como AC = BC = R, o triângulo ABC é isósceles e sua altura $\overline{AM}$ divide a base $\overline{AB}$ ao meio. Além disso:

$$CM = d_{C,r} = \frac{|5 - 2\cdot 0 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

No triângulo AMC, temos:

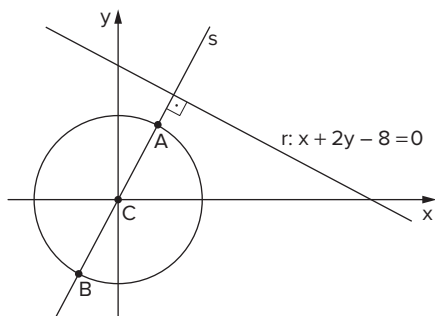
$$AM^2 + CM^2 = AC^2 \Rightarrow AM^2 + \left(\frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2 = 4^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AM^2 = 16 - \frac{49}{5} = \frac{31}{5} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{31}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{155}}{5}$$

Logo: $AB = 2 \cdot AM = \dfrac{2\sqrt{155}}{5}$

19 Dadas a circunferência λ: $x^2 + y^2 = 5$ e a reta r: $x + 2y \quad 8 = 0$, encontre os pontos da circunferência de maior e menor aproximação em relação à reta *r*

Resolução:

Os pontos pedidos são as interseções da circunferência com a reta *s*, que é perpendicular à reta *r* e passa pelo centro da circunferência:

A circunferência λ: $x^2 + y^2 = 5$ tem centro C(0, 0) e raio $R = \sqrt{5}$. Então, temos:

1 Coeficiente angular de *r*:

$$x + 2y = 8 \Leftrightarrow 0 = y + \frac{1}{2}x \quad 4 \quad m_r \quad \frac{1}{2}$$

2. Coeficiente angular de $s \perp r$: $m_s = \dfrac{1}{m_r} \quad 2$

3 Equação de *s*: $y \quad 0 = 2(x \quad 0) \Leftrightarrow y = 2x$

Interseção entre *s* e λ: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & \text{(I)} \\ y = 2x & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (II) em (I):

$$x^2 + (2x)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 + 4x^2 = 5 \Leftrightarrow$$

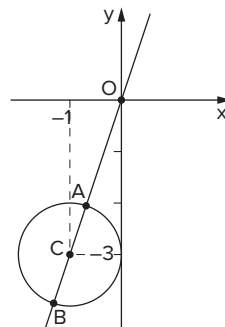
$$\Leftrightarrow 5x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Substituindo em (II): $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot 1 = 2 \\ x = \quad 1 \Rightarrow y = 2 \cdot (\quad 1) = \quad 2 \end{cases}$

Assim, A(1, 2) é o ponto de maior aproximação e B(1,   2) o de menor aproximação.

20 Dada a circunferência λ: $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 1$, encontre os pontos de λ de maior e de menor aproximação em relação à origem.

Resolução:

Os pontos pedidos são a interseção de λ com a reta *r* que passa pelo centro da circunferência e pela origem. O centro de λ é o ponto C(1,   3) e o raio R = 1

Coeficiente angular de *r*: $m_r = \dfrac{y_C - y_O}{x_C - x_O} = \dfrac{-3 - 0}{-1 - 0} = 3$

Equação de *r*: $y \quad 0 = 3(x \quad 0) \Leftrightarrow y = 3x$

Interseção de *r* e λ: $\begin{cases} (x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 1 & \text{(I)} \\ y = 3x & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (II) em (I):

$$(x + 1)^2 + (3x + 3)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + 9x^2 + 18x + 9 - 1 = 0 \Leftrightarrow 10x^2 + 20x + 9 = 0$$

Resolvendo a equação, obtemos: $x = \quad 1 \pm \dfrac{\sqrt{10}}{10}$

Substituindo em (II), temos:

$$\begin{cases} x = \quad 1 + \dfrac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow y = 3\left(\quad 1 + \dfrac{\sqrt{10}}{10}\right) = \quad 3 + \dfrac{3\sqrt{10}}{10} \\ x = \quad 1 - \dfrac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow y = 3\left(\quad 1 \quad \dfrac{\sqrt{10}}{10}\right) = \quad 3 \quad \dfrac{3\sqrt{10}}{10} \end{cases}$$

Assim, os pontos de maior e de menor aproximação em relação à origem são, respectivamente:

$$A\left(-1 + \frac{\sqrt{10}}{10}, \quad 3 \quad \frac{3\sqrt{10}}{10}\right) \text{ e}$$

$$B\left(-1 - \frac{\sqrt{10}}{10}, -3 - \frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$$

Circunferência e circunferência

Pontos de interseção entre duas circunferências

Na Geometria Analítica, o problema geral de encontrar a interseção de duas curvas pode ser solucionado resolvendo-se o sistema formado pelas duas equações dessas curvas (quando elas possuírem equações analíticas).

Assim, dadas duas circunferências λ_1: $x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0$ e λ_2: $x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0$, para encontrar os possíveis pontos de intersecção entre elas, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

Uma das maneiras de resolvê lo consiste em subtrair uma equação da outra. Assim, os termos quadráticos são eliminados, restando uma equação linear em x e y. Isolan do uma das duas variáveis e a substituindo em uma das equações das circunferências, obtém-se uma equação de segundo grau cujas raízes fornecerão as abscissas (ou ordenadas) dos pontos de interseção. Dependendo do valor do discriminante Δ da equação, podemos ter duas interseções ($\Delta > 0$), uma interseção ($\Delta = 0$) ou nenhuma interseção ($\Delta < 0$).

Assim:

$$\frac{\begin{cases} x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \quad -}{\left(A_1 - A_2\right)x + \left(B_1 - B_2\right)y + \left(C_1 - C_2\right) = 0}$$

Se a equação $(A_1 - A_2)\,x + (B_1 - B_2)\,y + (C_1 - C_2) = 0$ for equivalente a uma reta, ela representará a reta que contém todos os pontos equipotentes em relação às duas circunferências, incluindo as possíveis interseções. Essa reta é chamada **eixo radical**.

Exercício resolvido

21 Considere as circunferências λ_1: $x^2 + y^2 \quad 6x \quad 16 = 0$, de centro (3, 0) e raio 5, e λ_2: $x^2 + y^2 \quad 22x \quad 8y + 112 = 0$, de centro (11, 4) e raio 5 Encontre os pontos de interseção das duas circunferências

Resolução:

Montando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0 & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 - 22x - 8y + 112 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Fazendo (I) (II), temos: $16x + 8y \quad 128 = 0 \Leftrightarrow y = \quad 2x + 16$.

Substituindo em (I):

$$x^2 + (\quad 2x + 16)^2 \quad 6x \quad 16 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 4x^2 \quad 64x + 256 \quad 6x \quad 16 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 \quad 14x + 48 = 0$$

Resolvendo a equação, obtemos $x = 6$ ou $x = 8$ Assim:

$$\begin{cases} x = 6 \Rightarrow y = -2 \cdot 6 + 16 = 4 \\ x = 8 \Rightarrow y = \cdot \quad 2{+}8 \quad {+}6 \quad 0 \end{cases}$$

Portanto, os pontos de interseção entre as circunferências são (6, 4) e (8, 0)

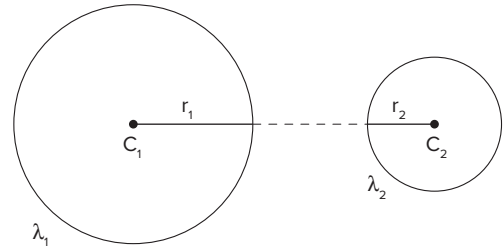
Posições relativas entre duas circunferências

Dadas duas circunferências λ_1 e λ_2 de centros C_1 e C_2 e raios r_1 e r_2, devemos considerar seis posições relativas entre elas:

I. disjuntas exteriormente;
II. tangentes exteriormente;
III. secantes;
IV. tangentes interiormente;
V. disjuntas interiormente;
VI. concêntricas.

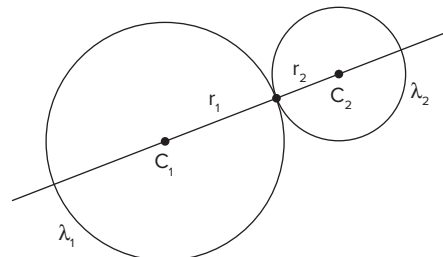
A posição relativa entre as circunferências λ_1 e λ_2 é determinada comparando-se a distância entre seus centros $d(C_1, C_2)$ com a diferença $|r_1 - r_2|$ ou a soma $r_1 + r_2$ das medidas dos seus raios, como veremos a seguir.

Disjuntas exteriormente (exteriores)

São circunferências que não possuem pontos em comum e nenhuma delas está parcial ou totalmente dentro da outra Isso ocorre quando a distância entre os centros é maior que a soma das medidas dos raios.

$d(C_1, C_2) > r_1 + r_2$

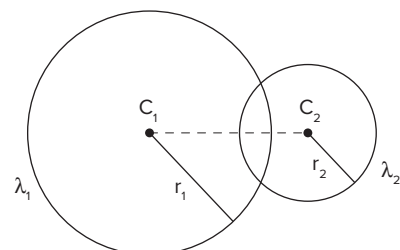
Disjuntas exteriormente.

Tangentes exteriores

São circunferências que possuem um ponto em comum e nenhuma delas está dentro da outra. Observe que a reta que passa pelos dois centros também passa pelo ponto de tangência. Esse caso ocorre quando a distância entre os centros equivale à soma das medidas dos raios.

$d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$

Tangentes exteriores.

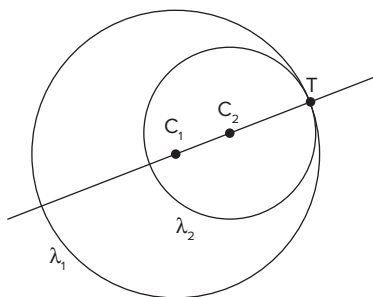
Secantes

São circunferências que possuem dois pontos de interseção Isso ocorre quando a distância entre os centros é menor que a soma das medidas dos raios e maior que o módulo da diferença entre essas medidas.

$|r_1 \quad r_2| < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2$

Secantes.

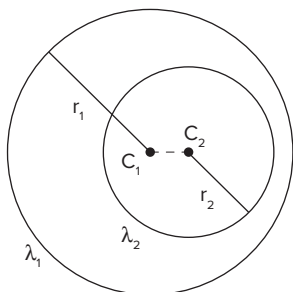
FRENTE 3

Tangentes interiores

São circunferências que têm apenas um ponto em comum e uma está dentro da outra Observe que a reta que passa pelos dois centros também passa pelo ponto de tangência Esse caso ocorre quando a distância entre os centros equivale ao módulo da diferença entre as medidas dos raios

$d(C_1, C_2) = |r_1 \quad r_2|$

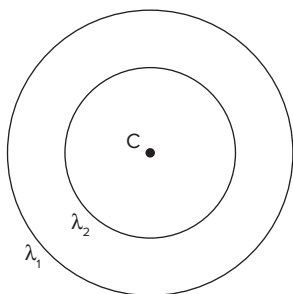
Tangentes interiores.

Disjuntas interiormente

Uma circunferência é interior à outra quando seu centro é interior a ela e não possui ponto de interseção com ela. Esse caso ocorre quando a distância entre os centros é menor que o módulo da diferença entre as medidas dos raios.

$0 < d(C_1, C_2) < |r_1 \quad r_2|$

Disjuntas interiormente.

Concêntricas

São circunferências cujos centros são coincidentes. Isso ocorre quando elas possuem o mesmo centro, ou seja, quando $C_1 = C_2$.

$d(C_1, C_2) = 0$

Circunferências concêntricas.

Exercícios resolvidos

22 Determine a posição relativa entre as circunferências:

a) λ_1: $x^2 + y^2 = 9$ e λ_2: $(x \quad 6)^2 + (y \quad 8)^2 = 1$

b) λ_1: $x^2 + y^2 = 9$ e λ_2: $(x \quad 6)^2 + (y \quad 8)^2 = 49$

c) λ_1: $x^2 + y^2 = 9$ e λ_2: $(x \quad 6)^2 + (y \quad 8)^2 = 64$

d) λ_1: $x^2 + y^2 = 100$ e λ_2: $(x \quad 3)^2 + (y \quad 4)^2 = 25$

Resolução:

a) $\begin{cases} C_1(0, 0);\ r_1 = 3;\ C_2(6, 8);\ r_2 = 1 \\ d(C_1, C_2) = \sqrt{(6 + 0)^2 = (8 \quad 0)^2} \quad 10 \\ r_1 + r_2 = 3 + 1 = 4 \end{cases}$

Como $d(C_1, C_2) > r_1 + r_2$, as circunferências são exteriores.

b) $\begin{cases} C_1(0, 0);\ r_1 = 3;\ C_2(6, 8);\ r_2 = 7 \\ d(C_1, C_2) = \sqrt{(6 + 0)^2 = (8 \quad 0)^2} \quad 10 \\ r_1 + r_2 = 3 + 7 = 10 \end{cases}$

Como $d(C_1, C_2) > r_1 + r_2$, as circunferências são tan gentes exteriores.

c) $\begin{cases} C_1(0, 0);\ r_1 = 3;\ C_2(6, 8);\ r_2 = 8 \\ d(C_1, C_2) = \sqrt{(6 - 0)^2 + (8 - 0)^2} = 10 \\ r_1 + r_2 = 3 + 8 = 11 \\ |r_1 \quad r_2| \quad |3 \quad 8| \quad 5 \end{cases}$

Como $|r_1 - r_2| < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2$, as circunferências são secantes.

d) $\begin{cases} C_1(0, 0);\ r_1 = 10;\ C_2(3, 4);\ r_2 = 5 \\ d(C_1, C_2) = \sqrt{(3 - 0)^2 + (4 - 0)^2} = 5 \\ |r_1 \quad r_2| \quad |10 \quad 5| \quad 5 \end{cases}$

Como $d(C_1, C_2) = |r_1 \quad r_2|$, λ_2 é tangente interior a λ_1.

23 Duas circunferências de raio 10, em unidades de comprimento, tangenciam a circunferência $x^2 + y^2 = 36$ no ponto $P\left(3, 3\sqrt{3}\right)$. Determine os centros dessas circunferências.

Resolução:

A circunferência $x^2 + y^2 = 36$ tem centro em O(0, 0) e raio r = 6.

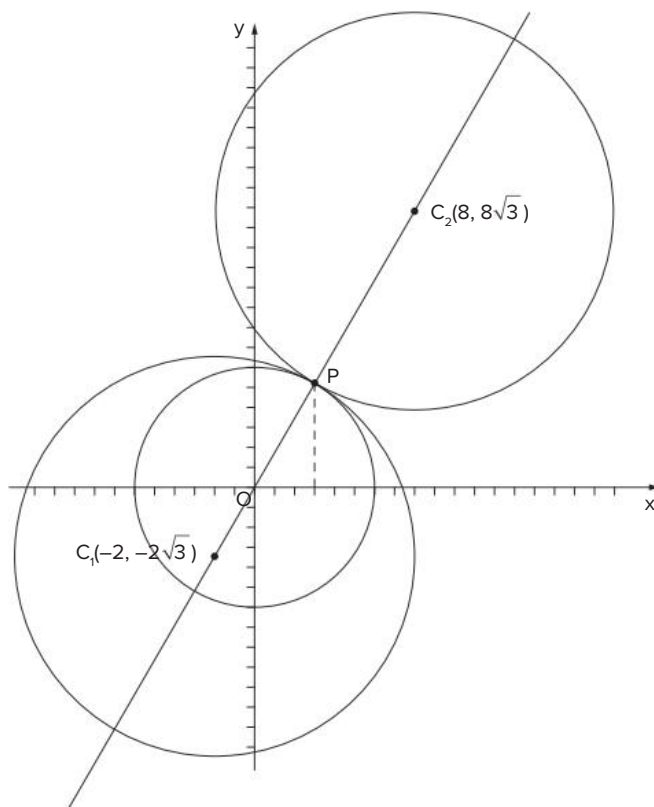
As circunferências tangentes a $x^2 + y^2 = 36$ têm centros sobre a reta que passa por O(0, 0) e $P\left(3, 3\sqrt{3}\right)$.

Essa reta tem equação $y \quad 0 \quad \frac{3\sqrt{3} \quad 0}{3 \quad 0}(x \quad 0) \quad y \quad \sqrt{3}x$

Assim, os centros das circunferências tangentes a $x^2 + y^2 = 36$ têm a forma $\left(a, \sqrt{3}a\right)$.

Como a distância dos centros das circunferências procuradas ao ponto de tangência P é igual a 10, chamando de C_1 um desses centros, temos:

$$d(C_1, P) = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(a-3)^2 + \left(\sqrt{3}a - 3\sqrt{3}\right)^2} = 10$$
$$\Rightarrow a^2 + 6a + \ 9 \ 3a^2 = 18a \ 27 \ \ 100$$
$$\Rightarrow 4a^2 - 24a - 64 = 0 \Rightarrow a^2 - 6a - 16 = 0 \begin{cases} a = \ 2 \\ \text{ou} \\ a = 8 \end{cases}$$

Os centros das circunferências são os pontos $C_1\left(\ 2, \ \ 2\sqrt{3}\right)$ (tangente interior) e $C_2\left(8, 8\sqrt{3}\right)$ (tangente exterior).

Revisando

1 Encontre a equação reduzida das circunferências:

a) de raio 3 e centro (3, 4).

b) de raio 1 e centro (–1, 0).

2 Determine o centro, o raio, os pontos de maior e menor abscissa e os pontos de maior e menor ordenada das circunferências a seguir:

a) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$

b) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$

3 Qual o conjunto de pontos que cada uma das equações a seguir representa?

a) $x^2 + y^2 - 10x + 12y + 36 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 25 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 2x + 2 = 0$

4 **FGV-SP** Dada a equação $x^2 + y^2 = 14x + 6y + 6$, se *p* é o maior valor possível de *x*, e *q* é o maior valor possível de *y*, então, $3p + 4q$ é igual a:

A 73 **B** 76 **C** 85 **D** 89 **E** 92

5 Encontre as interseções entre a circunferência $\lambda: (x + 2)^2 + (y \quad 4)^2 = 16$ e os eixos do plano cartesiano.

6 Determinar a equação reduzida da circunferência que passa pelos pontos A(0, 8) e B(0, 18), é tangente ao eixo *x* e tem centro no segundo quadrante.

7 **UEM 2015** Considerando uma reta *s* e uma circunferência C de centro Q e raio *r*, assinale o que for correto.

01 Se existir $P \in s$ tal que a distância de P a Q é *r*, então *s* é tangente a C.

02 Se *s* é secante a C, então existem dois pontos P_1 e P_2 pertencentes a *s* que são equidistantes de Q.

04 Se C: $x^2 + y^2 = 1$, então toda reta secante a C paralela ao eixo *x* tem equação $y = b$, onde $b \in (-1, 1)$.

08 Se C é dada por $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 9$ e *s* é a reta que passa por (2, 0) e é paralela ao eixo *y*, então *s* é tangente a C.

16 A circunferência C: $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$ tem centro sobre a reta *s*: $y = 3x + 7$ e seu raio é igual ao coeficiente angular de *s*.

Soma:

8 **FGV 2014** No plano cartesiano, uma circunferência tem centro C(5, 3) e tangencia a reta de equação $3x + 4y \quad 12 = 0$.

A equação dessa circunferência é:

A $x^2 + y^2 \quad 10x \quad 6y + 25 = 0$
B $x^2 + y^2 \quad 10x \quad 6y + 36 = 0$
C $x^2 + y^2 \quad 10x \quad 6y + 49 = 0$
D $x^2 + y^2 + 10x + 6y + 16 = 0$
E $x^2 + y^2 + 10x + 6y + 9 = 0$

9 **FGV 2016** No plano cartesiano, a equação da reta tangente ao gráfico de $x^2 + y^2 = 25$ pelo ponto (3, 4) é:

A $4x + 3y - 25 = 0$
B $4x + 3y - 5 = 0$
C $4x + 5y - 9 = 0$
D $3x + 4y - 25 = 0$
E $3x + 4y - 5 = 0$

10 **ITA 2015** Seja C uma circunferência tangente simultaneamente às retas r: $3x + 4y - 4 = 0$ e s: $3x + 4y - 19 = 0$. A área do círculo determinado por C é igual a:

A $\frac{5\pi}{7}$ B $\frac{4\pi}{5}$ C $\frac{3\pi}{2}$ D $\frac{8\pi}{3}$ E $\frac{9\pi}{4}$

11 Determine as equações das retas que passam por P(0, 4) e são tangentes à circunferência de equação $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9$.

12 Sejam as circunferências:

$$\lambda_1: x^2 + y^2 = 9 \text{ e } \lambda_2 = x^2 + y^2 - 8x - p = 0$$

Determine o valor de p para que λ_1 e λ_2 sejam:

a) tangentes exteriores.
b) tangentes interiores.
c) secantes.

Exercícios propostos

1 Uece 2017 No plano, com o sistema de coordenadas cartesianas usual, a distância do centro da circunferência $x^2 + y^2 \quad 6x + 8y + 9 = 0$ à origem é:

> **Dado:** u. c. = unidade de comprimento.

A 3 u.c B 6 u c C 5 u.c D 4 u.c

2 Unisc 2012 A equação $x^2 + Ay^2 + Bxy + 2x \quad 4y + C = 0$ representa uma circunferência cujo diâmetro mede 10 unidades de distância. Essa afirmação nos permite determinar o valor dos coeficientes reais A, B e C e também garantir que a expressão A – B – C seja igual a:

A –20
B –10
C 11
D 21
E 30

3 Fuvest 2015 A equação $x^2 + 2x + y^2 + my = n$, em que *m* e *n* são constantes, representa uma circunferência no plano cartesiano. Sabe-se que a reta $y = -x + 1$ contém o centro da circunferência e a intersecta no ponto (–3, 4). Os valores de *m* e *n* são, respectivamente:

A –4 e 3.
B 4 e 5.
C –4 e 2.
D –2 e 4.
E 2 e 3.

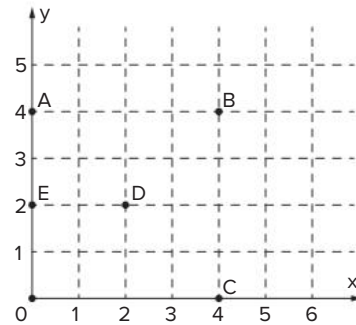
4 Unicamp 2016 Considere o círculo de equação cartesiana $x^2 + y^2 = ax + by$, onde *a* e *b* são números reais não nulos. O número de pontos em que esse círculo intercepta os eixos coordenados é igual a:

A 1 B 2 C 3 D 4

5 Uece 2016 No plano, com o sistema de coordenadas cartesianas usual, se a circunferência $x^2 + y^2 + 8x \quad 6y + 16 = 0$ possui *n* interseções com os eixos coordenados, então, o valor de *n* é:

A 2 B 1 C 3 D 4

6 UFU 2015 Uma máquina moderna usa um sistema de coordenadas cartesianas xOy para representar a forma e a dimensão (mapear) dos objetos que serão cortados, furados etc. Uma chapa metálica delgada triangular é mapeada pelo triângulo de vértices A(–3, 0), B(1, 4) e C(5, –4) e será feito um furo circular de raio uma unidade de comprimento, com centro no centro de massa dessa chapa (baricentro do triângulo). Para realizar esse procedimento com precisão, a máquina calcula a equação cartesiana do círculo.
Elabore e execute um plano de resolução que conduza à determinação do centro de massa e da equação desse círculo.

7 Enem 2018 Um jogo pedagógico utiliza-se de uma interface algébrico-geométrica do seguinte modo: os alunos devem eliminar os pontos do plano cartesiano dando "tiros", seguindo trajetórias que devem passar pelos pontos escolhidos. Para dar os tiros, o aluno deve escrever em uma janela do programa a equação cartesiana de uma reta ou de uma circunferência que passa pelos pontos e pela origem do sistema de coordenadas. Se o tiro for dado por meio da equação da circunferência, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 2 pontos. Se o tiro for dado por meio da equação de uma reta, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 1 ponto. Em uma situação de jogo, ainda restam os seguintes pontos para serem eliminados: A(0, 4), B(4, 4), C(4, 0), D(2, 2) e E(0, 2).

Passando pelo ponto A, qual equação forneceria a maior pontuação?

A $x = 0$
B $y = 0$
C $x^2 + y^2 = 16$
D $x^2 + (y \quad 2)^2 = 4$
E $(x \quad 2)^2 + (y \quad 2)^2 = 8$

8 USF 2018 A circunferência λ tem centro no ponto C(–2, y) e intersecta o eixo das ordenadas nos pontos A(0, 1) e B(0, –1). De acordo com esses dados, pode-se afirmar que uma equação para representar λ é:

A $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$
B $x^2 + y^2 \quad 4x + y + 1 = 0$
C $x^2 + y^2 + 4x \quad 1 = 0$
D $x^2 + y^2 \quad 4x \quad 1 = 0$
E $x^2 + y^2 + 4x \quad 2y \quad 1 = 0$

9 FGV Dada a circunferência de equação

$$x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$$

seja P seu ponto de ordenada máxima. A soma das coordenadas de P é:

A 10
B 10,5
C 11
D 11,5
E 1

10 Imed 2018 Atualmente, por questão de proteção, certas edificações como presídios, instalações militares ou governamentais, casas de entretenimento e residências têm necessidade de bloquear o sinal de telefones celulares. Tal expediente causava transtornos até algum tempo atrás, pois exigia que fossem desativadas as torres de retransmissão de sinal, o que deixava um bocado de gente sem comunicação. Atualmente, isso pode ser feito de modo mais pontual, com a utilização de aparelhos capazes de restringir o raio de bloqueio a distâncias mais curtas. Em uma determinada região, desejava-se instalar um desses aparelhos em certa construção. No entanto, havia um trecho de estrada passando próximo a essa construção. Um mapa da região foi plotado num

plano cartesiano, no qual a estrada corresponde a uma reta de equação $x + y = 5$ e a região em torno da edificação a partir da qual se estabeleceu o bloqueio corresponde a uma circunferência de equação $(x \quad 5)^2 + (y \quad 3)^2 = 9$. O centro da circunferência corres pondende à localização dessa edificação. Sabendo que cada unidade de distância no plano cartesiano corresponde a 10 km, dentre as afirmações a seguir:

I. A circunferência se localiza no 1º quadrante do sistema de coordenadas cartesianas.

II. Um aparelho de telefone celular localizado no ponto B(3, 4) do sistema de coordenadas cartesianas está sob a ação do bloqueio, já que ele é interior à circunferência.

III. A menor distância da estrada até a edificação é de 30 km.

É (são) verdadeira (s) apenas:

A I. **C** I e II. **E** I, II e III.
B III. **D** II e III.

11 Uece 2016 No plano cartesiano usual, a equação da circunferência que contém os pontos (–4, 0), (4, 0) e (0, 8) é $x^2 + y^2 + my + n = 0$. O valor da soma $m^2 + n$ é:

A 30 **B** 10 **C** 40 **D** 20

12 UPE 2018 Qual é a razão entre a medida da área e do comprimento da circunferência que, no plano cartesiano, passa pelos pontos A(–4, 1), B(–1, –2), e C(2, 1)?

A 0,5 **C** 1,5 **E** 2,5
B 1 **D** 2

13 UEM 2016 Considerando P(–2, 1) e Q(4, 5) pontos das extremidades de um dos diâmetros da circunferência C, onde $P, Q \in C$, assinale o que for correto.

01 O ponto (–1, 6) pertence à circunferência C.
02 O centro da circunferência C é (1, 3).
04 O raio da circunferência C é $2\sqrt{13}$.
08 A corda determinada pelos pontos (–2, 5) e (3, 0) é um diâmetro de C.
16 A equação da circunferência C é dada por $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$.

Soma:

14 Acafe 2017 Os pontos A(1, 1), B(1, 9) e C(7, 1) são os vértices do triângulo inscrito numa circunferência de equação $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$. O valor de $m + 2n + 3p$ é igual a:

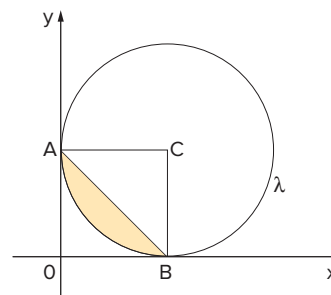
A 29 **B** 20 **C** 65 **D** 28

15 Ulbra 2016 As retas $2x - y - 4 = 0$ e $2x + 3y - 12 = 0$ interceptam-se no centro de uma circunferência de raio igual a 3. Então podemos dizer que:

A a circunferência possui centro no ponto (2, 3).
B a circunferência corta o eixo *y* em dois pontos.
C a circunferência corta o eixo *x* em um ponto.
D a circunferência é tangente ao eixo *x*.
E a circunferência é tangente ao eixo *y*.

16 Imed 2015 No plano cartesiano Oxy, a circunferência C com centro no ponto P(4, –2) é tangente ao eixo das ordenadas. Nessa situação, a equação geral dessa circunferência corresponde a:

A $x^2 + y^2 + 8x + 8y + 4 = 0$
B $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$
C $x^2 + y^2 - 8x - 8y - 4 = 0$
D $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$
E $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 4 = 0$

17 PUC-SP 2016 Na figura tem-se a representação de λ, circunferência de centro C e tangente aos eixos coordenados nos pontos A e B.

Se a equação de λ é $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 16 = 0$, então a área da região hachurada, em unidades de superfície, é:

A $8 \cdot (\pi - 2)$ **C** $4 \cdot (\pi - 2)$
B $8 \cdot (\pi - 4)$ **D** $4 \cdot (\pi - 4)$

18 UEPG 2017 Dada a equação $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$. Considerando que *p* é o maior valor possível de *x* e *q* o maior valor possível de *y*, assinale o que for correto.

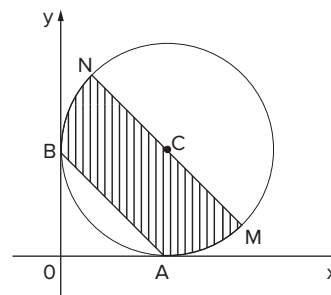
01 $p - 3q < 0$.
02 $2p - 4q = 2$.
04 $p + q$ é um número primo.
08 $2p + q > 0$.

Soma:

19 Fuvest A circunferência dada pela equação

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$$

é tangente aos eixos coordenados *x* e *y* nos pontos A e B, conforme a figura.

O segmento $\overline{MN}$ é paralelo ao segmento $\overline{AB}$ e contém o centro C da circunferência. É correto afirmar que a área da região hachurada vale:

A $\pi - 2$ **C** $\pi + 4$ **E** $\pi + 8$
B $\pi + 2$ **D** $\pi + 6$

20 **Fuvest 2012** No plano cartesiano Oxy, a circunferência C é tangente ao eixo Ox no ponto de abscissa 5 e contém o ponto (1, 2). Nessas condições, o raio de C vale:

A $\sqrt{5}$ C 5 E 10
B $2\sqrt{5}$ D $3\sqrt{5}$

21 **Unicamp 2017** Considere a circunferência de equação cartesiana $x^2 + y^2 = x - y$. Qual das equações a seguir representa uma reta que divide essa circunferência em duas partes iguais?

A $x + y = -1$ C $x - y = 1$
B $x - y = -1$ D $x + y = 1$

22 **UFJF 2018** Determine a distância entre o centro da circunferência $x^2 - 2x + y^2 + 6y - 6 = 0$ e a reta $3y = -4x - 1$.

A $\frac{12}{5}$ C 5 E $\frac{1}{5}$
B $\frac{4}{5}$ D 1

23 **PUC PR 2018** Considere os dados a seguir
Dois corredores A e B partem do ponto P(0, 0) no mesmo instante e com velocidades de módulos constantes O corredor A segue a trajetória descrita pela equação $4y \quad 3x = 0$ e o corredor B, a trajetória descrita pela equação $x^2 + y^2 \quad 8x \quad 6y = 0$. As trajetórias estão no mesmo plano.
Assinale a alternativa que contém as coordenadas do ponto Q distinto de P, onde haverá cruzamento das duas trajetórias.

A (3, 4) D (8, 4)
B (4, 3) E (8, 6)
C (6, 9)

24 **UPF 2016** Considere, num referencial xy, a circunferência de equação $(x + 1)^2 + (y \quad 3)^2 = 9$. A equação que define uma reta tangente a essa circunferência é:

A $x = 3$ D $y = 5$
B $x = \quad 3$ E $x = 0$
C $y = 0$

25 **Unicamp 2018** No plano cartesiano, sejam C a circunferência de centro na origem e raio r > 0 e *s* a reta de equação $x + 3y = 10$. A reta *s* intercepta a circunferência C em dois pontos distintos se, e somente se:

A $r > 2$ C $r > 3$
B $r > \sqrt{5}$ D $r > \sqrt{10}$

26 **FGV 2016** No plano cartesiano, a reta de equação $3x + 4y = 17$ tangencia uma circunferência de centro no ponto (1, 1). A equação dessa circunferência é:

A $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 4 = 0$
B $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$
C $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$
D $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$
E $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$

27 **PUC-RS 2016** A circunferência que está centrada na origem do plano cartesiano e que tangencia a reta de equação $y = 2 - x$ possui equação:

A $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ C $x^2 + y^2 = 1$ E $x^2 + y^2 = 4$
B $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ D $x^2 + y^2 = 2$

28 **Uece 2018** No plano, com o sistema de coordenadas cartesianas usual, a equação da reta que contém o ponto P(9, 8) e é tangente à curva representada pela equação $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$ é:

A $3x + 4y - 59 = 0$ C $4x - 3y - 12 = 0$
B $3x - 4y + 5 = 0$ D $4x + 3y - 60 = 0$

29 **Fuvest 2013** São dados, no plano cartesiano, o ponto P de coordenadas (3, 6) e a circunferência C de equação $(x \quad 1)^2 + (y \quad 2)^2 = 1$. Uma reta *t* passa por P e é tangente a C em um ponto Q. Então a distância de P a Q é:

A $\sqrt{15}$ C $\sqrt{18}$ E $\sqrt{20}$
B $\sqrt{17}$ D $\sqrt{19}$

30 **Uece 2017** No plano, com o sistema de coordenadas cartesiano usual, as equações das retas tangentes à circunferência $x^2 + y^2 \quad 10y + 16 = 0$ e que passam pelo ponto (0, 0) são:

A $3x \quad 4y = 0$ e $3x + 4y = 0$.
B $2x \quad 3y = 0$ e $2x + 3y = 0$.
C $4x \quad 3y = 0$ e $4x + 3y = 0$.
D $3x \quad 2y = 0$ e $3x + 2y = 0$.

31 **Mackenzie 2018** A equação da reta que corta o eixo das ordenadas no ponto P(0, –6) e que tangencia a circunferência $x^2 + y^2 = 4$ no quarto quadrante é:

A $y = \quad 2\sqrt{2}x \quad 6$ C $y = 2\sqrt{2}x + 6$ E $y = \quad 4x + 6$
B $y = 2\sqrt{2}x - 6$ D $y = 4x - 6$

32 **PUC-SP 2017** A circunferência λ: $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 13 = 0$, de centro C, e a reta r: $x + y - 11 = 0$ se interceptam nos pontos P e Q. A área do triângulo PCQ, em unidades de área, é:

A 6 B 7 C 8 D 9

33 **Acafe 2018** A circunferência λ passa pelos pontos A(1, 1), B(1, 5) e C(3, 1) A reta r: $x + 3y \quad 6 = 0$ e a circunferência λ são secantes. A área do triângulo cujos vértices são a origem do sistema de coordenadas car tesianas, e os pontos de interseção entre a reta *r* e a circunferência λ, tem medida igual a:

A 6 unidades de área. C 4 unidades de área
B 12 unidades de área D 10 unidades de área

34 **Efomm 2016** Quanto à posição relativa, podemos classificar as circunferências $(x \quad 2)^2 + (y \quad 3)^2 = 9$ e $x^2 + y^2 \quad 8x + 15 = 0$ como:

A secantes. D externas.
B tangentes internas. E internas.
C tangentes externas.

35 UPE 2015 No sistema cartesiano, sendo a circunferência C de equação $x^2 + y^2 + 6x - 2y = -6$. Qual a equação da circunferência C' simétrica de C em relação à origem do sistema?

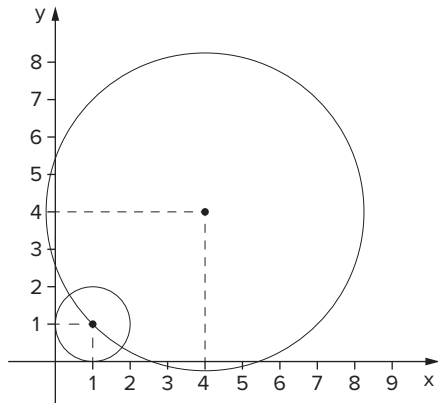
A $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 4$

B $x^2 + y^2 \quad 6x \quad 2y = \quad 4$

C $x^2 + y^2 + 6x + 2y = \quad 4$

D $x^2 + y^2 + 6x + 2y = -6$

E $x^2 + y^2 + 6x + 2y = -6$

36 UEG 2015 Observe a figura a seguir

Sabendo-se que a circunferência de maior raio passa pelo centro da circunferência de menor raio, a equação da circunferência de maior raio é:

A $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 18 = 0$

B $x^2 + y^2 \quad 4x \quad 4y \quad 14 = 0$

C $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 14 = 0$

D $x^2 + y^2 + 8x + 8y + 18 = 0$

37 Mackenzie 2018 Os valores de **a** para os quais as circunferências de equações $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$ e $(x - a)^2 + (y + 2)^2 = 16$ são tangentes exteriormente são:

A –2 e 8.

B 2 e 8.

C –8 e 2.

D 0 e 6.

E –6 e 0.

38 UEG 2016 A circunferência de centro (8, 4) que tangencia externamente a circunferência $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$ possui raio igual a:

A 16

B 10

C 8

D 6

E 4

39 Sejam as circunferências:

$$C_1: x^2 + y^2 - 16 = 0 \ \text{ e } \ C_2: (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$$

Sabendo que A e B são os pontos de interseção dessas circunferências, a distância entre eles, em unidades de comprimento, é:

A $2\sqrt{7}$

B $\sqrt{14}$

C $2\sqrt{14}$

D $\sqrt{7}$

E $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

40 UFRGS 2015 Considere as circunferências definidas por $(x \quad 3)^2 + (y \quad 2)^2 = 16$ e $(x \quad 10)^2 + (y \quad 2)^2 = 9$ representadas no mesmo plano cartesiano. As coordenadas do ponto de interseção entre as circunferências são:

A (7, 2)

B (2, 7)

C (10, 3)

D (16, 9)

E (4, 3)

Texto complementar

O eixo radical de duas circunferências

Um problema clássico da Geometria consiste em encontrar o lugar geométrico dos pontos do plano que tenham a mesma potência em relação a duas circunferências dadas

A seguir, vamos resolvê–lo utilizando como ferramenta a Geometria Analítica. Antes, porém, é importante relembrar alguns conceitos importantes:

Potência de ponto

Seja um ponto P e uma circunferência λ de raio *r* e centro C distando *d* de P. A potência de P em relação a λ é definida como sendo o número real:

$$P_\lambda^P = d^2 - r^2$$

Teorema das secantes

Sendo P um ponto externo a λ, *r* uma reta que passa por P e é secante a λ em A e B, *s* uma reta que passa por P e é secante a λ em C e D, temos:

$$P_\lambda^P = PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Teorema das tangentes

Sendo P um ponto externo a λ, *t* uma reta que passa por P e é tangente a λ em T, temos:

$$P_\lambda^P = PT^2$$

Teorema das cordas

Sendo P um ponto interno a λ, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ duas cordas de λ passando por P, temos:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Adotaremos um sistema de coordenadas cartesianas em que P(x, y), C(x_0, y_0) e $d^2 = (x \quad x_0)^2 + (y \quad y_0)^2$ Nesse sistema, a potência de P em relação a λ é dada por:

$$P_{\lambda}^{P} = d^2 - r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 \quad \text{(I)}$$

Note que, se igualarmos a equação (I) a 0, obteremos uma equação geral de circunferência.

Isso faz sentido, pois os pontos da circunferência têm potência nula em relação a essa mesma circunferência.

A equação (I) também pode ser escrita na forma:

$$P_{\lambda}^{P} = x^2 + y^2 + Ax + By + C \quad \text{(II), em que:}$$

$$\begin{cases} A = -2x_0 \\ B = -2y_0 \\ C = x_0^2 + y_0^2 - r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \quad \dfrac{A}{2} \\ y_0 = -\dfrac{B}{2} \\ r = \dfrac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 \quad 4C} \end{cases}$$

Seja λ' outra circunferência, não concêntrica a λ, de centro C'(x_1, y_1) e raio r_1. Como vimos anteriormente, temos:

$$P_{\lambda'}^{P} = x^2 + y^2 + A'x + B'y + C' \quad \text{(II), em que:}$$

$$\begin{cases} A' = -2x_1 \\ B' = -2y_1 \\ C' = x_1^2 + y_1^2 - r_1^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \quad \dfrac{A'}{2} \\ y_1 = -\dfrac{B'}{2} \\ r_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{A'^2 + B'^2 \quad 4C'} \end{cases}$$

Buscando o lugar geométrico dos pontos equipotentes em relação às duas circunferências, temos:

$$P_{\lambda}^{P} = P_{\lambda'}^{P} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + Ax + By + C = x^2 + y^2 + A'x + B'y + C' \Leftrightarrow (A \quad A')x + (B \quad B')y + (C \quad C') = 0 \quad \text{(IV)}$$

A equação (IV) representa uma reta *r*.

Agora, mostraremos que ela é perpendicular à reta que passa pelos dois centros.

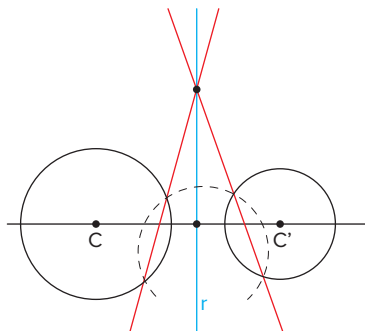
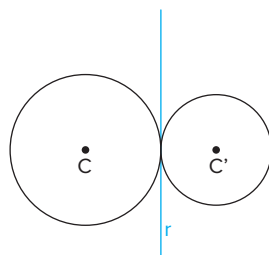
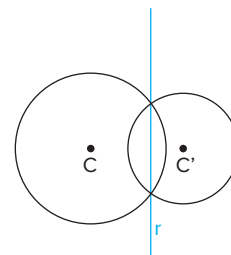
O coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{CC'}$ é dado por:

$$m_{CC'} = \frac{y_2 \quad y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-\dfrac{B'}{2} - \left(-\dfrac{B}{2}\right)}{\dfrac{A'}{2} \quad \left(\quad \dfrac{A}{2}\right)} = \frac{B - B'}{A - A'}$$

O coeficiente angular da reta *r* é dado por:

$$(A \quad A')x + (B \quad B')y + (C \quad C') = 0 \Leftrightarrow (B \quad B')y = (A' \quad A)x + (C' \quad C) \Rightarrow m_r = \frac{A' \quad A}{B \quad B'}$$

$$\text{Assim: } m_r \cdot m_{CC'} = \frac{A' - A}{B \quad B'} \cdot \frac{B - B'}{A \quad A'} = \quad \Leftrightarrow \quad \perp \quad \overleftrightarrow{CC'}$$

No caso em que $x_0 = x_1$ ou $y_0 = y_1$, as retas são paralelas, cada uma a um dos eixos, e continuam perpendiculares (como você pode verificar).

Eixo radical de duas circunferências exteriores

Eixo radical e de duas circunferências exteriores

Eixo radical (e) de duas circunferências secantes.

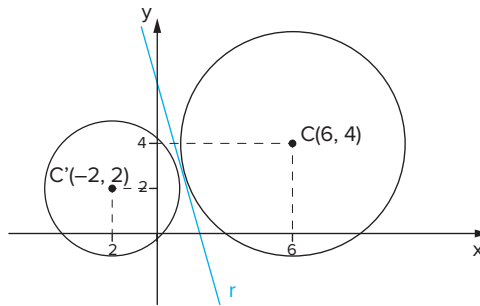
Apenas para exemplificar a situação, observe como encontrar a equação do eixo radical das circunferências λ_1 de centro $C_1(6, 4)$ e raio 5 e λ_2 de centro $C_2(\ \ 2, 2)$ e raio 3.

$$\lambda_1:\ (x-6)^2+(y-4)^2=5^2 \Leftrightarrow x^2-12x+36+y^2-8y+16=25 \Leftrightarrow x^2+y^2-12x-8y+27=0 \begin{cases} A=\ \ 12 \\ B=-8 \\ C=27 \end{cases}$$

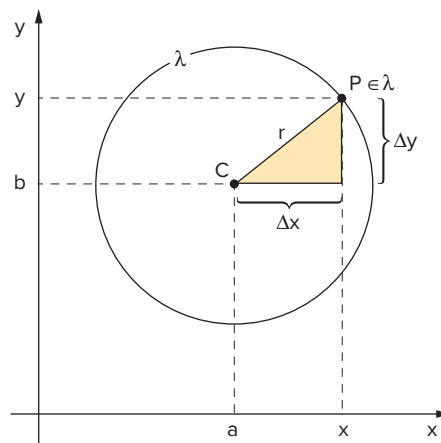
$$\lambda_2:\ (x+2)^2+(y-2)^2=3^2 \Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2-4y+4=9 \Leftrightarrow x^2+y^2+4x-4y-1=0 \begin{cases} A'=4 \\ B'=-4 \\ C'=-1 \end{cases}$$

A equação do eixo radical será:

$$(A\ \ A')x+(B\ \ B')y+(C\ \ C')=0 \Leftrightarrow (\ \ 12\ \ 4)x+(-8\ \ (-4))y+(27\ \ (\ \ 1))=0 \Leftrightarrow\ \ 16x\ \ 4y+28=0$$

Em uma forma mais simples: $4x + y - 7 = 0$.

Resumindo

Equações da circunferência

Equação reduzida da circunferência

$$|\Delta x|^2+|\Delta y|^2=r^2$$
$$\Updownarrow$$
$$(x\ \ a)^2+(y\ \ b)^2=r^2$$

$$\begin{cases} \text{Abscissa do centro: } x_C=a \\ \text{Ordenada do centro: } y_C=b \\ \text{Medida do raio: } r=d(P,C) \end{cases}$$

Equação geral da circunferência

Para uma circunferência de raio *r* e centro (x_0, y_0), temos:

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

$$\begin{cases} A=-2x_0 \\ B=-2y_0 \\ C={x_0}^2+{y_0}^2-r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=\ \ \dfrac{A}{2} \\ y_0=-\dfrac{B}{2} \\ r=\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2-C} \end{cases}$$

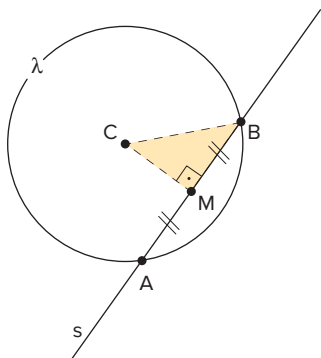
FRENTE 3

Posições relativas entre uma reta e uma circunferência

Se uma reta **s** é **secante** a uma circunferência de centro **C**, então a distân cia de **C** a **s** é menor que a medida do raio da circunferência.

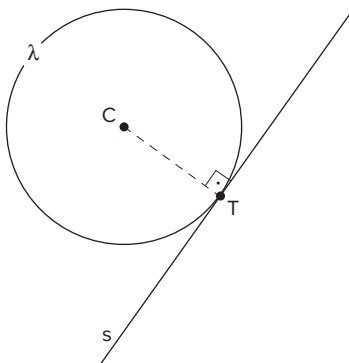
$$d_{C,s} < r$$

O discriminante do sistema formado por suas equações é positivo

$$S \cap \lambda = \{A, B\}$$

Se uma reta **s** é **tangente** a uma circunferência de centro **C**, então a distância de **C** a **s** é igual à medida do raio da circunferência.

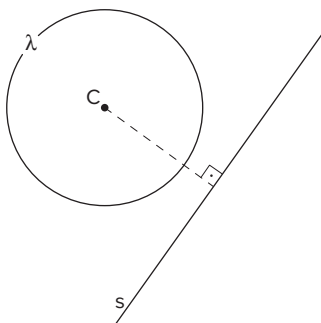
$$d_{C,s} < r$$

O discriminante do sistema formado por suas equações é nulo.

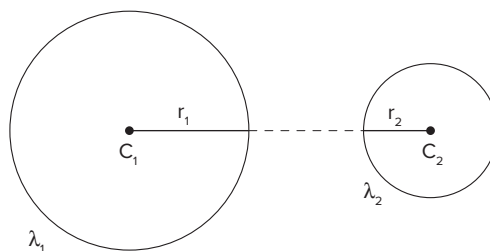
$$S \cap \lambda = \{T\}$$

Se uma reta **s** é **exterior** a uma circunferência de centro **C**, então a distância de **C** a **s** é maior do que a medida do raio da circunferência.

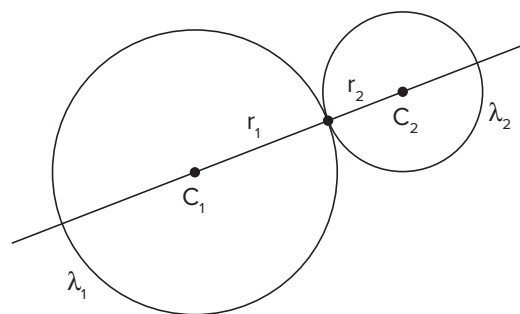
$$d_{C,\,e} > r$$

O discriminante do sistema formado por suas equações é negativo.

$$S \cap \lambda = \varnothing$$

Posições relativas entre duas circunferências

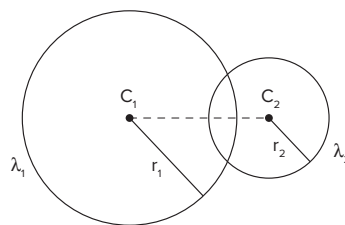
Dadas duas circunferências λ_1 e λ_2 de centros C_1 e C_2 e raios r_1 e r_2, devemos considerar seis posições relativas entre elas:

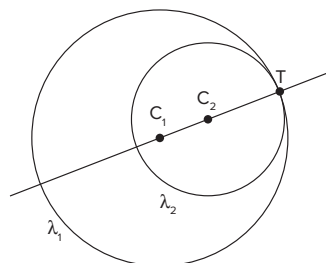
Elas são **disjuntas exteriormente** ou **exteriores** quando a distância entre os centros é maior do que a soma das medidas dos raios.

$$d(C_1, C_2) > r_1 + r_2$$

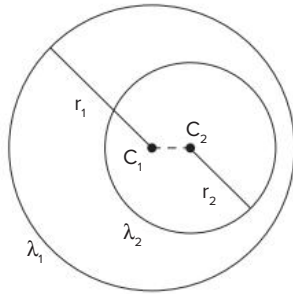
Elas são **tangentes exteriores** quando a distância entre os centros é igual à soma das medidas dos raios.

$$d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$$

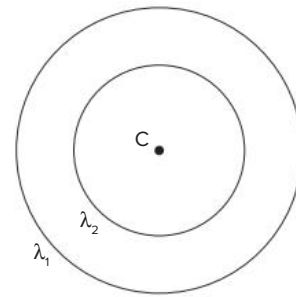
Elas são **secantes** quando a distância entre os centros está entre a diferença absoluta e a soma das medidas dos raios.

$$|r_1 \quad r_2| < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2$$

A equação da reta que passa pelos pontos de interseção dessas circunfe rências pode ser obtida pela subtração de suas equações gerais.

Elas são **tangentes interiores** quando a distância entre os centros é igual ao módulo da diferença dos comprimentos dos raios

$$d(C_1, C_2) = |r_1 \quad r_2|$$

Elas são **disjuntas interiormente** ou **interiores** quando a distância entre os centros é menor que a diferença absoluta das medidas dos raios.

$$0 < d(C_1, C_2) < |r_1 - r_2|$$

Elas são **concêntricas** quando têm o mesmo centro.

$$d(C_1, C_2) = 0$$

Quer saber mais?

Vídeo

- Descartes – breve vida e obra
  Disponível em: <www.youtube.com/watch?v=YiyIQRCYock>.

Exercícios complementares

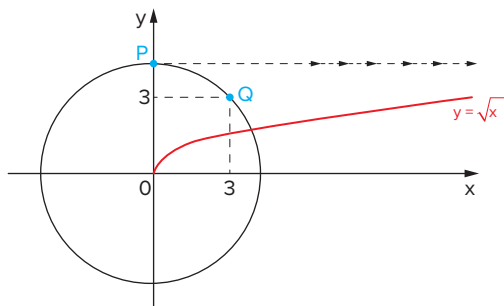
1 Enem 2018 Para apagar os focos A e B de um incêndio, que estavam a uma distância de 30 m um do outro, os bombeiros de um quartel decidiram se posicionar de modo que a distância de um bombeiro ao foco A, de temperatura mais elevada, fosse sempre o dobro da distância desse bombeiro ao foco B, de temperatura menos elevada.
Nestas condições, a maior distância, em metros, que dois bombeiros poderiam ter entre eles é:
A 30
B 40
C 45
D 60
E 68

2 ITA 2011 Sejam *m* e *n* inteiros tais que $\frac{m}{n} = \frac{2}{3}$ e a equação $36x^2 + 36y^2 + mx + ny \quad 23 = 0$ representa uma circunferência de raio r = 1 cm e centro C localizado no segundo quadrante Se A e B são os pontos onde a circunferência cruza o eixo Oy, a área do triângulo ABC, em cm^2, é igual a:

A $\frac{8\sqrt{2}}{3}$
B $\frac{4\sqrt{2}}{3}$
C $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
D $\frac{2\sqrt{2}}{9}$
E $\frac{\sqrt{2}}{9}$

3 UFU 2018 Considere ℓ uma reta do plano cartesiano xOy. A reflexão em torno da reta ℓ é a transformação geométrica R_ℓ e associa a cada ponto P do plano o ponto $P' = R_\ell(P)$, tal que seja a mediatriz do segmento $\overline{PP'}$ Tal transformação preserva a distância entre pontos, ou seja, dados os pontos A e B, se $A' = R_\ell(A)$ e $B' = R_\ell(B)$ são suas respectivas imagens, então $AB = A'B'$.
Considere a reta ℓ: $x + y = 4$ e o círculo λ: $(x - 7)^2 + (y - 1)^2 = 1$.
Baseando-se nas informações citadas, elabore e execute um plano de resolução de maneira a determinar:
a) a interseção da reta perpendicular à reta ℓ passando pelo centro de λ com a reta ℓ.
b) a equação cartesiana do círculo λ' imagem do círculo λ pela reflexão em torno da reta ℓ.

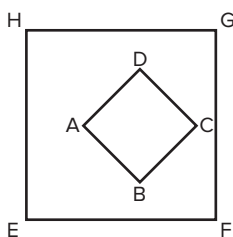
4 EsPCEx 2017 Uma circunferência tem centro no eixo das abscissas, passa pelo ponto (4, 4) e não intercepta o eixo das ordenadas Se a área do círculo definido por essa circunferência é 17π, a abscissa de seu centro é:
A 3
B 4
C 5
D 6
E 7

5 Unesp 2018 Os pontos P e Q(3, 3) pertencem a uma circunferência centrada na origem do plano cartesiano. P também é ponto de interseção da circunferência com o eixo *y*.

Considere o ponto R, do gráfico de $y = \sqrt{x}$, que possui ordenada *y* igual à do ponto P. A abscissa *x* de R é igual a:

A 16
B 15
C 18
D 9
E 12

6 PUC Rio 2018 Considere a circunferência de raio $\sqrt{13}$ e centro (0, 0) e a curva de equação $y = \dfrac{6}{x}$.

a) Determine a equação da circunferência. Esboce, no mesmo sistema de coordenadas ortogonais, a circunferência e a curva.
b) Encontre todos os pontos de interseção entre a circunferência e a curva.
c) Considere o polígono convexo cujos vértices são os pontos de interseção encontrados no item anterior. Calcule a área desse polígono.

7 Udesc 2017 Considere, na figura a seguir, o quadrado ABCD inscrito na circunferência de equação $x^2 + y^2 \quad 6x \quad 10y + 25 = 0$ e o quadrado EFGH circunscrito à circunferência de equação $x^2 + y^2 \quad 4x \quad 10y + 4 = 0$.

Com base nas informações e na figura, analise as sentenças.

I. A diferença das áreas dos quadrados EFGH e ABCD é de 82 unidades de área.
II. Se os lados do quadrado EFGH forem paralelos aos eixos do plano cartesiano e às diagonais do quadrado ABCD, então a área do triângulo EAB é de 12 unidades de área.
III. A soma dos perímetros dos quadrados ABCD e EFGH é de $52\sqrt{2}$ unidades de comprimento.

Assinale a alternativa correta.

A Somente as sentenças I e II são verdadeiras.
B Somente a sentença III é verdadeira.
C Somente as sentenças II e III são verdadeiras.
D Somente a sentença II é verdadeira.
E Somente a sentença I é verdadeira.

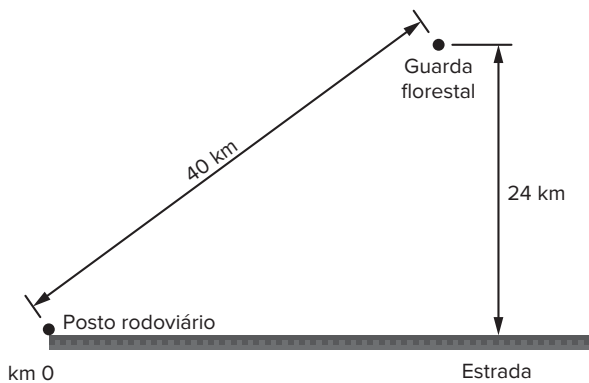
8 AFA 2016 Considere os pontos A(4,   2), B(2, 0) e todos os pontos P(x, y), sendo *x* e *y* números reais, tais que os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são catetos de um mesmo triângulo retângulo.

É correto afirmar que, no plano cartesiano, os pontos P(x, y) são tais que

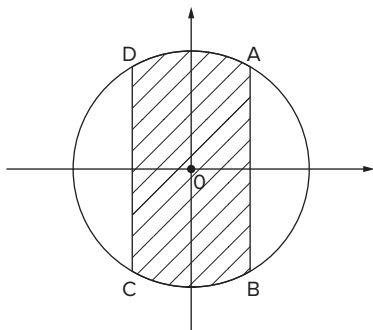
A são equidistantes de C(2, –1).
B o maior valor de *x* é $3 + \sqrt{2}$.
C o menor valor de *y* é –3.
D *x* pode ser nulo.

9 FGV 2013 Um funcionário do setor de planejamento da Editora Progresso verificou que as livrarias dos três clientes mais importantes estão localizadas nos pontos A(0, 0), B(1, 7) e C(8, 6), sendo que as unidades estão em quilômetros.

a) Em que ponto P(x, y) deve ser instalado um depósito para que as distâncias do depósito às três livrarias sejam iguais?
b) Qual é a área do quadrado inscrito na circunferência que contém os pontos A, B e C?

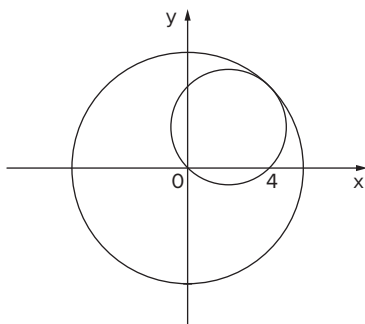
10 Unicamp 2011 Suponha um trecho retilíneo de estrada, com um posto rodoviário no quilômetro zero. Suponha, também, que uma estação da guarda florestal esteja localizada a 40 km do posto rodoviário, em linha reta, e a 24 km de distância da estrada, conforme a figura a seguir.

a) Duas antenas de rádio atendem a região. A área de cobertura da primeira antena, localizada na estação da guarda florestal, corresponde a um círculo que tangencia a estrada O alcance da segunda, instalada no posto rodoviário, atinge, sem ultrapassar, o ponto da estrada que está mais próximo da estação da guarda florestal. Explicite as duas desigualdades que definem as regiões circulares cobertas por essas antenas, e esboce essas regiões no gráfico a seguir, identificando a área coberta simultaneamente pelas duas antenas.

b) Pretende-se substituir as antenas atuais por uma única antena, mais potente, a ser instalada em um ponto da estrada, de modo que as distâncias dessa antena ao posto rodoviário e à estação da guarda florestal sejam iguais. Determine em que quilômetro da estrada essa antena deve ser instalada.

11 **PUC-Rio 2017** Considere o círculo de raio 2 centrado na origem, e as retas verticais $x = 1$ e $x = –1$, como indicado na figura.

a) Encontre as coordenadas dos pontos de interseção A, B, C, D entre o círculo e as retas verticais.
b) Calcule a área da região interior ao círculo que fica entre as duas retas verticais.

12 **Uece 2015** Em um sistema de coordenadas cartesiano usual, as retas representadas pelas equações $3x \quad 4y + 4 = 0$ e $3x \quad 4y + 20 = 0$ são tangentes a uma circunferência cujo centro está localizado sobre o eixo –y. A equação que representa esta circunferência é:

A $25x^2 + 25y^2 \quad 25y \quad 125 = 0$
B $25x^2 + 25y^2 – 150y + 161 = 0$
C $x^2 + y^2 \quad 25y + 9 = 0$
D $x^2 + y^2 \quad 2y \quad 9 = 0$

13 **UFPE 2013** Uma circunferência tem centro no primei ro quadrante, passa pelos pontos com coordenadas (0, 0) e (4, 0) e é tangente, internamente, à circunferência com equação $x^2 + y^2 = 64$. A seguir, estão ilustradas as duas circunferências.

Indique o inteiro mais próximo da soma das coordena das do ponto de interseção das duas circunferências.

14 **Fuvest 2016** No plano cartesiano Oxy, a circunferência C tem centro no ponto P(2, 1), e a reta *t* é tangente a C no ponto Q(–1, 5).

a) Determine o raio da circunferência C.
b) Encontre uma equação para a reta *t*.
c) Calcule a área do triângulo PQR, sendo R o ponto de interseção de *t* com o eixo Ox.

15 **Fuvest 2016** No plano cartesiano, um círculo de centro P(a, b) tangencia as retas de equações $y = x$ e $x = 0$. Se P pertence à parábola de equação $y = x^2$ e $a > 0$, a ordenada *b* do ponto P é igual a:

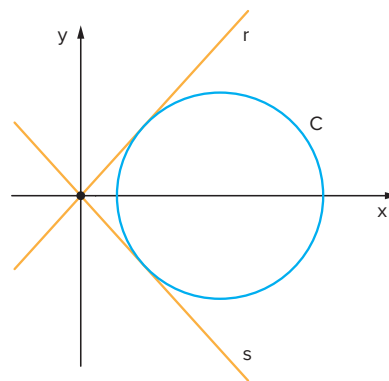
A $2+2\sqrt{2}$
B $3+2\sqrt{2}$
C $4+2\sqrt{2}$
D $5+2\sqrt{2}$
E $6+2\sqrt{2}$

16 **Fuvest** No plano cartesiano xOy, a reta de equação $x + y = 2$ é tangente à circunferência C no ponto (0, 2). Além disso, o ponto (1, 0) pertence a C. Então, o raio de C é igual a:

A $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
B $\frac{5\sqrt{2}}{2}$
C $\frac{7\sqrt{2}}{2}$
D $\frac{9\sqrt{2}}{2}$
E $\frac{11\sqrt{2}}{2}$

17 **UFPR 2014** Uma reta passando pelo ponto P(16, –3) é tangente ao círculo $x^2 + y^2 = r^2$ em um ponto Q. Sabendo que a medida do segmento $\overline{PQ}$ é de 12 unidades, calcule:

a) a distância do ponto P à origem do sistema cartesiano;
b) a medida do raio *r* da circunferência.

18 **Uerj 2017** Considere a circunferência C de equação $x^2 + y^2 – 8x + 8 = 0$, representada graficamente a seguir.

Determine as equações das retas *r* e *s* que passam pela origem e são tangentes à circunferência.

19 **ITA 2014** A equação do círculo localizado no 1º quadrante que tem área igual a 4π (unidades de área) e é tangente, simultaneamente, às retas r: $2x - 2y + 5 = 0$ e s: $x + y - 4 = 0$ é:

A $\left(x \quad \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y \quad \frac{10}{4}\right)^2 = 4$

B $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 = 4$

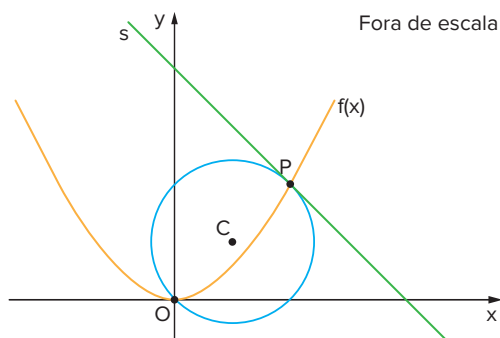
C $\left(x - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{10}{4}\right)^2 = 4$

D $\left(x \quad \left(2\sqrt{2} \quad \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y \quad \frac{13}{4}\right)^2 = 4$

E $\left(x - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{11}{4}\right)^2 = 4$

20 **Mackenzie 2011** Uma circunferência de centro, (4, y) com $y \in Z$, é tangente às retas $x + y \quad 2 = 0$ e $x \quad 7y + 2 = 0$. O raio dessa circunferência é:

A 4
B 5
C $4\sqrt{2}$
D $5\sqrt{2}$
E $6\sqrt{2}$

21 **PUC-SP 2018** A função $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2$ e a circunferência de centro C e equação $(x \quad 2)^2 + (y \quad 2)^2 = 8$ se intersectam nos pontos P e O, sendo O a origem do sistema cartesiano, conforme mostra o gráfico.

A equação da reta *s*, tangente à circunferência no ponto P, pode ser dada por:

A $y = -x$
B $y = -x + 8$
C $y = -x + 2$
D $y = \frac{x}{2}$

22 **Uespi 2012** Suponha que *x* e *y* são reais e satisfazem $x^2 + y^2 = 6x + 6y - 10$. Qual o valor máximo de $x + y$?

A 6 B 7 C 8 D 9 E 10

23 **FGV 2013** No plano cartesiano, há duas retas paralelas à reta de equação $3x + 4y + 60 = 0$ e que tangenciam a circunferência $x^2 + y^2 = 4$ Uma delas intercepta o eixo *y* no ponto de ordenada:

A 2,9
B 2,8
C 2,7
D 2,6
E 2,5

24 **AFA 2018** Considere no plano cartesiano a circunferência λ tangente à bissetriz dos quadrantes ímpares no ponto A(1, 1). Sabendo que a reta t: $x - y + 4 = 0$ tangencia λ no ponto B, marque a opção correta.

A A soma das coordenadas de B é igual a 3.
B P(–1, 2) é exterior a λ.
C O ponto de λ mais próximo da origem é $Q\left(0, 2 - \sqrt{2}\right)$.
D A bissetriz dos quadrantes pares é exterior a λ.

25 **EsPCEx 2017** Seja C a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 2 = 0$. Considere em C a corda $\overline{MN}$ cujo ponto médio é P(–1, –1). O comprimento de $\overline{MN}$ (em unidades de comprimento) é igual a:

A $\sqrt{2}$
B $\sqrt{3}$
C $2\sqrt{2}$
D $2\sqrt{3}$
E 2

26 **ITA 2016** Se P e Q são pontos que pertencem à circunferência $x^2 + y^2 = 4$ e à reta $y = 2(1 \quad x)$, então o valor do cosseno do ângulo PÔQ é igual a:

A $-\frac{3}{5}$
B $\frac{3}{7}$
C $\frac{2}{5}$
D $\frac{4}{5}$
E $\frac{1}{7}$

27 **UFJF 2016** Considere a circunferência C: $(x \quad 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$.

a) Determine se o ponto A(4, –3) é interior, exterior ou pertencente à circunferência C.
b) Encontre o(s) valor(es) de a para que a circunferência C e a reta $y = ax$ possuam dois pontos em comum.

28 **EsPCEx 2016** Considere a circunferência que passa pelos pontos (0, 0), (0, 6) e (4, 0) em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais. Sabendo que os pontos (0, 6) e (4, 0) pertencem a uma reta que passa pelo centro dessa circunferência, uma das retas tangentes a essa circunferência, que passa pelo ponto (3, –2), tem por equação:

A $3x - 2y - 13 = 0$
B $2x - 3y - 12 = 0$
C $2x - y - 8 = 0$
D $x - 5y - 13 = 0$
E $8x + 3y - 18 = 0$

29 **ITA** Determine uma equação da circunferência inscrita no triângulo cujos vértices são A (1,1), B (1,7) e C (5,4) no plano xOy.

30 **IME 2015** Sejam *r* a circunferência que passa pelos pontos (6, 7), (4, 1) e (8, 5) e *t* a reta tangente à *r*, que passa por (0, 1) e o ponto de tangência tem ordenada 5 A menor distância do ponto P(1, 4) à reta *t* é:

A $3\sqrt{2}$
B 4
C $2\sqrt{3}$
D 3
E $\frac{4\sqrt{10}}{5}$

31 Fuvest 2017 Duas circunferências com raios 1 e 2 têm centros no primeiro quadrante do plano cartesiano e ambas tangenciam os dois eixos coordenados. Essas circunferências se interceptam em dois pontos distintos de coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2).

O valor de $(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2$ é igual a:

A $\frac{5}{2}$

B $\frac{7}{2}$

C $\frac{9}{2}$

D $\frac{11}{2}$

E $\frac{13}{2}$

32 ITA 2017 Considere dois círculos no primeiro quadrante:

- C_1 com centro (x_1, y_1), raio r_1 e área $\frac{\pi}{16}$.
- C_2 com centro (x_2, y_2), raio r_2 e área 144π.

Sabendo que (x_1, y_1, r_1) e (x_2, y_2, r_2) são duas progressões geométricas com somas dos termos iguais a $\frac{7}{4}$ e 21, respectivamente, então a distância entre os centros de C_1 e C_2 é igual a:

A $\frac{\sqrt{123}}{2}$

B $\frac{\sqrt{129}}{2}$

C $\frac{\sqrt{131}}{2}$

D $\frac{\sqrt{135}}{2}$

E $\frac{\sqrt{137}}{2}$

33 Udesc 2016 Considere o quadrilátero cujos vértices correspondem aos centros e aos pontos de interseção das circunferências $x^2 - 8x + y^2 = 0$ e $x^2 + (y - 2)^2 = 4$. Numericamente, a área deste quadrilátero é igual:

A ao produto dos raios das circunferências.

B à soma dos raios das circunferências.

C à média aritmética dos raios das circunferências.

D à metade do produto dos raios das circunferências.

E à oitava parte do produto dos raios das circunferências.

34 Fuvest 2011 No plano cartesiano, os pontos (0, 3) e (–1, 0) pertencem à circunferência C. Uma outra circunferência, de centro em $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ é tangente a C no ponto (0, 3). Então, o raio de C vale:

A $\frac{\sqrt{5}}{8}$

B $\frac{\sqrt{5}}{4}$

C $\frac{\sqrt{5}}{2}$

D $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

E $\sqrt{5}$

35 ITA 2016 Considere as circunferências λ_1: $x^2 + y^2 - 8x + 4y = 20$ e λ_2: $x^2 + y^2 - 2x - 8y = 8$.
O triângulo ABC satisfaz as seguintes propriedades:

a) o lado $\overline{AB}$ coincide com a corda comum a λ_1 e λ_2;

b) o vértice B pertence ao primeiro quadrante;

c) o vértice C pertence a λ_1 e a reta que contém $\overline{AC}$ é tangente a λ_2.

Determine as coordenadas do vértice C.

36 ITA Considere as circunferências C_1: $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$ e C_2: $(x - 10)^2 + (y - 11)^2 = 9$. Seja *r* uma reta tangente interna a C_1 e C_2, isto é, r tangencia C_1 e C_2 e intercepta o segmento de reta $\overline{O_1O_2}$ definido pelos centros O_1 de C_1 e O_2 de C_2. Os pontos de tangência definem um segmento sobre *r* que mede:

A $5\sqrt{3}$

B $4\sqrt{5}$

C $3\sqrt{6}$

D $\frac{25}{3}$

E 9

37 UFPR 2017 Seja C_1 o círculo de raio r = 2 e centro no ponto P(3, 4).

a) Qual é a equação do círculo C_1?

b) Considere o círculo C_2 definido pela equação $x^2 + y^2 = \rho^2$. Para quais valores de ρ o círculo C_1 intersecta o círculo C_2?

38 Uece 2017 Em um plano, munido do sistema de coordenadas cartesianas usual, as equações $x^2 + y^2 - 10\sqrt{3}x - 25 = 0$ e $x^2 + y^2 + 10\sqrt{3}x - 25 = 0$ representam circunferências. Cada uma dessas circunferências limitam uma área no plano. O comprimento da linha que contorna a união das áreas limitadas por cada uma destas circunferências é:

Dado: u.c = unidade de comprimento

A $\frac{200\pi}{3}$ u.c.

B $\frac{80\pi}{3}$ u.c.

C $\frac{50\pi}{3}$ u.c.

D $\frac{100\pi}{3}$ u.c.

39 ITA 2018 Considere a definição: duas circunferências são ortogonais quando se interceptam em dois pontos distintos e nesses pontos suas tangentes são perpendiculares. Com relação às circunferências C_1: $x^2 + (y + 4)^2 = 7$, C_2: $x^2 + y^2 = 9$ e C_3: $(x - 5)^2 + y^2 = 16$, podemos afirmar que:

A somente C_1 e C_2 são ortogonais.

B somente C_1 e C_3 são ortogonais.

C C_2 é ortogonal a C_1 e a C_3.

D C_1, C_2 e C_3 são ortogonais duas a duas.

E não há ortogonalidade entre as circunferências

40 ITA 2018 No plano cartesiano são dadas as circunferências C_1: $x^2 + y^2 = 1$ e C_2: $(x - 4)^2 = 4$. Determine o centro e o raio de uma circunferência C tangente simultaneamente a C_1 e C_2, passando pelo ponto $A(3, \sqrt{3})$.

FRENTE 3

Frente 1

Capítulo 5 – Funções logarítmicas

Revisando

1.

a) $\frac{3}{4}$

b) 36

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{1}{2}$

2. $\frac{a+2}{1+2a}$

3. $\frac{\alpha+\beta}{\frac{1}{2}-\beta}$

4.

5.

6. S = {3, 5}

7.

a) S = {14}

b) S = {2}

8

a) $S = \left]0, -2+\frac{\sqrt{26}}{2}\right[$

b) S = [1, 10]

Exercícios propostos

1. C
2. E
3. C
4. D
5 C
6. –2
7. D
8. D
9. B
10. B
11. E
12. B
13. C
14. A
15. E
16. E
17 D
18. B
19. D
20. B
21. a + b = 80
22. D
23. 27
24.

a) log x = 8 e log y = 6

b) 7

25 A
26. D
27. A
28. D
29. A
30. B
31 C
32. A
33. A
34. A
35. D
36. A
37. B
38. D
39. B
40. C
41. A
42. $Y = 100x^2$
43. D
44. A
45 B
46. E
47.

a) –0,75

b) $\frac{-3}{2} < x \leq \frac{-5}{4}$

48. E
49. D
50. C
51 E
52 A
53 D
54. 2
55. B
56. B
57. B
58. C
59. $x = 4+2\sqrt{3}$
60. D
61.

a) $\left]\log_{\frac{5}{3}} 4, +\infty\right[$

b) ℝ

c) $\left[-2, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{10}}{2}, 2\right]$

d)]1, 5[

e)]0, 1[∪]2, +∞[

62. A
63. A
64. E

Exercícios complementares

1. $\frac{1}{5} \cdot \left[\frac{2b+1-3a}{b+1-a}\right]$

2.

a) x + y = xy, se x > 0 e y > 0

b)

3. D
4. C
5. B
6. A
7 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \log_3 \frac{1}{2}\right\}$
8. Soma: 01 + 02 = 03
9. C
10.

a) R$ 360,00

b) R$ 56,00

11. E
12. $\frac{5n-3}{6}$
13. $\frac{3a-b+5}{a-b+1}$
14. Demonstração
15. Demonstração
16. D
17. B
18. B
19. B
20. D
21 B
22. $b^{\log_2 a}$
23. B
24. $\frac{1}{5} \leq x \leq 1$
25 C
26 Soma: 01 + 02 = 03
27 D
28. $\operatorname{sen} x = e^{-2}$
29. A
30. D
31. $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$
32 $S = \left]0, \sqrt{2}-1\right]$
33. $x \in \left]\frac{7}{4}, +\infty\right[$
34. D
35. A
36.

a) x = 5,17

b) R$ 1.385.000,00

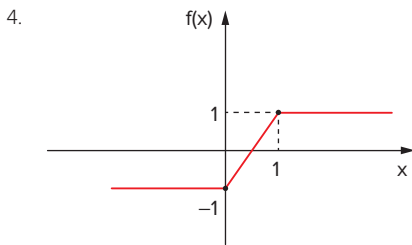
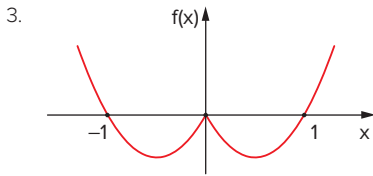
Capítulo 6 – Função modular

Revisando

1 $|x^2 - 6x + 8| = \begin{cases} x^2 - 6x + 8 \ \ ; x \leq 2 \text{ ou } x \geq 4 \\ -x^2 + 6x - 8; \ 2 < x < 4 \end{cases}$

2. $|x| + |x - 1| = \begin{cases} -2x + 1; \ x \leq 0 \\ 1; \ 0 < x < 1 \\ 2x - 1; \ x \geq 1 \end{cases}$

3.

4.

5.

a) $S = \{\pm 2, \pm 8\}$

b) $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{2}{3}, 6\right\}$

6

a) $S = \left]-4, 10\right[$

b) $S = \left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$

c) $S = \left[2; +\infty\right[$

Exercícios propostos

1.

a) 3

b) $\pi - \sqrt{5}$

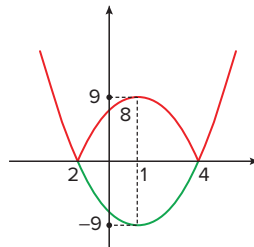
c) $x^2 + 1$

d) $-1 + \sqrt{2}$

2. E
3. C
4. C
5. B
6. B
7. B
8. E
9. C
10. A
11. D
12. C
13. F; F; V
14. Q = 5,098
15. S = {8, 2}
16. $S = \varnothing$
17. E
18. C
19. A
20 C
21. E
22 D
23. x = 50 e x = 250
24. E
25.

a) $x \geq \frac{3}{2}$

b) $-\frac{4}{3} < x < \frac{2}{3}$

26. E
27. A
28. B
29. A
30. E
31. $S = \left[-2, \frac{1}{2}\right] \cup [4, +\infty[$
32 D
33

34. E
35. $\left(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$ e $\left(-2, 2\right)$
36. B
37. E
38. C
39. A
40. B
41. a = 1 e b = 3
42 C
43 B
44. B
45. A
46. A
47 C

Exercícios complementares

1. B
2.

a) $S = \left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right\}$

b) $S = \{-6, -1, 1, 4\}$

c) $S = \left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} / x < -2 \text{ ou } -1 < x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

e) $S = \left[3, +\infty\right[$

f) $S = \left]1, 4\right[$

g) $S = \left]-3, \frac{11}{3}\right[$

3 Zero
4 S = [0, 1]
5 E
6. V; F; F; F
7. C
8. D
9. A
10. C
11. A

Capítulo 7 – Trigonometria – conceitos básicos

Revisando

1

0°	0	135°	$\frac{3\pi}{4}$	270°	$\frac{3\pi}{2}$
30°	$\frac{\pi}{6}$	150°	$\frac{5\pi}{6}$	300°	$\frac{5\pi}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	180°	π	315°	$\frac{7\pi}{4}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	210°	$\frac{7\pi}{6}$	330°	$\frac{11\pi}{6}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	225°	$\frac{5\pi}{4}$	360°	2π
120°	$\frac{2\pi}{3}$	240°	$\frac{4\pi}{3}$	540°	3π

2. 100°
3.

a) 290°

b) 80°

c) $\frac{7\pi}{4}$ rad

Exercícios propostos

1

a) 300°

b) 22° 30'

c) 240°

d) 9°

e) 720°

2

a) $\frac{5}{2}\pi$ rad

b) $\frac{5}{4}\pi$ rad

c) $\frac{7}{6}\pi$ rad

d) $\frac{11}{6}\pi$ rad

e) $\frac{7}{5}\pi$ rad

3. B
4. 4 rad
5 $\frac{\pi}{3}$ rad
6. C
7. $x \cong 286{,}62°$

8 C

9. B

10. 0,5 rad

11. B

12. C

13. D

14.

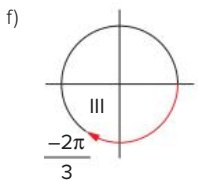
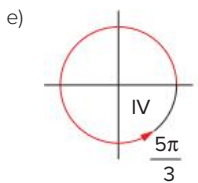
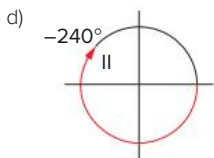
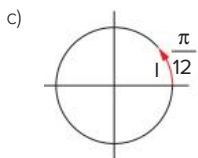
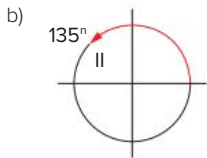
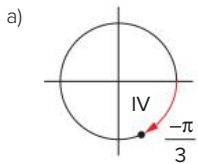
a)

b)

c)

d)

e)

f)

15. A e C

16. $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$

17.

a) 230° é a 1ª determinação positiva.

b) 50° é a 1ª determinação positiva.

c) $\frac{2\pi}{3}$ é a 1ª determinação positiva.

d) 300° é a 1ª determinação positiva.

e) $\frac{\pi}{3}$ é a 1ª determinação positiva.

18. C

19. O ângulo com a menor primeira determinação positiva é o de 1845°.

20 O número sorteado foi o 270

21 A

22. $x = \frac{\pi}{20} + K \cdot \left(\frac{2\pi}{5}\right); K \in \mathbb{Z}$

23 $x = 40° + n\ (120°); n \in \mathbb{Z}$

24

a) Demonstração

b) Demonstração

25. C

26. B

27 B

Texto complementar

1. 38708,6 km

Exercícios complementares

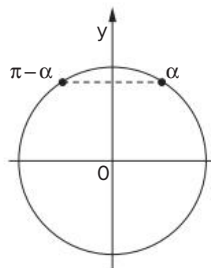
1. $\frac{\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}$

2 90°

3. 82°

4. I e II quadrantes.

5. $\frac{\pi}{6}$ rad

6.

7. 6°

8. Demonstração

9.

a) 17° 30'

b) $\frac{\pi}{15}$ rad

c) $\nexists x \in \mathbb{R}$

10. 6 cm

11. 3352,32 km

12. O jogador precisará realizar o giro de 135° na direção horária.

13. F; F; V

14. E

15. B

Capítulo 8 – Funções trigonométricas básicas – seno e cosseno

Revisando

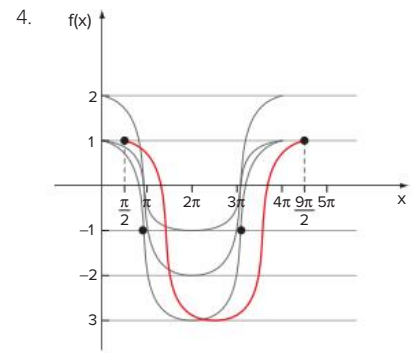
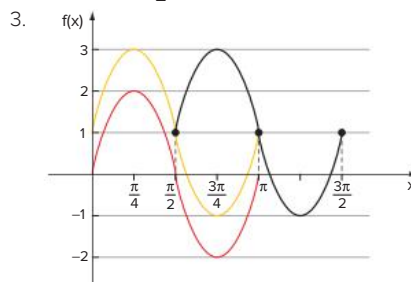
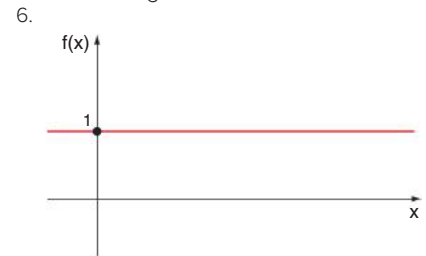
1. $E(x) \in [-5, 1]$

2 $\text{sen}\,(30°) = \frac{1}{2}$

3.

4.

5. $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

6.

Exercícios propostos

1. C

2. E

3 E

4. B

5. A

6. B

7 C

8. C

9. $\theta = 60° = \frac{\pi}{3}$ rad

10. E

11. $\text{área} = \frac{b \cdot (1 - \text{sen}\,\alpha)}{2}$

12. C

13. E

14. D

15. E

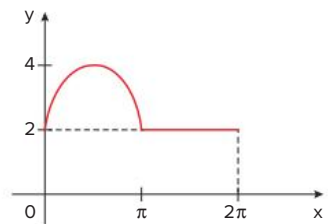
16 $f(x) = \begin{cases} 2 + 2\,\text{sen}x;\ 0 \le x \le \pi \\ 2;\ \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$

17 D

18. C

19. C

20. B

21. $1 + \text{sen}\theta$

22 C

23. A

24. D

25. C

26. D

27. A

Exercícios complementares

1 C

2. $P = \pi$ e $Im_f = [-3, 3]$

3. $sen(-x) = -sen\,x \Rightarrow$ Função ímpar
$cos(x) = cos(-x) \Rightarrow$ Função par

4 A

5. Lucro de dezembro de 2017 é de R$ 50 000,00

6. $S = \{1, -sen^2\alpha\}$

7 E

8. $m = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

9. A

10. *f* é par; *g* é ímpar.

11. E

12 A

13. zero

14. 1

15.

$$\frac{x}{|x|} + sen\,x = \begin{cases} x > 0 \ldots \frac{x}{x} + sen\,x = 1 + sen\,x \\ x < 0 \ldots \frac{x}{-x} + sen\,x = -1 + sen\,x \end{cases}$$

16. D

17 Soma: $04 + 08 + 16 = 28$

18.

a) $\lambda = 3000$

b) Houve 3 mil doações de sangue em maio ($t = 4$) e em novembro ($t = 10$)

19. C

20.

21. B

Frente 2

Capítulo 4 – Análise de grandezas proporcionais

Revisando

1 A

2 B

3. A

4. B

5. D

6 E

7 A

8. B

9. B

10. D

Exercícios propostos

1	E	11	C
2	C	12	C
3	C	13	B
4.	D	14	D
5.	C	15.	C
6.	B	16.	A
7.	D	17.	C
8.	B	18.	C
9.	A	19.	C
10.	B	20.	B

Exercícios complementares

1.	C	9.	E
2.	E	10.	B
3.	B	11.	B
4.	C	12.	B
5.	B	13.	A
6.	B	14.	E
7.	A	15.	B
8.	D	16.	A

17.

a) $\frac{11}{12}$ km/h

b) $\frac{11}{40}$

18. E

19. Soma: $01 + 02 + 04 = 07$

20. E

Capítulo 5 – Sequências numéricas

Revisando

1. $a_{31} = \frac{33}{2}$

2. C

3. A

4. B

5. C

6. E

7. E

8. B

9. D

10. A

Exercícios propostos

1.	C	5.	D
2.	B	6.	C
3.	B	7.	A
4.	B	8.	B

9	D	15	A
10.	C	16.	B
11.	A	17.	B
12.	C	18.	C
13.	B	19.	C
14.	E	20.	B

21. E

22. Soma: $01 + 02 + 04 + 08 = 15$

23	D	40	C
24.	C	41.	A
25.	A	42.	E
26	D	43	A
27.	A	44.	D
28.	A	45.	C
29	D	46.	E
30.	E	47.	E
31.	A	48.	B
32.	E	49.	E
33.	E	50.	C
34.	A	51	C
35.	A	52.	A
36.	D	53.	E
37	C	54.	A
38.	E	55.	B
39.	C	56.	D

57.

a) 192 lados

b) $\frac{1024}{81}$

c) Passo 21

58. E

59. D

60. A

61. A

62. D

63. D

64 A

65. A

66 B

67. D

68 B

69. A

70. E

71. A

72. A

73. D

74. A

75. D

76. A

77. B

78. E

79. C

80. C

Exercícios complementares

1 E

2. C

3. C

4. C

5. A

6.

a) 23

b) $\frac{206}{481}$ ou aproximadamente 43%

7

a) Demonstração

b) $a = 0$ e $b = -8$

8. C

9. A

10 B

11.

a) Tabela

b) 202 mesas

12.

a) $F_{10} = 76$ e $F_n = 8n - 4$

b) 10000

13. A

14.

a) $\frac{25\pi}{2}$ cm

b) 210π cm

15.

a) $b = \frac{6}{5}$ e $r = \frac{12}{5}$

b) $a_{20} = \frac{239}{5}$

c) $S_{20} = 500$

16.

a) $x_1 = 5$ e $x_2 = \frac{1}{2}$

b) $S_{100} = 7575$

17.

a) $S = \frac{(2a_1 + n \cdot r) \cdot n}{4}$

b) $n_{mínimo} = 114$

18.

a) PA de razão $\frac{2}{3}$ e primeiro termo $\frac{1}{3}$

b) $a_{1\,000} = \frac{1999}{3}$

19.

a) 221 cm^2

b) $\begin{cases} D_f = \mathbb{N}^* \\ Im_f = \{y \mid y = 2x^2 + 2x + 1,\ x \in \mathbb{N}^*\} \end{cases}$

20 C

21. Soma: $02 + 16 = 18$

22. B

23.

a) Demonstração

b) 1055

24. E

25

a) $\frac{4}{5}$

b) Demonstração

26. 1262500

27.

a) (1, 1, 2, 2, 2, 6, 2, 8, 2, 10, 2, 36, 2, 14, 2, 64)

b) 2^{1225}

28. $n_{2\,013} = -\frac{1}{4}$

29.

a) Resposta possível: $n = 2$ e $k = 6$

b) Tem-se:

$S_n^k = 1$ para $n = 3$ e $k = 0$

$S_n^k = 2$ para $n = 4$ e $k = 0$

$S_n^k = 3$ para $n = 3$ e $k = 1$

$S_n^k = 4$ para $n = 2$ e $k = 0$

$S_n^k = 5$ para $n = 2$ e $k = 1$

$S_n^k = 6$ para $n = 1$ e $k = 0$

$S_n^k = 7$ para $n = 2$ e $k = 2$

$S_n^k = 8$ para $n = 4$ e $k = 1$

$S_n^k = 9$ para $n = 3$ e $k = 2$

$S_n^k = 10$ para $n = 1$ e $k = 1$

$S_n^k = 11$ para $n = 21$ e $k = 2$

$S_n^k = 12$ para $n = 4$ e $k = 2$

c) Demonstração

30.

a) $P_7 = 21$

b) $n = 15$

31. A

32. A

33. B

34. C

35. D

36. A

37 E

38. A

39. E

40 E

41. D

42 $\sqrt{15}$ cm

43. Soma: $02 + 04 + 08 = 14$

44. D

45. B

46.

a) 72 horas

b) $k = 15$

47.

a) $\beta = 60°$

b) $tg\beta = \frac{\sqrt{7}}{3}$

48.

a) Demonstração

b) $q \in \mathbb{R} - \{0,\ 1,\ -1\}$

49.

a) $q = \frac{3}{2}$

b) $r = \frac{2\pi}{3}$

50.

a) $q = -2$

b) $S_3 = \frac{3}{22}$

51. Aproximadamente 36 metros.

52. 1023x

53

a) 5 meses

b) Aproximadamente 9 milhões e 552 mil reais.

54.

a) 1820

b) 4704

c) 79

55.

a) $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 3, 5, 7\right)$

b) (1, 2, 4, 6, 8) ou (1, –4, 16, 12, 8)

56

a) $q = 2$ e (7, 14, 28, 56, ...)

b) 6944

57.

a) 62

b) 19

58. E

59.

a) 4 saltos

b) Demonstração

60. B

61. $K_{n \to \infty} = 1$

62. 8^n quadrados; Área = 1

63

a) $OB_1 = \frac{7\sqrt{3}}{2}$ cm

b) PG de razão $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{\frac{7}{2} \cdot \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \quad 1\right]}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}$

64. E

65 A

66. D

67. D

68. C

69. A

70. E

71 A

72. D

73

a) (4, 6, 9), (8, 12, 18) e (12, 18, 27)

b) 4

74. $B = \frac{1}{4}$, $C = -\frac{1}{2}$, $D = 1$ e $E = -2$

75. $14 - 6\sqrt{2}$

76. $j = 12$

77. 5 termos.

78 $\frac{11}{52}$

79. $\underbrace{333...3}_{\text{30 algarismos}}$

80

a) $r_{min} = 3$

b) $a_{18} = 53$

Capítulo 6 – Introdução à Álgebra Linear

Revisando

1.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 5 \\ 25 & 23 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2 $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

3.

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 31 & -35 \\ 14 & 46 \end{pmatrix}$

b) $A \cdot C = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 12 & -1 \\ 17 & -19 & 21 & -5 \\ -10 & 8 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

c) O produto B · A não existe.

d) $B \cdot C = \begin{pmatrix} -17 & 19 & -21 & 5 \\ -24 & 36 & -48 & 4 \end{pmatrix}$

e) O produto C · A não existe.

f) O produto C · B não existe.

4. C

5. 36

6. E

7

a) $S = \{(4, 1)\}$

b) $S = \varnothing$

c) $S = \{(5 - \alpha, \alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$.

8. $S = \{(0, -1, 2)\}$.

9 D

10. Se k = 1 o sistema é SPI Se k ≠ 1 o sistema é SPD.

Exercícios propostos

1. B

2. A

3 E

4. B

5 A

6. A

7 B

8 C

9. B

10. C

11. B

12 E

13. A matriz que fornece o número médio de aluguéis de cada tipo de carro é $\begin{pmatrix} 42 & 41 & 26 \\ 47 & 50 & 40 \\ 60 & 59 & 60 \end{pmatrix}$.

14. a = 0, b = 2 e c = – 1

15. C

16. E

17. A

18. A

19. B

20. C

21. D

22. B

23. B

24. A

25. A

26. E

27. E

28. A

29. B

30. D

31. C

32. A

33. B

34. D

35. E

36. E

37. A

38. D

39. E

40. A

41. B

42. $p = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{7}{2}$

43. D

44. C

45. B

46. B

47 C

48. B

49. A

50. A

51. C

52. B

53. E

54. A

55. A

56. O hambúrguer custa R$ 4,00, o suco R$ 2,50 e a cocada R$ 3,50.

57. A

58. D

59. A

60. D

61. D

62. B

63. B

64. B

65. $S = \varnothing$.

66. E

67. D

68. A

69. C

70. B

71

a) O sistema só admite solução quando a ≠ 9.

b) Se a ≠ 9 temos $x = \frac{2a - 9}{2a - 18}$ e $y = \frac{3}{9 - a}$

72. E

73. A

74. B

75. A

76. D

77. C

78. D

79. C

80. E

81. B

82. A

83. A

84. A

85. A

86. A

87. C

88. C

89. A

90. B

91. D

92. B

93. C

94 A

95 A

96 B

97 D

98 C

99 A

100.A

101 B

102 D

103. A

104. B

105. B

106. A

107. A

108. E

109. B

110. A

111. D

112. E

113. B

114. D

115. E

116. A

117. C

118. B

119. E

120. E

Exercícios complementares

1.

a) $\begin{cases} x+y=40 \\ 25x+200y=1700 \end{cases} \Rightarrow x=36 \text{ e } y=4.$

b) A cebola grande gera o menor desperdício de cascas.

2. $MF=\frac{1}{12}\cdot N\cdot P$

3.

a) $C=\begin{pmatrix} 1 & 16 & 49 & 100 \\ 1 & 4 & 25 & 64 \\ 9 & 0 & 9 & 36 \end{pmatrix}$ e

$B^t=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$

b) $X=\begin{pmatrix} 14 \\ 18 \\ 22 \end{pmatrix}$ e $Y=\begin{pmatrix} 746 & 912 & 1078 \end{pmatrix}.$

4. E

5. B

6.

a) Verdadeira.

b) Verdadeira.

c) Falsa.

7

a) $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$

b) Demonstração

c) $f^{-1}(x)=\frac{dx-b}{-cx+a}$

8.

a) $M=\begin{pmatrix} 20 & 31 & 4 \\ 35 & 43 & 5 \end{pmatrix}$

b) SEGUNDA

c) GGBB, GNBD, NGDB e NNDD

9. O São Paulo venceu 18 jogos, empatou 8 e perdeu 12 partidas.

10.

a) $M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $M^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) m_{21} representa o número de caminhos de B para A com um vértice intermediário. O único é $B \to B \to A$.

11. E

12. As raízes são –3, 3 e 4.

13. B

14.

a) a = 0, b = 2 e c = –1

b) c = 0 e d = –4

15. E

16. Soma: 01 + 04 + 08 = 13

17. F; F; V; V; V

18. São necessários 5 padeiros do tipo A, 3 padeiros do tipo B e 2 do tipo C.

19. D

20 C

21 B

22 E

23. B

24. C

25. B

26. C

27. A

28. A

29. E

30. A

31.

a) m = 0

b) S = {(1, –1, 1)}

32. A de maior vazão leva 30 minutos e a de menor vazão leva 40 minutos.

33.

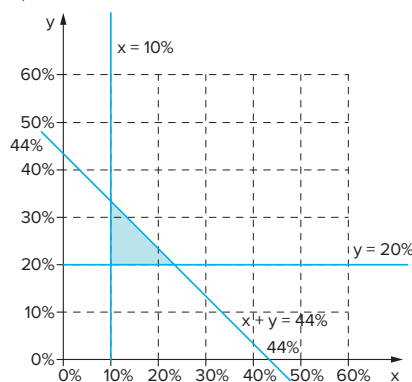
a) Demonstração

b) Para que o sistema tenha solução única *q* pode ser qualquer valor pertencente a $\mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$.

34.

a) x = 0,10 e y = 0,15

b)

35.

a) $(A_\alpha + A_{2\alpha})^2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) $\alpha = 3$

36.

a) Demonstração

b) $p=0$ e $q=0$ ou $p=1$ e $q=\frac{1}{2}$

37.

a) x = 1 ou x = –2

b) $|z|=\sqrt{13}$

38

a) $S=\{x \in \mathbb{R} \mid -2,5 < x < 0 \cup x > 2,5\}$.

b) $B=\begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 56 \end{bmatrix}$

39. B

40. C

41. D

42. B

43. C

44. D

45. D

46. B

47. D

48. C

49. B

50. B

51. B

52. A

53. D

54. E

55 E

56. B

57. E

58. C

59. B

60. D

61 B

62. B

63. C

64. C

65. B

66. D

67 B

68. E

69. D

70. A

71. A

72. C

73

a) $B=\begin{bmatrix} 1-c & -c & c \\ -f & 1-f & f \end{bmatrix}; \forall c, f$

b) $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

74. C

75. C

76. B

77. B

78. A

79. C

80. 5

81 E

82. n = 3 e a soma é –1.

83. $M=\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$, com $x \in \mathbb{R}$

84. D

85. C

86

a) $a \neq 0$ e $\forall b \in \mathbb{R}$.

b) $X=\begin{bmatrix} -\frac{1}{a} \\ 1 \\ \frac{b}{a^2} \\ 0 \end{bmatrix}$

87 E

88 A

89.

a) Demonstração

b) Demonstração

90. A

91. D

92. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$
$\begin{pmatrix} \sqrt{1-b^2} & b \\ b & -\sqrt{1-b^2} \end{pmatrix},$
$\begin{pmatrix} -\sqrt{1-b^2} & b \\ b & \sqrt{1\ \ b^2} \end{pmatrix},\ b \in [-1,1].$

93. $a = \ \ d$ ou $ad = bc$

94. E

95 D

96 $k \in \left]-2,\ +\infty\right[$

97

a) Demonstração

b) Demonstração

98. E

99. E

100. A

101. A

102.
$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$
$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ou $M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

103 E

104. D

105. 1

106. 0

107 C

108. $S = (n+3) \cdot 2^n - 3$

109.

a) $x = 20$ e $y = 10$

b) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{15a}{11} + \frac{14b}{11} & \frac{14a}{11} + \frac{5b}{11} \end{bmatrix}$ e

$B = \frac{1}{7a^2 - 5ab - 7b^2} \begin{bmatrix} 35a - 48b & 77a - 110b \\ 23a - 35b & 55a - 77b \end{bmatrix}$

110. 72

111. D

112. {(–a – b – c), (a + b – c),
(–a + b + c), (a – b + c)}

113

a) $D = 4$

b) $P(D = 4) = \frac{3}{16}$

114. E

115. B

116. $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$

117. C

118. Demonstração

119. A

120. O sistema terá solução se a + b + c + abc = 0.

Frente 3

Capítulo 6 – Áreas das figuras planas

Revisando

1. Terreno B.

2. B

3.

a) 12

b) 12

c) 60

4. D

5. D

6. C

7. A

8 C

9 C

10. $x = 1{,}915$

11. A

12. C

13. A

14. 2826 cm^2

15

a) $DC = 4\sqrt{3}$

b) $R = 6$

c) $S_{\Delta AOB} = 9\sqrt{3}$

d) $S_{Segmento} = 12\pi - 9\sqrt{3}$

Exercícios propostos

1 B

2. E

3. C

4. D

5. E

6. A

7 C

8 B

9. A

10. B

11. A

12.

a) $med(B\hat{A}D) = 22°30'$

b) $A_{\Delta ABD} = \frac{x^2\sqrt{2}}{4}$

13. D

14. B

15. A

16. C

17. A

18. E

19. D

20 D

21. B

22. A

23. A

24. E

25 A

26. E

27. C

28. C

29. E

30. D

31. B

32 B

33. A

34. E

35. A

36. C

37 E

38. A

39. C

40. C

41 B

42. B

43. B

44. C

45 D

46. E

47. E

48. C

49 A

50. D

51. C

52. B

53 B

54. B

55. A

56. B

57 E

58. B

59. D

60. A

Exercícios complementares

1. E

2.

a) 30000 pessoas.

b) 560000 habitantes.

3. B

4. $A_{\Delta} = 1{,}5\ cm^2$

5 E

6. A

7

a) $\frac{5}{2}m^2; \frac{5}{3}$

b) R$ 550,00

c) 18,18%

8 D

9

a) 3 e 4.

b) 48 cm, 16 cm e 12 cm.

c) 384 cm^2, 512 cm^2 e 864 cm^2.

10. $A_{Losango} = 675\ cm^2$

11. $7 - 4\sqrt{2}\ cm^2$

12. D

13.

a) Altura : $\frac{\sqrt{55}}{2}$

b) $A_{\Delta ABR} = \sqrt{55}$

14.

a) $\ell = 2r(1+\sqrt{3})$

b) $A = r^2(3+\sqrt{3})$

15.

a) $\frac{H}{h} = 5$

b) $H = \frac{15\sqrt{15}}{4}$

16 A

17 B

18

a) $CN = CM = \frac{2}{3}$

b) $A_{\Delta CMN} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

19. B

20.

a) 3 cm

b) $\frac{3}{2}$

21.

a) $A_{\Delta AFE} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$

b) $x = \frac{1}{5}$

22. 7 m^2

23.

a) $h = 3$

b) $r = \sqrt{5}$

c) $A = 5\pi - 9$

24

a) $A_{Papel} = 625\left(1+\sqrt{3}\right)\ cm^2$

b) $med\left(\overset{\frown}{BD}\right) = \frac{25\pi\sqrt{2}}{2}\ cm$

25

a) $A_{\Delta ABC} = 4\,000\sqrt{3}\ m^2$

b) $r = 20\sqrt{3}\ m$

c) $R = \frac{140\sqrt{3}}{3}\ m$

26

a) $A_{espelhod'água} = 77{,}5\ m^2$

b) $A_{flores} = 55\ m^2$

27.

a) $A_{\Delta APO} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $AB_{menor} = \frac{5\pi}{6}$ e $AB_{maior} = \frac{19\pi}{6}$

c) $A_{hachurada} = \frac{3\sqrt{3}+6+5\pi}{6}$

28.

a) $\frac{A_{Círculo}}{A_{Setor}} = \frac{2}{3}$

b) $\cos(\theta) = \frac{7}{9}$

29.

a) $\frac{R}{r} = 3$

b) $27\sqrt{3}\cdot r^2$

30. A

31 A

32. E

33.

a) $r = 2$

b) AB = 12 e AC = 5.

c) $A = 30 - 4\pi$

34.

a) Aproximadamente 51 cm.

b) Aproximadamente 185,5 cm^2.

35.

a) $S = 16\sqrt{3}\ cm^2$

b) R = 5 cm

36.

a) $r = 2\sqrt{2}+2$

b) $A_{Hachurada} = 48 + 32\sqrt{2} - \left(16 - 8\sqrt{2}\right)\pi$

37. A

38. D

39. D

40.

a) Aproximadamente 29 cm.

b) Aproximadamente 64 cm^2.

41. B

42 D

43. C

44. C

45. E

46. $\frac{R_H}{R_T} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

47 A

48. A

49. C

50. D

51. $S_{\Delta ABC} = 6$

52 B

53. E

54. $A_{Círculo} = 144\pi\ cm^2$

55. D

56. C

57. B

58 C

59. A

60. D

Capítulo 7 – O plano cartesiano

Revisando

1.

a) M (3, 6)

b) M (2, 6)

c) $M\left(\frac{5}{2}, 1\right)$

d) $M\left(-\frac{3}{2}, -\frac{11}{2}\right)$

2. D

3 C

4. D

5. A

6. E

7. 13

Exercícios propostos

1. E
2. B
3. 1500 metros
4. $x = \frac{6}{11}$ e $y = \frac{26}{11}$
5. B
6. A
7. $2p = \left(2\sqrt{10} + \sqrt{37} + \sqrt{41}\right)$ u.c.
8. A
9. B
10.

a) d(A, B) = 5 u.c.

b) $C\left(-\frac{2}{7}, \frac{16}{7}\right)$ ou $C(2,0)$

11. C
12. C
13. E
14. B
15. B
16.

a) $med\left(A\hat{B}C\right) = 60°$

b) $3\sqrt{3}$ u.a.

17. Aproximadamente 3 km.
18. E
19. $S_{\Delta ABC} = \frac{15}{4}$ u.a.
20. C

Exercícios complementares

1. D
2.

a) $a = -\frac{7}{3}$ e $b = -\frac{5}{3}$

b) $a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{1}{3}$

c) $a = -1$ e $b = 1$

d) $a = \frac{5}{4}$ e $b = \frac{7}{4}$

3 B

4.

a) $M_{BC}(4,3)$

b) G(1,6)

c) $A_{\Delta ABC} = 27$ u.a

5.

a) C: 40 cm afastado da parede e a 1,2 m de altura.

b) B: 25 cm afastado da parede e a 1,6 m de altura.

c) D: 55 cm afastado da parede e a 0,8 m de altura.

6. 1280000 km^2
7. C
8. M(5, 5)
9. E
10. A

11 A

12 A(2, 7), B(–4, 3) e C(6, –1)

13 C

14. $d = \sqrt{13}$ km

15. R$ 3.150.000,00

16. D

17. B

18. C

19. B

20. B

Capítulo 8 – O estudo da reta

Revisando

1.

a) $y = x + 4$ e $x - y + 4 = 0$

b) $y = -x + 4$ e $x + y - 4 = 0$

c) $y = \sqrt{3}x - 2$ e $\sqrt{3}x - y - 2 = 0$

2.

a) $y = \frac{4}{3}x$ e $4x - 3y = 0$

b) $y = -\frac{1}{2}x + 5$ e $x + 2y - 10 = 0$

c) $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ e $x - 3y + 7 = 0$

3. $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$

4. $3x - 4y + 1 = 0$

5. (4, –3)

6. $A_{\Delta ABC} = 10{,}5$ u.a.

7. $y = 2x + 2$

8. $2x + 3y - 18 = 0$

9. $y = -2x + 4$

10. $4x - 3y + 2 = 0$

11. $3x - y - 9 = 0$

12. $4x + y - 32 = 0$

13. $B(-7, -2)$

14. 2 u.c.

15. $h_A = \frac{19\sqrt{17}}{17}$ u c

16. $x - y + 2 = 0$ e $\left(-2 + \sqrt{3}\right)x - y + 2 = 0$

Exercícios propostos

1. C

2. C

3. C

4. E

5. B

6. 16 anos.

7. D

8. E

9 C

10. D

11 C

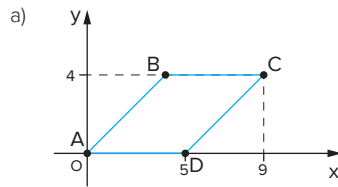
12

a) $y = 10x - 85$

b) 115 toneladas.

13. C

14.

a)

b) $y = \frac{4}{9}x$

15 B

16 D

17 E

18. D

19. C

20. E

21. C

22. D

23. A

24. B

25. A

26 B

27 B

28. B

29. B

30. D

31. B

32. B

33. C

34. E

35. C

36. B

37 C

38. E

39. D

40. E

41. A

42. A

43. E

44. $y_P = 2$

45. C

46. A

47. A

48. E

49. A

50. C

51. D

52. D

53. D

54. E

55. A

56. 30

57 A

58. B

59. A

Exercícios complementares

1. E

2. D

3. B

4 B

5. E

6. Soma: 01 + 02 + 04 = 07

7 A

8

a) $P\left(3, 3\sqrt{3}\right)$

b) $y = \left(\sqrt{3} - 2\right)x + 6$

9 I(5, 4)

10.

a) 75°

b) $\frac{49\left(3 + \sqrt{3}\right)}{6}$ u.a.

11.

a) $x + 2y - 12 = 0$

b) $\text{Área} = + \frac{x^2}{2} \quad 6x$

c) $A_{max} = 18$ u.a.

12 B

13. D

14.

a) $P\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$, $Q\left(0, b\right)$ e $R\left(\frac{b}{2b - 2a}, \frac{b\left(2b - a\right)}{2b - 2a}\right)$

b) $a = -8$, $b = 4$ e $c = 16$

15. A

16 C

17 A

18. D

19.

a) $Q\left(x\right) = \frac{1}{2}$

b) $AB = a_1\sqrt{10}$

20. B

21. A

22. E

23

a) $DE = 3 - 3\alpha$

b) $f\left(\alpha\right) = -\frac{15}{2} \cdot \alpha \cdot \left(\alpha - 2\right)$

24. D

25 $N\left(\frac{1 + \sqrt{19}}{2}, 0\right)$

26. C

27.

a) $A\left(\frac{7}{11}, \frac{14}{11}\right)$

b) Demonstração

28. B

29. C

30. C

31.

a) $D\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$

b) Demonstração

32.

a) Gráfico

b) $x \in \mathbb{R} / x \leq 5$

c) $\left[ABC\right] = 24$ u.a.

33. E

34. $A_{máxima} = \frac{1}{4}$

35.

a) $3x + y - 3 = 0$

b) $\alpha = -4$

36.

a) (6, 5), (3, 2) e (4, 7)

b) A = 6 u.a.

37. A

38. D

39. $S = \frac{121\sqrt{2}}{12}$

40.

a) $\frac{1}{3} < k < \frac{3}{4}$

b) $k = \frac{4}{7}$ ou $k = 2$

41 D

42 D

43

a) 20

b) 15%

44. E

45 C

46 B

47. D

48. A

49.

a) $2x + 5y - 14 = 0$ e $10x - 4y + 17 = 0$.

b) $\frac{\sqrt{1769}}{10}$

50. $\left(4\sqrt{2} - 5\right)$ cm

51. E

52. $tg\theta = 7$

53.

a) $T\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

b) $y = -3x$

54.

a) B(6, 3)

b) C(2, 11)

55. D

56. E

57. B

58.

a) $\cos\alpha = \frac{6\sqrt{85}}{85}$

b) D(7, 3)

59. E

Capítulo 9 – Equações da circunferência

Revisando

1

a) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$

b) $(x + 1)^2 + y^2 = 1$

2

a) C(2, 1), R = 4, P(6, 1), Q(–2, 1), S(2, 5) e T(2, –3).

b) $C(-1, 1), R = \sqrt{5}, P\left(-1 + \sqrt{5}, 1\right), Q\left(\ 1 \quad \sqrt{5}, 1\right),$ $S\left(-1, 1 + \sqrt{5}\right)$ e $T\left(-1, 1 - \sqrt{5}\right)$.

3.

a) Uma circunferência de centro (5, –6) e raio 5.

b) O ponto (3, –4).

c) Um conjunto vazio.

4. D

5. Eixo *x*: (–2, 0); Eixo *y*: $\left(0, 4 - 2\sqrt{3}\right)$ e $\left(0, 4 + 2\sqrt{3}\right)$.

6. $(x + 12)^2 + (y - 13)^2 = 169$

7. Soma: 02 + 04 + 16 = 22

8. A

9. D

10. E

11. $3x - 4y + 16 = 0$ e $3x + 4y - 16 = 0$.

12.

a) $p = -15$

b) $p = 33$

c) $-15 < p < 33$

Exercícios propostos

1 C

2. D

3. A

4. C

5. B

6. G(1, 0) e $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

7. E

8. C

9. A

10 C

11. D

12. C

13. Soma: 01 + 02 + 16 = 19

14. B

15. E

16. B

17 C

18. Soma: 01 + 02 + 04 + 08 = 15

19. B

20. C

21. C

22. B

23. E

24. C

25. D

26. B

27. D

28 D

29. D

30. C

31. B

32. C

33. A

34. A

35. D

36. C

37. D

38. E

39 B

40. A

Exercícios complementares

1. B

2. D

3.

a) P(5, –1)

b) λ': $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 1$

4 C

5. C

6.

a) Gráfico.

b) A(2, 3), B(3, 2), C(–2, –3) e D(–3, –2).

c) $A = 10$

7. A

8. B

9.

a) P(4, 3)

b) $A = 50\ km^2$

10

a) $\begin{cases} (x - 32)^2 + (y - 24)^2 \leq 24^2 \\ x^2 + y^2 \leq 32^2 \end{cases}$ + Gráfico

b) km 25

11.

a) $A\left(1, \sqrt{3}\right), B\left(1, -\sqrt{3}\right), C\left(-1, -\sqrt{3}\right)$ e $D\left(-1, \sqrt{3}\right)$

b) $A_{total} = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$

12. B

13. Aproximadamente 11.

14.

a) $r = 5$

b) $3x - 4y + 23 = 0$

c) $A_{\Delta PQR} = \frac{125}{6}$

15 B

16 B

17.

a) $OP = \sqrt{265}$

b) $r = 11$

18. r: $y = x$ e s: $y = -x$.

19. D

20. D

21. B

22. E

23. E

24. C

25. C

26. A

27.

a) A pertence a C.

b) $a < 0$ ou $a > \frac{3}{4}$

28. A

29. $\left(x \quad \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y \ \ 4\right)^2 \quad \frac{9}{4}$

30 E

31 C

32. E

33. A

34. E

35 $C\left(\frac{38}{5}, \quad \frac{36}{5}\right)$

36. A

37.

a) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$

b) $3 \leq \rho \leq 7$

38. D

39. C

40. $C\left(\frac{1}{4}, \frac{15\sqrt{3}}{4}\right)$ e $r = \frac{11}{2}$ ou $C\left(\frac{23}{4}, -\frac{7\sqrt{3}}{4}\right)$ e $R = \frac{11}{2}$.